

# 비틀림 하중을 받는 두꺼운 복합재료 빔의 거동

박 미 정\*      전 흥 재\*\*      변 준 형\*\*\*

## Behaviors of CAS and CUS Thick-walled Composite I-Beam Under Torsional Load

Park, Mi-Jung\*, Chun, Heoung-Jae\*, Byun, Jun-Hyung\*

**Key Words** : Torsional Behavior, Thick-walled beam, Composite materials

### Abstract

Most of studies on the open section composite beams are confined to the thin composite beams. There are some works focused on the thick composite beams but they are limited only to closed section beams. Therefore, it is required to develop an appropriate model to analyze the thick open section composite beams. In this study, the cantilever beams of two specific lay-up configurations are considered which are the circumferentially asymmetric stiffness (CAS) and circumferentially uniform stiffness (CUS) beams. Under the torsional loading, loading induced deformations are obtained for the thick beams using the suggested model. The model includes coupled stiffness and secondary warping effects. The results are compared with those obtained using thin beam model to observe the thickness effects. Those results are also compared with the finite element analysis results.

### 1. 서 론

복합재료는 단독재료로서는 가질 수 없는 높은 비강성, 비강도 등의 우수한 재료 특성을 가지고 있으므로 산업분야가 다양해지고 경량화를 요구함에 따라 금속재료를 대신하여 많이 사용되어지고 있으며 이러한 복합재료 중 섬유강화 복합재료는 적층판의 두께와 섬유의 각도 그리고 적층 순서를 결정할 수 있는 이방성 재료의 특성을 갖고 있으므로 설계자의 요구조건에 적합한 특성을 갖도록 구조요소를 설계할 수 있는 장점을 가지고 있다. 이러한 적층 복합재료는 주 구조재를 포함하여 산업전반에서 폭 넓게 사용되고 있으며, 현재 1차 구조재로서의 연구가 활

발히 진행되고 있다.<sup>1)</sup> 일찍이 *Bauld* 와 *Tzeng*<sup>2)</sup>은 얇은 개단면 복합재료 빔에 대하여 *Vlasov-type* 이론을 적용하여 복합재료 빔의 거동을 해석하였으며, *Song*과 *Librescu*<sup>3)</sup>은 임의의 단면을 가지는 얇은 폐단면 복합재료 빔에 대한 보완된 이론을 발전시켰다. 또한 두꺼운 폐단면 복합재료 빔에 대하여 *White*와 *Kim*<sup>4)</sup>은 주 뒤틀림 및 변의 뒤틀림 효과를 적용하여 복합재료 빔에 대한 이론을 전개하였으나 아직 두꺼운 개단면 복합재료 빔에 대한 이론의 연구는 미비한 상태이다. 본 연구에서는 대칭 및 반 대칭 적층 빔에 대하여 비틀림 하중을 적용하였을 때의 비틀림 변위를 포함하여 두꺼운 복합재료 빔 이론의 차이를 *ANSYS* 결과와 비교, 고찰하였다.

\* 연세대학교 기계공학과 대학원

\*\* 연세대학교 기계공학부

\*\*\* KIMM(한국기계연구원)

## 2. 두꺼운 복합재료 빔 이론

### 2.1 기본가정

본 연구에서는 다음과 같은 기본가정이 사용되었다.<sup>5)</sup>

- 1) 빔 단면의 등고선은 자신의 면에 대하여 변형하지 않는다.
- 2) 빔 단면의 면의 변위는 단면 좌표계  $y$  와  $z$  의 3차 함수로 표현 되어진다.
- 3) 빔의 각 요소는 두꺼운 *Shell* 의 거동을 가진다.
- 4) 주 뒤틀림과 변의 뒤틀림은 빔에 대하여 유효하다.
- 5) 미소 변형 및 선형탄성 한계 내에서 빔은 거동한다.

### 2.2 변위장 및 변형을

해석 모델의 전개를 위해서 그림 1에서 보는 바와 같이 보의 단면이  $y$  축과  $z$  축 으로 이루어져 있으며,  $x$  축이 빔의 길이 방향인  $(x, y, z)$  직교좌표계와 상호 연관된 두 개의 좌표계와 중간면에 접선방향으로 형성되어 지는  $s$  좌표계와 중간면에 수직방향으로 형성되는  $n$  좌표계를 사용하는  $(x, s, n)$  국부좌표계, 상호 연관된 두 종류의 좌표계가 사용되어 진다.

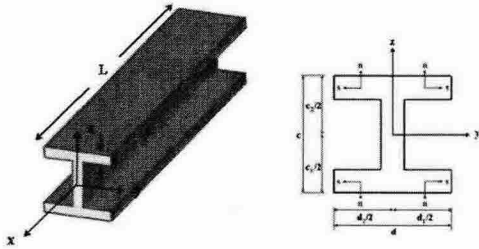


그림 1. 직각 및 국부좌표계

이러한 상호 연관된 좌표계와 가정 1) 과 2)를 이용하여 다음과 같은 일반적인 변위장을 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u(x, s, n) = & u_0(x) - r_y \left[ \phi_y(x) + \frac{4}{3} \left( \frac{r_y}{d} \right)^2 \right. \\
 & \left. (v_0'(x) - \phi_y(x)) \right] \\
 & - r_z \left[ \phi_z(x) + \frac{4}{3} \left( \frac{r_z}{c} \right)^2 \right. \\
 & \left. (v_0'(x) - \phi_z(x)) \right] \\
 & - [\psi_p(s, n) + \psi_s(s, n)] \theta'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_s(x, s, n) = & v_0(x) \frac{dy(s)}{ds} + w_0(x) \frac{dz(s)}{ds} + \theta(x) \\
 & [r_n(s) + n \left( \left( \frac{dz(s)}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2 \right)] \\
 u_n(x, s, n) = & v_0(x) \frac{dz(s)}{ds} - w_0(x) \frac{dy(s)}{ds} \\
 & - \theta(x) r_s(s)
 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $u, u_s, u_n$ 은 각각 단면 중간면 변위의 축방향, 접선방향, 직각방향 변위를 나타내고,  $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 는 각각  $x, y, z$  방향의 중간면에서의 변위를 나타내며,  $\phi_z, \phi_y$ 는 각각  $y$  와  $z$  좌표에 대한 회전각을 나타낸다. 또한  $\psi_p, \psi_s$ 는 각각 주 뒤틀림 함수와 변의 뒤틀림 함수를 나타내고 있으며, 변위장에서 표현된  $r_s, r_n, r_y, r_z$ 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 r_s(s) = & y(s) \frac{dy(s)}{ds} + z(s) \frac{dz(s)}{ds} \\
 r_n(s) = & y(s) \frac{dz(s)}{ds} - z(s) \frac{dy(s)}{ds} \\
 r_y(s) = & y(s) + n \frac{dz(s)}{ds} \\
 r_z(s) = & z(s) - n \frac{dy(s)}{ds}
 \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.3 비틀림 함수

빔의 끝단에 순수 비틀림이 작용한다고 가정할 때 빔의 단면형상의 변화를 포함하는 단면 중간면에서의 변형인 주 뒤틀림 함수를 구하기 위해서 다음과 같이 표현된다.

$$\psi_p = 2 \int_s^{f_1} \frac{c-t}{d} ds + 2 \int_s^{f_2} \frac{c-t}{d} ds \quad (3)$$

빔의 두께 방향 뒤틀림 변형을 나타내는 변의 뒤틀림 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\psi_s = 2 \int_n^{f_1} \frac{d}{c-t} dn + 2 \int_n^{f_2} \frac{d}{c-t} dn \quad (4)$$

### 2.4 응력-변형을 관계

직교 이방성을 갖는 일반적인 복합재료의  $k$  번째 적층판은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{nn} \\ \tau_{sn} \\ \tau_{nx} \\ \tau_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{nx} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$\bar{Q}_{ij}$ 는 축소된 변형강성을 나타낸다.<sup>5)</sup>

여기서 응력 성분  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{ss}$ ,  $\tau_{sn}$ 은 면외응력 성분으로서 이외의 응력 성분에 비하여 무시할 만큼 작다. 그런데 그에 따르는 변형을 성분인  $\varepsilon_{nn}$ ,  $\varepsilon_{ss}$ ,  $\gamma_{sn}$ 은 빔의 두께가 증가 함에 따라 무시할 수 없는 항이 된다. 따라서,  $\varepsilon_{nn}$ ,  $\varepsilon_{ss}$ ,  $\gamma_{sn}$ 의 변형을 성분들  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\gamma_{xs}$ ,  $\gamma_{nx}$ 의 항으로 나타내면 다음과 같이 표현되어 진다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= B_1 \varepsilon_{xx} + B_2 \gamma_{xs} \\ \varepsilon_{nn} &= B_3 \varepsilon_{xx} + B_4 \gamma_{xs} \\ \gamma_{sn} &= B_5 \gamma_{nx} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ ,  $B_5$ 는 다음과 같이 나타내고,

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\bar{Q}_{13}\bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{33}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\ B_2 &= \frac{\bar{Q}_{23}\bar{Q}_{36} - \bar{Q}_{26}\bar{Q}_{33}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\ B_3 &= \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{13}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\ B_4 &= \frac{\bar{Q}_{26}\bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{36}}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\ B_5 &= -\frac{\bar{Q}_{45}}{\bar{Q}_{44}} \end{aligned} \quad (7)$$

$k$  번째 적층에 대한 3차원 탄성 효과를 가지는 축소된 구성방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xs} \\ \tau_{nx} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{nx} \end{Bmatrix}_k \quad (8)$$

## 2.5 채널빔의 힘-변위 관계식

응력 변형을 관계를 응력 변위 관계에 치환시키고 적교 좌표계를 국부좌표계에 따라 적분을 실시하면 다음과 같은 평형방정식이 표현되어 진다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_s \int_n \sigma_{xx} dnds \\ V_y(x) &= \int_s \int_n (\tau_{xs} \frac{d\bar{y}}{ds} + \tau_{xn} \frac{d\bar{z}}{ds}) dnds \\ V_z(x) &= \int_s \int_n (\tau_{xs} \frac{d\bar{z}}{ds} - \tau_{xn} \frac{d\bar{y}}{ds}) dnds \\ T_s(x) &= \int_s \int_n 2n\tau_{xs} dnds \\ M_y(x) &= - \int_s \int_n \sigma_{xx} r_z dnds \\ M_z(x) &= - \int_s \int_n \sigma_{xx} r_y dnds \\ M_w(x) &= - \int_s \int_n \Psi \sigma_{xx} dnds \end{aligned} \quad (9)$$

대칭으로 적층된 복합재료 빔의 경우 구조적 연성효과들이 발생하며, 탄성적으로 연계되어지는 항이 빔의 끝단에 축 방향 하중을 작용하였을 경우 힘-비틀림 연계강성이 존재하여 힘-변위 관계식에 따르는 강성행렬 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ T(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} \\ K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & 0 \\ K_{64} & 0 & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_0(x) \\ v'_0(x) - \phi_y(x) \\ w'_0(x) - \phi_z(x) \\ \theta'(x) \\ \phi'_z(x) \\ \phi'_y(x) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

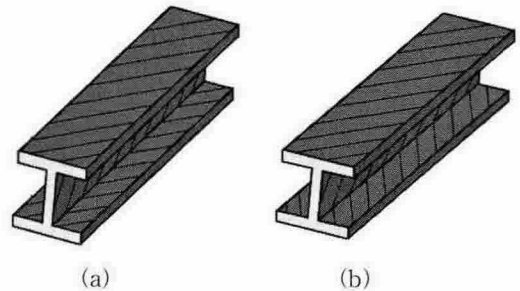


그림 2. (a) CAS 채널 빔 (b) CUS 채널 빔

반 대칭으로 적층된 복합재료 빔의 경우 빔의 끝단에 축 방향 하중을 작용하였을 때 인장-비틀림 연계강성이 존재하게 되므로, 힘-변위 관계식에 따르는 강성행렬 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F(x) \\ T(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{14} \\ K_{14} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_0(x) \\ \theta'_0(x) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & 0 & 0 & K_{25} \\ 0 & K_{33} & K_{36} & 0 \\ 0 & K_{63} & K_{66} & 0 \\ K_{52} & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_0(x) - \phi_y(x) \\ w'_0(x) - \phi_z(x) \\ \phi'_y \\ \phi'_z \end{Bmatrix} \quad (11)$$

### 3. 결과 및 고찰

두꺼운 복합재료 I-빔의 거동에 관한 해석을 수행하기 위하여 복합재료는 S-Glass Epoxy를 사용하였으며, 사용된 복합재료의 물성치는 표 1과 같다. 높이 60 mm, 폭 60 mm, 길이 1000 mm 인 빔에 비틀림 하중 1kN · mm 을 적용하였다.

표 1. 재료의 기계적 물성치

Properties	Value
$E_{11}$ (Longitudinal Modulus)	43 GPa
$E_{22} = E_{33}$ (Transverse Modulus)	8.9 GPa
$G_{12} = G_{13}$ (In-Plane Shear Modulus)	4.5 GPa
$G_{23}$ (Out-of-Plane Shear Modulus)	3.3 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$ (Poisson's Ratio)	0.27
$\nu_{23}$ (Poisson's Ratio)	0.35

비틀림 하중을 작용하였을 때, 두꺼운 복합재료 빔 이론과 유효요소 해석 결과를 비교하여 나타낸 것이다.

동방성 재료로 구성 되어지는 빔 구조물은 재료의 특성상 비틀림 하중을 작용하였을 때 탄성 구조적인 연성향이 발생하지 않으나, 복합재료로 구성되어 지는 빔 구조물은 재료의 이방성 특성을 나타내게 되므로 탄성 구조적인 연성향이 발생하게 된다. 해석하는 모델은 복합재료 빔 구조물의 경우 비틀림 하중을 작용하였을 경우 비틀림에 따르는 변위를 결정할 수 있다.

그림 3은 두께가 3 mm 인 대칭으로 적층된 복합재료 빔에 비틀림 하중을 작용하였을 때의 비틀림 결과와 연성된 변위 결과이고, 그림 4는 두께 9mm 인 빔에 비틀림 하중을 작용하였을 경우 비틀림에 따르는 변위 결과이다.

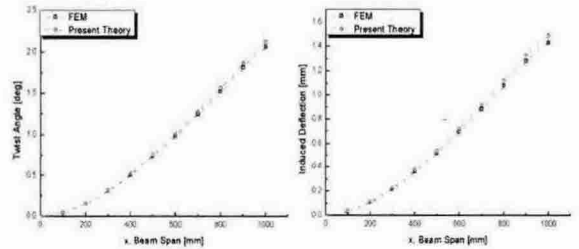


그림 3. CAS 채널 빔에 비틀림 하중에 대한 결과 : (a) 비틀림 각 (b) 연성에 따른 변위

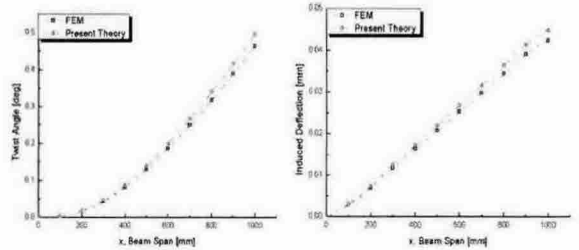


그림 4. CAS 채널 빔에 비틀림 하중에 대한 결과 : (a) 비틀림 각 (b) 연성에 따른 변위

또한 그림 5는 두께가 3mm 인 반 대칭으로 적층된 복합재료 빔 비틀림 하중을 작용하였을 때의 비틀림각 결과이며, 그림 6은 두께 9mm 인 빔에 비틀림 하중을 작용 하였을 경우 비틀림에 따르는 횡방향 변위 결과이다.

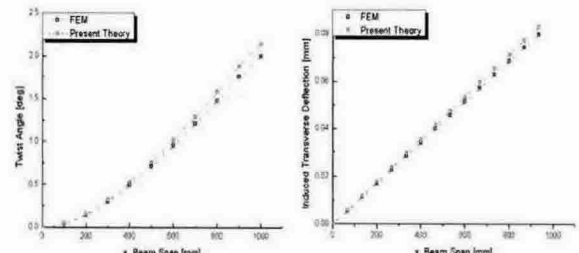


그림 5. CUS 채널 빔에 비틀림 하중에 대한 결과 : (a) 비틀림 각 (b) 연성에 따른 횡단방향 변위

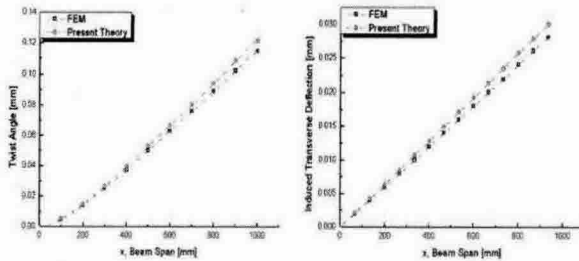


그림 5. CUS 채널 빔에 비틀림 하중에 대한 결과  
: (a) 비틀림 각 (b) 연성에 따른 횡단방향 변위

두께 3 mm에서는 두꺼운 복합재료 빔 이론에 의한 비틀림 거동의 결과가 유한 요소 해석에 의한 결과와 3%~5%의 차이가 남을 알 수 있다. 또한, 두께 9 mm에서는 두꺼운 복합재료 빔 이론에 의한 결과는 유한 요소 해석에 의한 결과와 5%~9%의 차이가 남을 알 수 있다.

CAS와 CUS 복합재료 빔에 비틀림 하중이 작용하였을 때, 각각의 두께에 대하여 유한 요소 해석에 의한 결과와 두꺼운 복합재료 빔 이론에 의한 결과는 10% 이내의 차이가 남을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 상부 플랜지와 하부 플랜지에  $[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ]_{sm}$ 의 적층순서를 가지는 복합재료 빔(CAS)과 상부 플랜지에는  $[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ]_{sm}$ , 하부 플랜지에는  $[0^\circ/-45^\circ/-90^\circ/45^\circ]_{sm}$ 의 적층순서를 가지는 복합재료 빔(CUS)에 대하여 두께를 증가시키면서 두꺼운 복합재료 빔 이론을 적용하여 비틀림 하중에 대한 빔의 거동에 관한 예측을 유한 요소 해석에 의한 결과와 비교하였다.

두께 3 mm에서는 두꺼운 복합재료 빔 이론에 의한 비틀림 거동의 결과가 유한 요소 해석에 의한 결과와 3%~5%의 차이가 남을 알 수 있다. 또한, 두께 9 mm에서는 두꺼운 복합재료 빔 이론에 의한 결과는 유한 요소 해석에 의한 결과와 5%~9%의 차이가 남을 알 수 있다.

CAS와 CUS 복합재료 빔에 비틀림 하중이 작용하였을 때, 각각의 두께에 대하여 유한 요소 해석에 의한 결과와 두꺼운 복합재료 빔 이론에 의한 결과는 10% 이내의 차이를 보임을 알 수 있다. 빔의 두께와 상관 없이 두꺼운 복합재료 빔 이론을 사용하게 되면 3차원 탄성 효과와 주

뒤틀림 및 변위 뒤틀림 함수, 빔의 두께와 단면에 대한 전단 변형을 고려 하였기 때문에 좀 더 정확한 결과를 얻을 수 있다.

#### 후기

본 연구는 차세대 프론티어 연구사업 차세대 소재성형 기술개발사업의 연구비 지원으로 이루어 졌습니다. 이에 깊은 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) I. M. Daniel, Ori Ishai. Engineering mechanics of composite materials. Oxford University Press.1994
- (2) N. R. Bauld, L. S. Tzeng, A Valsov theory for fiber reinforced beams with thin walled open cross sections, Int. J. Solid struct., Vol 20, 1984, pp. 227-297
- (3) Song, O. Librescu, L., Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed section contour, J. Sound Vibration, Vol.167, No.1, 1993,pp.129-147
- (4) C. Kim, S.R. White, Thick-walled composite beam theory including 3-D elastic effects and torsional warping, Int. J. Solid struct., Vol 34, 1997, pp. 4237-4259
- (5) C. Kim, S.R. White, Analysis of thick hollow composite beams under general loading, Composite structures, Vol 34, 1996, pp.263-277