

# 혼합법을 이용한 박벽 복합재료 보의 전단변형거동 해석

박일주\* · 정성남\*\*

## Transverse Shear Behavior of Thin-Walled Composite Beams Using a Mixed Method

Il-Ju Park, Sung Nam Jung

**Key Words:** Thin-walled composite beam, Transverse shear deformation, Mixed method, Shear flow

### Abstract

In this work, a mixed beam approach is performed to identify the transverse shear behavior of thin-walled composite beams with closed cross-sections. The analytical model includes the effects of elastic couplings, shell wall thickness, and torsion warping. The distributions of shear flow across the section as well as the shear correction coefficients are obtained in a closed form in the beam formulation. The influence of transverse shear deformation on the static behavior of closed cross-section composite beams is also investigated in the analysis

#### 기호설명

$a$	local shell radius of curvature
$l$	length of the blade
$M_{x,x}, M_{s,s}, M_{x,s}$	moment resultants for the shell
$M_y, M_z$	beam bending moments
$M_w$	warping moment
$N_{x,x}, N_{s,s}, N_{x,s}$	membrane stress resultants for the shell segment
$T$	total torque ( $T = T_s + T_w$ )
$T_s$	St. Venant torque
$T_w$	Vlasov torque
$U, V, W$	beam displacements
$u, v, w$	shell displacements
$V_y, V_z$	transverse shear forces
$x, y, z$	undeformed beam coordinates
$x, s, n$	coordinate systems for the shell wall
$\beta_y, \beta_z$	section rotations for the beam

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}$	transverse shear strains for the beam
$\epsilon_{x,x}, \epsilon_{s,s}, \gamma_{x,s}$	membrane strains for the shell
$\kappa_{x,x}, \kappa_{s,s}, \kappa_{x,s}$	curvatures
$\phi$	elastic twist deformation
$( )^T$	transpose of a vector
$( )_{,s}$	partial derivative with $s$
$( )_{,x}$	partial derivative with $x$

### 1. 서론

혼합 보 이론은 기존에 주로 사용되던 강성도 법과 유연도법의 장점을 결합한 것으로서 단면 벽에 대한 전단 흐름 및 전단 응력 등에 관한 표현식들의 직접적인 유도가 가능한 보 이론이다. 또한 임의의 단면을 모델링 하기 위해서 단면에 대한 이산화가 요구되지 않기 때문에 보다 경제적인 보 이론으로 알려져 있다.[1]

최근 Jung 등[2]은 혼합법을 사용하여 탄성 연성 효과 및 비고전적 효과가 고려된 보 이론을 개발하고 이를 통하여 정적 구조해석을 수행하여

\* 전북대학교 기계항공시스템공학부

\*\* 전북대학교 대학원

있다. 복합재료 보의 단면 강성 행렬을 유도하기 위해 Reissner의 반보측 에너지 함수를 이용하여 힘-변위 관계식을 얻었으며 단면의 힘 평형 식들로부터 전단응력 성분들을 구하였다. 또한 MSC/Nastran을 이용한 구조 해석 결과를 이용하여 이중 세포 단면을 포함한 여러 단면 형상에 대한 비교 연구를 수행하였다. Chandra 등[3]은 강성도 법을 이용하여 인장-비틀림 연성을 갖는 이중 세포 복합재료 블레이드의 해석적 및 실험적 연구를 수행하였다. 단면 강성 행렬의 크기는 [9×9]이며, 전단 변형 효과를 기술하기 위해서 전단 변형률의 편미분 형태를 고려하였다.

본 연구에서는 폐쇄형(closed) 단면 형상을 갖는 복합재료 보에 대한 전단변형거동 해석을 수행하였다. 보의 정식화 과정에서 전단흐름(shear flow)과 같은 변수들을 미지수로 기술하며, 따라서 유연도 법에서 얻는 정확도를 추구하는 장점이 있다. 복합재료 보에 대한 정역학적 해석 결과, 전단변형 효과는 복합재료 적층형상의 변화에 따라 상당한 영향을 받음을 확인하였다.

## 2. 운동방정식

Fig. 1에 길이가  $l$  인 폐쇄형 단면형상을 갖는 보의 좌표계 및 변위 성분들을 나타내었다. 보의 벽면은 2차원 각(shell) 요소로 가정하며, 단면 벽의 중심선을 따르는  $s$ -축과 여기에 수직인  $n$ -축을 따라 각 변형 성분  $v_l$ 와  $v_n$ 을 정의한다. 2차원 각 변형 성분은 기하학적 고찰에 의하여 다음과 같이 1차원 보의 변위 및 회전 성분으로 기술할 수 있다. 이 때  $r$ 과  $q$ 는 단면내 임의의 지점에 대한  $s$ - $n$ -축상의 거리를 나타낸다.

$$\begin{aligned} v_l^0 &= Vy_{,s} + Wz_{,s} + \gamma\phi \\ v_n^0 &= Vz_{,s} + Wy_{,s} - q\phi \end{aligned} \quad (1)$$

축방향 인장 변위 성분  $u^0$ 는 전단 변형률의 정의로부터 다음과 같이 유도된다.

$$u^0 = U_{,x} + y\beta_z + z\beta_y - \bar{\omega}\phi_{,x} \quad (2)$$

위 식에서  $\beta_y$ 와  $\beta_z$ 는 각각  $y$ 와  $z$ 축에 대한 단면의 회전을 나타내며,  $\bar{\omega}$ 는 보의 중심축을 기준으로 하는 부채꼴 면적이다. 미소 변형을 가정하면 단면 벽의 변형률-변위 관계식을 구할 수

있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= U_{,x} + z\beta_{y,x} + y\beta_{z,x} - \bar{\omega}\phi_{,xx} \\ \gamma_{xs} &= \gamma_{xy}y_{,s} + \gamma_{xz}z_{,s} = u_{,s}^0 + V_{,x}y_{,s} + W_{,x}z_{,s} + r\phi_{,x} \end{aligned} \quad (3)$$

한편, 2차원 각 요소에 대한 힘 성분들과 이에 대응되는 변형률 성분들에 대한 관계식은 고전적층 이론으로부터 구한다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (4a)$$

이다. 여기에서  $N$ ,  $M$ ,  $\epsilon$  그리고  $\kappa$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \{N\} &= [N_{xx} \ N_{ss} \ N_{xs}]^T \\ \{M\} &= [M_{xx} \ M_{ss} \ M_{xs}]^T \\ \{\epsilon\} &= [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{ss} \ \gamma_{xs}]^T \\ \{\kappa\} &= [\kappa_{xx} \ \kappa_{ss} \ \kappa_{xs}]^T \end{aligned} \quad (4b)$$

위 식에서 원환응력 성분만을 무시하는 가정을 적용하면 식(4)를 사용하기에 보다 편리한 형태인 반역변환 형태로 재구성 할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n\epsilon} & A_{n\kappa} & A_{n\phi} & A_{n\gamma} & A_{n\tau} \\ A_{m\kappa} & A_{m\phi} & A_{m\gamma} & A_{m\tau} \\ A_{n\phi} & A_{m\phi} & A_{\phi\phi} & A_{\phi\gamma} & A_{\phi\tau} \\ -A_{n\gamma} & -A_{m\gamma} & -A_{\phi\gamma} & A_{\gamma\gamma} & A_{\gamma\tau} \\ -A_{n\tau} & -A_{m\tau} & -A_{\phi\tau} & A_{\gamma\tau} & A_{\tau\tau} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \kappa_{xx} \\ N_{xs} \\ M_{ss} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

식(5)와 같은 구성방정식을 재구성함에 있어서 원환응력 및 환주 모멘트 성분들도 모두 무시하게 되면 더욱 간단한 형태의 구성방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n\epsilon} & A_{n\gamma} \\ -A_{n\gamma} & A_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ N_{xs} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

식(5,6)과 같이 반 역변환 형태로 표현된 구성방정식을 고려하기 위하여 Reissner의 반보측 에너지 함수를 도입하여 변분식 형태로 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \int_L \oint [\Phi_R + \gamma_{xs}N_{xs} + \kappa_{ss}M_{ss} \\ + \frac{1}{2}N_{xs}(\gamma_{xs} - u_{,s} - v_{l,s})] ds dx = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기에서 Reissner 범함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi_R = \left( \frac{1}{2}N_{xx}\epsilon_{xx} + M_{xx}\kappa_{xx} + \begin{matrix} M_{xs}\kappa_{xs} - N_{xs}\gamma_{xs} - M_{ss}\kappa_{ss} \end{matrix} \right) \quad (8)$$

식(7)에서 전단 흐름 및 환주 모멘트는 아래와

같이 쓸 수 있다.

$$N_{xs} = N_{xs}^0 - \int_0^s (A_{nc} \epsilon_{xx,x} + A_{nr} \kappa_{xs,s}) ds \quad (9)$$

$$M_{ss} = M_{ss}^0 + y M_{ss}^y + z M_{ss}^z - \int_0^s (-A_{nr} \epsilon_{xx,x} + A_{rr} \kappa_{xs,s}) ds$$

식(7)에서 단면 벽의 연속 조건들을 사용하여 전단 흐름( $N_{xs}$ )과 환주 모멘트 구할 수 있다.

$$\oint u_{,s}^0 ds = 0 \quad (10)$$

식(9)에서  $N_{xs}^0, M_{ss}^0, M_{ss}^y, M_{ss}^z$  는 폐쇄형 단면에서 순환 전단 흐름을 나타내며, 단일 세포에 대해서는 다음과 같이 4개의 미지수로 표현된다.

$$\{n\} = [n^0 \ m^0 \ m^y \ m^z]^T \quad (11)$$

식(9)를 식(11)에 대하여 정리하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\{n\} = [Q]^{-1} ([P] \{\bar{q}_b\} + [R] \{\bar{q}_{b,x}\}) \quad (12)$$

$$= [f] \{\bar{q}_b\} + [B] \{\bar{q}_{b,x}\}$$

식(12)에서  $[B]$ 로부터 전단흐름을 구할 수 있다. 식(12)를 식(7)에 대입하여 정리하면 최종적으로 힘-변위 관계식을 얻을 수 있다.

$$\{F\} = [K] \{q\} \quad (13)$$

여기에서

$$\{F\}^T = [N \ M_y \ M_z \ T_s \ M_w \ Q_z \ Q_y]^T \quad (14)$$

$$\{q\}^T = [U_{,x} \ \beta_{y,x} \ \beta_{z,x} \ \phi_{,x} \ \phi_{,xx} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy}]^T$$

여기서  $Q_y$ 와  $Q_z$ 는 횡전단력이고,  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ 는 횡전단 변형률이다.

### 3. 해석 결과

본 연구에서는 단일 세포 상자형 단면 복합재료 보에 대한 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 보의 형상은 Fig. 1과 같다. 복합재료의 기계적 물성 값은 Table 1에 나타냈다. 보의 모든 단면 벽은  $[\theta/-\theta]$ 로 적층하였으며, 이 경우 인장-비틀림 연성을 갖는다. Fig. 2와 3에 상자형 단면 보에 대한 지선 전단 흐름 및 전단 하중 하에서 전단 흐름의 해석 결과를 도시하였다. 전단 흐름에 대한 표현식은 식(12)에서  $[B]$ 로부터 구할 수 있다. Fig. 2에서  $z$  방향에 대한 지선 전단 흐름 분포의 표현식은 다음과 같다.

$$S_y^1 = \frac{1}{2}(h-s)^2 A_{nc}$$

$$S_y^2 = -h(b-s) A_{nc} \quad (15)$$

$$S_y^3 = -\frac{1}{2}(4bh + h^2 - s^2) A_{nc}$$

$$S_y^4 = -b(b+s) A_{nc}$$

Fig. 3에는 식(15)를 이용하여 얻어진 전단응력의 분포를 도시하였다. Fig. 4는 길이가 각각 10 in 인 보의 치짐을 전단변형의 고려 유무에 따라 서로 비교한 것으로서 단면제원에 비해 길이가 작은 보에서는 전단변형 효과가 결과적인 해의 정확도에 큰 영향을 미칠 수 있음을 보여주고 있다.

### 4. 결론

본 연구에서는 혼합법을 이용하여 폐쇄형 상자형 단면 복합재료 보의 전단변형거동 특성을 해석하였다. 보 해석 모델은 복합재료의 연성, 비틀림 워핑, 곡률효과 등 보의 비고전적 특성을 고려하고 있다. 제안된 보 이론을 통하여 단면내 지선 전단흐름 및 전단력의 분포에 대한 표현식을 유도하고 이를 도식화 하였으며, 유도된 표현식은 기존 연구 결과와 잘 일치하였다. 본 연구를 통하여 혼합보 이론은 전단변형 특성을 매우 효과적으로 고려할 수 있음을 확인하였다.

### 후 기

본 연구는 기계 자동차산업기술교육 혁신사업단 지원으로 학연산공동기술개발사업의 일환으로 수행되었습니다.

### 참고문헌

- (1) 정성남, "전단변형을 고려한 개방형 단면 복합재료 보의 유한요소 구조해석," 한국항공우주학회지, 제29권, 제4호, 2001, pp. 71-77.
- (2) Jung, S. N., and Park, J., "Structural Behavior of Thin- and Thick-Walled Composite Blades with Multicell Sections," *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 3, 2005, pp. 572-581.
- (3) Chandra, R., and Chopra, I., "Structural Behavior of Two-Cell Composite Rotor Blades with Elastic Couplings," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 12, 1992, pp. 2914-2921.

Table 1. Material Properties of AS4/3501-6 Graphite/Epoxy lamina.

Properties	Values
$E_{11}$	$20.59 \times 10^6$ psi
$E_{22}$	$1.42 \times 10^6$ psi
$G_{12}$	$0.89 \times 10^6$ psi
$\nu_{12}$	0.42
$t$	0.005 in

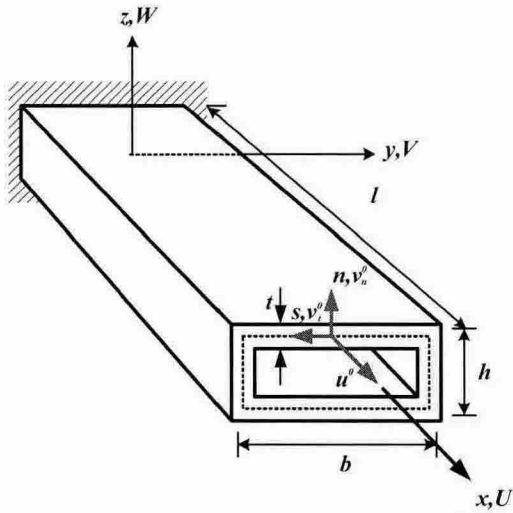


Fig. 1 Geometry and coordinate systems of a beam.

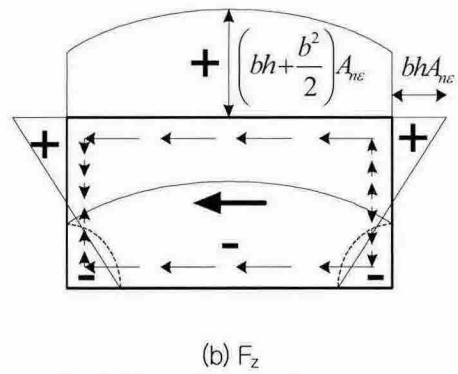
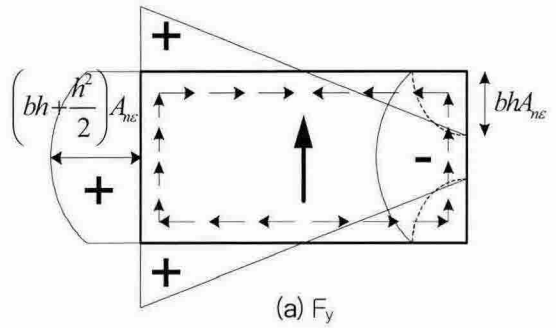


Fig. 3 Flexural shear distributions

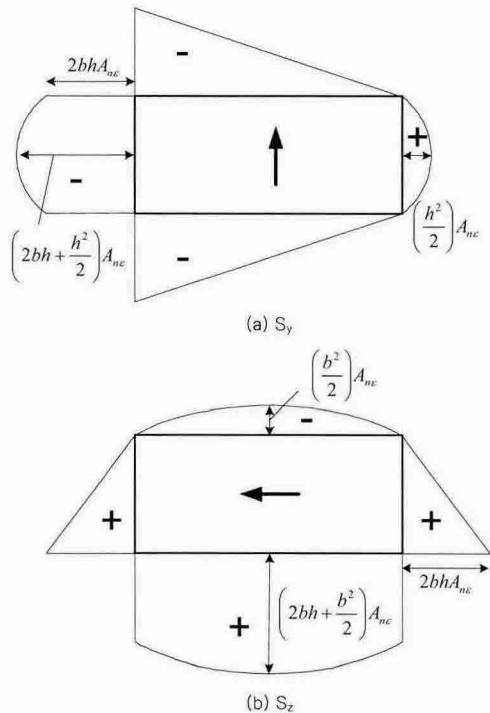


Fig. 2 Branch shear flow distributions.

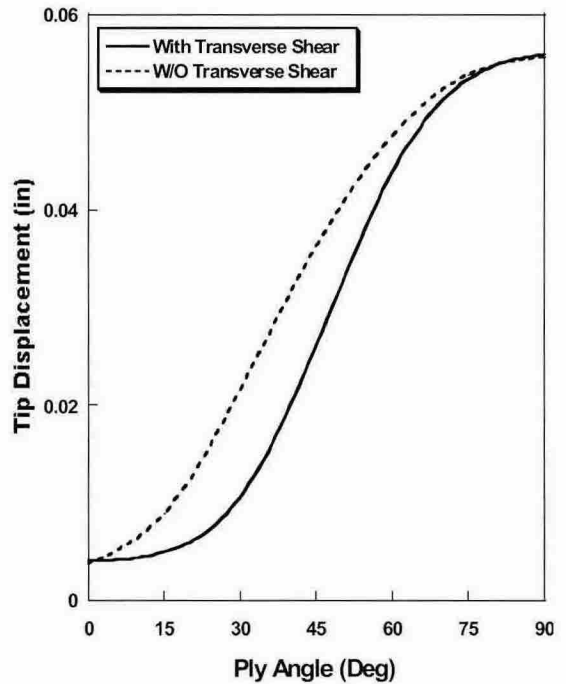


Fig. 4 Effect of transverse shear on tip displacement