

# Jang and Choi's Model과 다양한 점성계수 모델을 이용한 나노유체에서의 자연대류 특성

황 교 식, 장 석 필<sup>†</sup>

한국항공대학교 항공우주 및 기계공학과 대학원, <sup>†</sup> 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부

## Natural Convection of Nanofluids Using Jang and Choi's Model for Effective Thermal Conductivity and Various Models for Effective Viscosity

Kyo Sik Hwang, Seok Pil Jang<sup>†</sup>

**ABSTRACT:** In this paper, the thermal characteristics of natural convection in a rectangular cavity with nanofluids such as water-based nanofluids containing alumina are theoretically investigated with a new model of the thermal conductivity for nanofluids presented by Jang and Choi and various models for effective viscosity. In addition, based on theoretical results, the effects of various parameters such as the volume fraction, the temperature, and the size of nanoparticles on free convective instability and heat transfer characteristics in a rectangular cavity with nanofluids are suggested.

**Key words:** Nanofluids(나노유체), Viscosity(점성), Convective instability(대류 불안정성), Heat transfer coefficient(열전달 계수)

### 기 호 설 명

- $C_p$  : 비열 [kJ/kgK]
- $C_{R,M}$  : 나노입자의 임의의 속도 [m/s]
- $d$  : 등가지름 [m]
- $D$  : 관의 직경 [m]
- $D_C$  : 특성길이 [m]
- $D_o$  : Einstein Diffusion 계수 [m<sup>2</sup>/s]
- $f$  : 부피비
- $g$  : 중력 가속도 [m/s<sup>2</sup>]
- $H$  : 직사각형 공동의 높이 [m]
- $k$  : 열전도도 [W/mK]
- $k_b$  : Boltzmann 상수 [J/K]
- $l$  : 평균 자유 경로 [m]
- $Nu$  : Nusselt 수,  $hH/k_f$
- $P$  : 압력 [N/m<sup>2</sup>]

- $Pr$  : Prandtl 수,  $\nu/\alpha$
- $Ra$  : Rayleigh 수,  $\frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu}$
- $T$  : 온도 [K]

### 그리스 문자

- $\beta$  : 부피 열팽창 계수
- $\kappa$  : Kapitza 저항
- $\mu$  : 점성계수
- $\nu$  : 동점성 계수
- $\rho$  : 밀도

### 하첨자

- $f$  : 일반유체
- $nano$  : 나노유체

<sup>†</sup> Corresponding author  
Tel.: +82-2-300-0112; fax: +82-2-3158-2191  
E-mail address: spjang@hau.ac.kr

## 1. 서론

미국 Argonne National Lab.의 Dr. Choi는 열전도도가 일반유체보다 우수한 나노유체를 개발함으로써 차세대 냉각장치에 사용될 수 있는 냉각 유체 개발에 새로운 방향을 제시하였다. 여기서, 나노유체란, 10 ~ 50nm 입자 크기를 가지는 나노입자를 유체 속에 균일하게 분산, 부유시킨 유체며, 많은 과학자들이 산화구리, 알루미늄, 구리 그리고 탄소나노튜브와 같은 다양한 나노입자를 사용하여 나노 유체를 제작하였다. 최근 나노유체의 자연 대류 열전달 특성<sup>(1, 2)</sup>에 관하여 실험적으로 연구가 이루어져 왔으며, 자연 대류시 나노유체의 Nusselt 수가 일반유체의 Nusselt 수보다 작아짐을 보여주었다. 그리고 이론적인 연구에 있어서 Kim et al.<sup>(3)</sup>은 나노유체의 자연 대류 불안정성에 대해 다음과 같은 두 가지 모델을 이용하여 이론적인 분석을 하였다. 나노유체의 유효 점성계수 모델은 Einstein 모델<sup>(4)</sup>과 Brinkman 모델<sup>(5)</sup> 그리고 나노유체의 유효 열전도도 모델은 Hamilton and Crosser 모델<sup>(6)</sup>과 Bruggeman 모델<sup>(7)</sup>을 사용하였다. 그러나 유효 점성계수 모델인 Einstein 모델<sup>(4)</sup>과 Brinkman 모델<sup>(5)</sup>은 나노유체의 유효 점성 계수를 잘 예측하지 못한다고 보고되어 있다<sup>(8)</sup>. 또한, Kim et al.<sup>(3)</sup> 등이 사용한 나노유체의 유효 열전도도 모델은 기존 나노유체의 온도에 따른 열전도도 상승 현상과 나노입자가 작아지면 열전도도가 증가하는 현상을 예측하지 못하는 모델이다. 따라서 본 연구에서는 기존의 나노유체 유효 점성 모델인 Einstein 모델<sup>(4)</sup>, Brinkman 모델<sup>(5)</sup>, Brownian Motion Effect 모델<sup>(9)</sup>, 그리고 실험적인 결과를 바탕으로 만든 Pak and Cho 모델<sup>(10)</sup>들을 사용하여 나노유체의 유효 점성을 예측하고, 나노유체의 열적 현상들을 설명할 수 있는 유효 열전도도 모델인 Jang and Choi 모델<sup>(11)</sup>을 사용하여 나노유체의 자연 대류 특성을 이론적으로 분석하고자 한다.

본 연구 대상인 Fig. 1은 아래면이 가열되는 직사각형 공동에서 나노유체의 자연 대류를 보여주고 있으며, 부피비, 온도 그리고 나노입자의 크기와 같은 다양한 변수에 대한 직사각형 공동에서 나노유체의 자연 대류 불안정성과 열전달 특성을 조사하고자 한다. 본 연구에서 사용된 나노

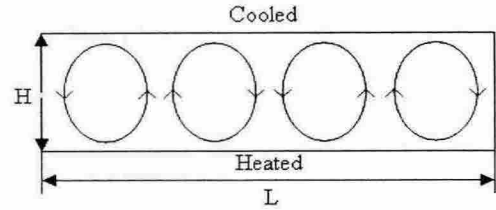


Fig. 1 Free Convection (Benard Convection) in a Rectangular Cavity

유체는 현재 나노 유체로 가장 간편하게 제작할 수 있는 Water + Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>을 사용하였다.

## 2. 자연 대류 불안정성

아래면이 가열되는 수평공동은 많은 연구자들<sup>(12-13)</sup>에 의해서 고려되었다. 가장 중요한 매개 변수인 Rayleigh 수는 유체에서 점성력에 대한 부력비에 의해 측정되는 것으로 알려졌다. 경계 면에서 표면 장력과 관계되는 Marangoni 효과<sup>(14)</sup>와 온도 구배와 질량농도 구배 사이의 커플링 효과를 나타내는 Soret 효과<sup>(15)</sup>가 없는 경우에, Fig. 1에서 보이는 직사각형 공동(L/H>>1)에서 Rayleigh 수의 임계값은 다음 식에 의해 주어진다.

$$Ra_{H,C} = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu} = \frac{g\beta\Delta TH^3}{k_f\nu} \rho C_p = 1708 \quad (1)$$

여기서,  $C_p$ ,  $g$ ,  $k_f$ ,  $\beta$ ,  $\nu$ , 그리고  $\rho$ 는 각각 비열, 중력가속도, 유체의 열전도도, 부피 열팽창 계수, 동점성계수 그리고 밀도이다. Rayleigh 수가 일반유체에서  $Ra_{H,C} = 1708$ 의 임계값을 가질 때 부력은 점성력에 의해 부과된 저항을 극복할 수 있다. 그때 공동내에서 자연 대류가 일어난다<sup>(16)</sup>. 식 (1)을 기반으로, 직사각형 공동에서 Water + Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 나노유체의 Rayleigh 수 임계값을 평가할 수 있다.

$$Ra_{H,nano} = Ra_H \frac{k_f}{k_{nano}} \frac{C_{p,nano}}{C_{p,f}} \frac{\mu_f}{\mu_{nano}} \left( \frac{\rho_{nano}}{\rho_f} \right)^2 \frac{\beta_{nano}}{\beta_f} > 1708 \quad (2)$$

여기서,  $k_{nano}$ ,  $C_{P,nano}$ ,  $\mu_{nano}$ ,  $\rho_{nano}$  그리고  $\beta_{nano}$  는 각각 나노유체의 유효 열전도도, 비열, 점성계수, 밀도 그리고 부피 열팽창 계수이다.

나노유체의 Rayleigh 수를 평가하기 위하여, 우리는 나노유체와 일반유체 사이의 열전도도, 비열, 점성계수, 밀도, 그리고 부피 열팽창 계수의 상관성이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 모델들을 사용하였다.

## 2.1 열전도도비

나노 유체의 유효 열전도도 모델은 나노 유체의 열적 특성을 잘 예측하는 Jang and Choi 모델<sup>(11)</sup>을 사용하였다.

$$\frac{k_{nano}}{k_f} = (1-f) + K_{kapitza} \frac{k_{particle}}{k_f} + C_1 \frac{3d_{BF}}{d_{nano}} Re_{d,nano}^2 Pr_f f \quad (3)$$

## 2.2 점성비

나노 유체의 유효 점성계수를 예측하는데 사용되는 모델은 다음의 4가지이다.

Einstein Model<sup>(4)</sup>

$$\frac{\mu_{nano}}{\mu_f} = (1 + 2.5f) \quad \text{for } f < 0.05 \quad (4)$$

Brinkman Model<sup>(5)</sup>

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_f} = \frac{1}{(1-f)^{2.5}} \quad (5)$$

Brownian Motion Effect Model<sup>(9)</sup>

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_f} = 1 + 2.5f + (5.2 + 0.97)f^2 \quad (6)$$

Pak and Cho Model<sup>(10)</sup>

$$\frac{\mu_{nano}}{\mu_f} = 1 + 39.11f + 533.9f^2 \quad (7)$$

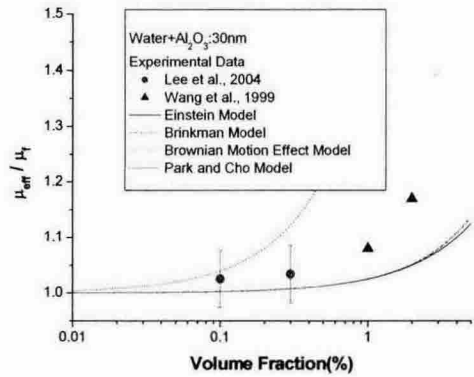


Fig. 2 Comparison Experimental Data with Theoretical Model on the effective viscosity.

알루미늄 나노유체의 점성계수에 대해 위의 모델 결과들과 실험 결과들을 Fig. 2에서 비교해 보았다. Fig. 2에 의하면 세 가지 모델인, Einstein 모델<sup>(4)</sup>, Brinkman 모델<sup>(5)</sup>, Brownian Motion Effect 모델<sup>(9)</sup>들은 결과가 거의 비슷하게 나오지만 Pak and Cho 모델<sup>(10)</sup>은 세 가지 모델에 비해서 실험 결과보다 상대적으로 큰 결과를 보여준다. 따라서 본 연구에서는 동일한 결과를 보여주는 세 가지 모델 중 Einstein 모델<sup>(4)</sup>과 다른 결과를 보여주는 Park and Cho 모델<sup>(10)</sup>을 사용한다.

## 2.3 비열비, 밀도비, 부피 열팽창 계수비

비열비, 밀도비, 부피 열팽창 계수비<sup>(3)</sup>는 모두 Mixing Theory<sup>(17)</sup>를 사용하여 예측하였다.

$$\frac{C_{P,nano}}{C_{P,f}} = (1-f) + f \frac{C_{P,particle}}{C_{P,f}} \quad (8)$$

$$\frac{\rho_{nano}}{\rho_f} = (1-f) + f \frac{\rho_{particle}}{\rho_f} \quad (9)$$

$$\frac{\beta_{nano}}{\beta_f} = 1 - f \quad (10)$$

식 (2-10)을 기반으로, 나노유체에 대한 일반유체의 Rayleigh 수비는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{Ra_{H,nano}}{Ra_H} &= \frac{k_f}{k_{nano}} \frac{C_{P,nano}}{C_{P,f}} \frac{\mu_f}{\mu_{nano}} \left( \frac{\rho_{nano}}{\rho_f} \right)^2 \frac{\beta_{nano}}{\beta_f} \\ &= \left[ (1-f) + K_{kapitza} \frac{k_{particle}}{k_f} + C_1 \frac{3d_{BF}}{d_{nano}} Re_{nano}^2 Pr_{f,f} \right]^{-1} \\ &\quad \left[ (1-f) + f \frac{C_{P,particle}}{C_{P,f}} \right] \left[ (1-f) + f \frac{\rho_{particle}}{\rho_f} \right]^2 (1-f) \\ &\quad \left[ \frac{\mu_{nano}}{\mu_f} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에 다양한 점성계수 모델을 대입하여, 직사각형 공동에서 부피비, 온도, 그리고 나노입자의 크기가 Rayleigh 수비에 끼치는 현상을 이론적으로 연구했다. 상관관계식 (11)을 사용하여, 직사각형 공동에서 나노유체의 자연 대류 열전달 특성은 다음과 같이 분석 된다. 일반유체에서, Globe and Dropkin<sup>(18)</sup>는 아래면이 가열되는 수평 공동에서 자연 대류 계수를 제안 했다.

$$\begin{aligned} Nu_f &= \frac{\bar{h}_f H}{k_f} = 0.069 Ra_H^{1/3} Pr_f^{0.074} \\ 3 \times 10^5 &< Ra_H < 7 \times 10^9 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\bar{h}_f$ 와  $Pr_f$ 는 각각 열전달 계수와 Prandtl 수이다. 식 (12)를 근거로 우리는 직사각형 공동에서 나노유체의 자연대류 Nusselt 수를 평가할 수 있다.

$$Nu_{nano} = \frac{\bar{h}_{nano} H}{k_{nano}} = 0.069 Ra_{H,nano}^{1/3} Pr_{f,nano}^{0.074} \quad (13)$$

여기서  $\bar{h}_{f,nano}$ 와  $Pr_{f,nano}$ 는 각각 나노유체의 열전달 계수와 Prandtl 수이다. 식 (12-13)을 이용해, 나노유체와 일반유체의 직사각형 공동에서 자연 대류의 열전달 계수비를 이론적으로 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{h}_{nano}}{\bar{h}_f} &= \frac{Nu_{nano}}{Nu_f} \frac{k_{nano}}{k_f} \\ &= \frac{k_{nano}}{k_f} \left( \frac{Ra_{H,nano}}{Ra_H} \right)^{1/3} \left( \frac{Pr_{nano}}{Pr_f} \right)^{0.074} \\ &= \left( \frac{k_{nano}}{k_f} \right)^{0.593} \left( \frac{C_{P,nano}}{C_{P,f}} \right)^{0.407} \\ &\quad \left( \frac{\mu_{nano}}{\mu_f} \right)^{-0.259} \left( \frac{\rho_{nano}}{\rho_f} \right)^{2/3} \left( \frac{\beta_{nano}}{\beta_f} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)를 근거로, 직사각형 공동에서 부피비, 온도, 그리고 나노입자의 크기가 자연 대류 특성에 끼치는 현상을 이론적으로 연구했다.

### 3. 결과 및 토의

#### 3.1 직사각형 공동에서 나노유체와 일반유체의 자연대류 Rayleigh 수비

식 (11)을 이용하여, 나노유체와 일반유체의 Rayleigh 수비를 부피비, 나노입자의 크기, 온도에 따른 효과로 평가한다.

Fig. 3은 나노입자의 부피비가 증가할 때, 나노유체와 일반유체의 Rayleigh 수비의 변화를 보여준다. 알루미늄을 물속에 첨가한 나노유체는 나노입자의 부피비가 커질수록 Rayleigh 수비가 감소하므로 일반유체보다 더 자연 대류가 잘 발생하지 않는다. Einstein 모델<sup>(4)</sup>은 상대적으로 낮은 점성계수비를 갖고, Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>은 높은 점성계수비를 갖기 때문에 Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>이 Einstein 모델<sup>(4)</sup>보다 동일 부피비에서 Rayleigh 수가 더 작게 예측하며 또한 자연대류가 잘 일어나지 않는 것으로 예측된다.

Fig. 4는 나노입자의 크기가 증가할 때, 나노유체와 일반유체의 Rayleigh 수비가 증가하는 것을 보여준다. 이는 Einstein 모델<sup>(4)</sup>과 Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>은 나노입자의 크기에 아무런 영향을 줄 수 없으며, 다만 열전도도비만이 나노 입자의 크기가 증가할수록 작아지기 때문에 식 (11)에 의해서 나노입자가 커질수록 나노유체와 일반유체의 Rayleigh 수비가 증가함을 알 수 있다.

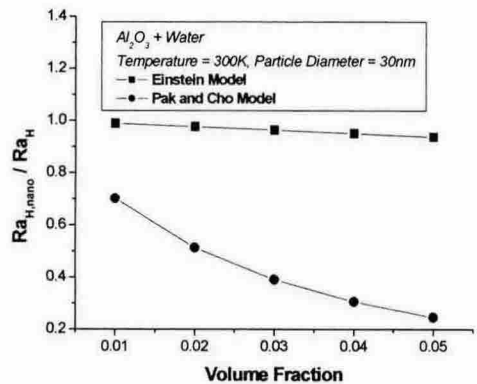


Fig. 3 Effect of volume fraction on the ratio of the Rayleigh number

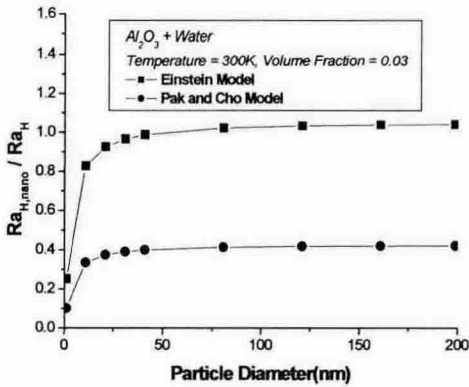


Fig. 4 Effect of size of nanoparticles on the ratio of the Rayleigh number

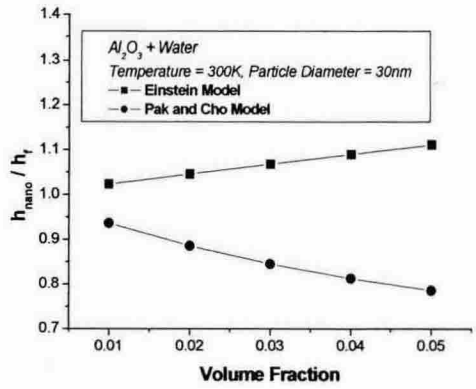


Fig. 6 Effect of volume fraction on the ratio of the heat transfer coefficient

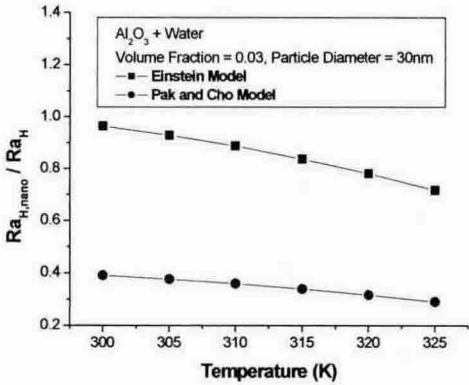


Fig. 5 Effect of temperature on the ratio of the Rayleigh number

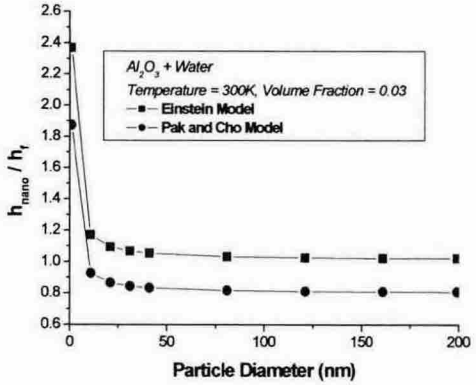


Fig. 7 Effect of size of nanoparticles on the ratio of the heat transfer coefficient

Fig. 5는 나노유체의 온도가 증가할 때, 나노유체에 대한 일반유체의 Rayleigh 수비가 감소하는 것을 보여준다. 나노유체의 열전도도는 온도가 증가함에 따라서 Jang and Choi 모델<sup>(11)</sup>에 의해 증가하기 때문에 부력에 비해 점성력이 상대적으로 증가하게 된다. 따라서 온도가 증가할 때, 나노유체에 대한 일반유체의 Rayleigh 수비는 작아지고 나노유체는 일반유체보다 더 잘 자연대류가 발생하지 않는다.

#### 4.2 직사각형 공동에서 나노유체와 일반유체의 자연대류 열전달 계수비

식 (14)를 이용하여, 나노유체와 일반유체의 자연대류 열전달 계수비를 부피비, 온도, 나노입자의 크

기에 따른 효과로 평가한다.

Fig. 6은 나노입자의 부피비가 증가할 때, 나노유체와 일반유체의 자연 대류 열전달 계수비를 보여준다. Einstein 모델<sup>(4)</sup>은 낮은 점성계수비를 갖기 때문에 자연 대류 열전달 계수비에 큰 영향을 주지 못하고 열전도도 비에 따라서 증가하게 된다. 그러나 Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>은 상대적으로 큰 점성계수비를 갖기 때문에 식 (14)에서 점성의 영향이 지배적이고, 자연 대류 열전달 계수비가 감소하는 것을 보인다.

Fig. 7은 나노입자의 크기가 증가할 때, 나노유체와 일반유체의 자연 대류 열전달 계수비가 감소하는 것을 보여준다. 이는 Einstein 모델<sup>(4)</sup>과 Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>은 나노입자의 크기에 아무런 영향을 줄 수 없고, 나노입자의 크기가 감소

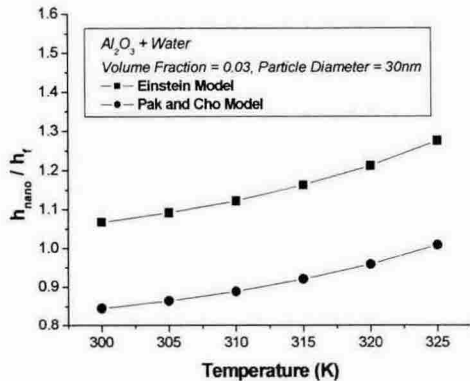


Fig. 8 Effect of temperature on the ratio of the heat transfer coefficient

함에 따라 열전도도비가 증가<sup>(11)</sup>하기 때문에 자연 대류 열전달 계수비는 증가하게 된다.

Fig. 8은 나노유체의 온도가 증가할 때, 나노유체와 일반유체의 자연 대류 열전달 계수비가 증가하는 것을 보여준다. 나노유체의 열전도도는 온도가 증가함에 따라서 열전도도비가 증가<sup>(11)</sup>하기 때문에 자연 대류 열전달 계수비는 증가하게 된다.

Einstein 모델은 나노유체의 자연 대류 열전달 계수가 항상 일반유체보다 큰 반면에, Pak and Cho 모델은 식 (14)의 다른 항에 비해 상대적으로 크기 때문에 나노유체가 일반유체보다 자연 대류 열전달이 잘 일어나지 않는 것을 알 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서, 아래면이 가열되는 직사각형 공동에서 알루미늄 나노입자로 포함한 나노유체의 자연 대류 열적 특성을 기존의 나노유체 유효 점성 모델인 Einstein 모델<sup>(4)</sup>과 Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>들을 사용하여 나노유체의 유효 점성을 예측하였고, 나노유체의 열적 현상을 설명할 수 있는 유효 열전도도 모델인 Jang and Choi 모델<sup>(11)</sup>을 사용하여 나노유체의 자연 대류 열전달 특성을 이론적으로 분석하였다.

Einstein 모델<sup>(4)</sup>은 Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>에 비해 상대적으로 낮은 점성계수비를 갖기 때문에, 동일 조건에서 Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>보다

Rayleigh 수가 더 크게 예측된다. 또, Einstein 모델<sup>(4)</sup>은 나노유체의 자연 대류 열전달이 일반유체보다 더 잘 일어나는 것으로 예측되어지는 반면에, Pak and Cho 모델<sup>(9)</sup>은 상대적으로 높은 점성계수비를 갖기 때문에 나노유체가 일반유체보다 자연 대류 열전달이 잘 일어나지 않는 것을 알 수 있다. 이처럼 두 모델은 유효 점성의 차이가 크기 때문에 각각 서로 다른 결과들을 예측하고 있다. 따라서 나노유체의 정확한 유효 점성계수를 예측하기 위해서는 차후에 직사각형 공동에서의 자연 대류 실험을 통해 알아 볼 계획이다.

## 후 기

이 논문은 2004년 한국항공대학교 교비 지원 연구비에 의하여 지원된 연구 결과이며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Putra, N., Roetzel, W. and Das, S. K., 2003, Natural Convection of nano-fluids, Heat and Mass Transfer, Vol. 39, pp. 775-784
2. Das, S.K., Putra, N., and Roetzel, 2003, Pooling boiling characteristics of nano-fluids, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 46, pp. 851-861
3. Kim, J., Kang Y. T. and Choi, C. K., 2003, Analysis of convective instability and heat transfer characteristics of nanofluids, Phys. Fluids, Vol. 16, pp. 256-262
4. Einstein, A., 1956, "Investigation on the theory of Brownian motion", Dover, New York.
5. Xuan, Y and Roetzel, 2000, Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids, Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 43, pp. 3701-3707
6. Hamilton, R. L., Crosser, O. K., 1962, Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems, I&EC Fundamentals, Vol. 1
7. Wang, B. -X., Zhou, L. -R., Peng, X. -F., 2003, A fractal model for predicting the

- effective thermal conductivity of liquid with suspension of nanoparticles, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 2665-2672
8. Lee, J. H., Hwang, K. S. and Jang, S. P., 2005, Fluid Flow Characteristics for Nanofluids, *Trans. KSME*, 2005 Spring Annual Conference., pp. 2394-2398.
  9. Davalos-Orozco, 2005, Hydrodynamic behavior of suspension of polar particles, *Encyclopedia of surface and colloid science*, Vol. 4, pp. 2375-2396
  10. Pak, B. C., and Y. Cho, 1998, Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particle, *Experimental Heat Transfer*, Vol. 11, pp. 151-170
  11. Jang, S.P. and Choi, S.U.S., 2004, The role of Brownian motion in the enhanced thermal conductivity of nanofluids, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 84, pp.4316-4318
  12. Ostrach, S., 1972, Natural convection in Enclosures, in J.P. Hartnett and T.F. Irvine, Eds. *Advanced in Heat Transfer* 8, Academic Press, New York, pp. 161-227
  13. Catton, I., 1978, Natural convection in Enclosures, *Proc. 6<sup>th</sup> Int. Heat Transfer Conf. Toronto Canada*, Vol. 6, pp. 13-31
  14. Kim, J., Choi, C.K., and Kang, Y.T., 2004, Instability analysis of marangoni convection for absorption process accompanied by heat transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 2395-2402
  15. Postelnicu, A., 2004, Influence of a magnetic field on heat and mass transfer by natural convection from vertical surface in porous media considering Soret and Dufour effects, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 47, pp. 1467-1472
  16. Incropera, F.P., and Dewitt, D.P., 2002, *Fundamentals of heat and mass transfer*, 5<sup>th</sup> Eds. John Wiley & Sons.
  17. Smith, J. M. and Van Ness, H. C., 1987, *Introduction to chemical engineering thermo dynamics*, McGraw Hill, New York.
  18. Globe, S. and Dropkin, D., 1971, Natural convection in Enclosures, *Proc. 6<sup>th</sup> Int. Heat Transfer Conf.*, Toronto, Canada, Vol. 6, pp. 13-31
  19. Jang, S.P., Choi, S.U.S., Free Convection in a rectangular cavity (benard convection) with nanofluids, *IMECE*, 2004-61054