

최대 평탄특성을 위한 2-D FIR Circular 필터 설계에 관한 연구

서 현 수*, 배 상 범*, 김 남 호*
*부경대학교 공과대학 제어계측공학과

A Study on Design of Maximally Flat 2-D FIR Circular Filter

Hyun-Soo Seo*, Sang-Bum Bae*, Nam-Ho Kim*
*Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.
E-mail : digitalshs@mail1.pknu.ac.kr

Abstract

Recently, due to rapid developments of wireless communication and digital TV, modern society needs to process of acquisition, storage and transmission of much information. So the importance of signal processing is increasing and various digital filters are used in the two-dimensional signal such as image. And kinds of these digital filters are IIR(infinite impulse response) filter and FIR(finite impulse response) filter. And FIR filter which has the phase linearity, the easiness of creation and stability is applied to many fields. In design of this FIR filter, flatness property is a important factor in pass-band and stop-band. In this paper, we designed a 2-D Circular FIR filter using the Bernstein polynomial, it is presented flatness property in pass-band and stop-band. And we simulated the designed filter with noisy test image and compared the results with existing methods.

I. 서론

최근 이동통신기술과 디지털 TV 등의 발전으로, 현대 사회는 방대한 양의 정보에 대한 획득, 저장 및 전송의 과정을 필요로 함에 따라 신호처리 분야에서 디지털 필터의 사용이 급격히 증가하고 있다. 디지털 필터는 주어진 입력신호를 원하는 형태로 여과하는 디지털 시스템이며, 특히 영상 신호와 같이 다차원 배열로 표현되는 신호의 다양성으로 인해 2차원 신호에 대한 디지털 필터의 사용이 증가하고 있다.

디지털 필터에는 IIR(infinite impulse response) 필터와 FIR(finite impulse response) 필터가 있다. IIR 필터는 정확성이 우수한 장점을 가지나, 위상변화가 생기며 계산이 복잡하고 구현이 용이하지 않은 단점을 가진다. 반면, FIR 필터는 IIR 필터에 비하여 다소 부정확하지만, 선형 위상특성을 가지며 구현이 용이하다는 장점으로 인해 신호 처리의 여러 응용분야에서 적용되고 있다[1].

이러한 FIR 필터의 설계 방법에는 창함수 설계법과 McClellan 변환 등이 있다. 창함수는 필터 설계에 있어서, 통과 대역의 차단주파수부근에서 깃스(gibbs)현상에 의해 발생한 리플을 완화하기 위해서 사용하며 대표적으

로 Hanning, Hamming window 등이 있다. 그리고 McClellan 변환은 주어진 설계조건에 대하여 최적의 주파수응답을 얻기 위해, 천이대역 부근의 에러 에너지를 전 주파수 대역내에 균등하게 재분배하는 개념에 근거한 방법이다.

본 논문에서는 Bernstein 다항식을 이용하여 통과대역과 저지대역에서 최대 평탄특성을 나타내는 2차원 FIR Circular 저역통과 필터를 설계하였다. 그리고 시뮬레이션에서, AWGN이 중첩된 Baboon 영상의 필터링결과와 차영상을 나타내었으며, MSE를 이용하여 Hanning, Hamming window와 McClellan 변환에 의한 필터 성능과 비교하였다.

II. McClellan 변환

Odd의 차수의 길이를 가지는 영위상 1차원 FIR 필터의 주파수응답은 다음의 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N a(n) \cos(n\omega) \quad (1)$$

여기서, $h(n)$ 을 1차원 필터의 임펄스 응답이라 할 경우, $a(n)$ 은 다음의 식 (2)와 같다.

$$a(n) = \begin{cases} h(0) & , n=0 \\ 2h(n) & , n \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

또한, 식 (1)의 $\cos(n\omega)$ 는 n 차 체비셰프 다항식 $T_n[\cos(\omega)]$ 으로 표현할 수 있으므로, 식 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n[\cos(\omega)] \quad (3)$$

그리고, 식 (4)에 의해서 1차원 필터는 2차원 필터로 변환되며, $F(\omega_1, \omega_2)$ 는 식 (5)와 같다[2].

$$\cos(\omega) = F(\omega_1, \omega_2) \quad (4)$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J t_{ij} \cos(i\omega_1) \cos(j\omega_2) + \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L s_{kl} \sin(k\omega_1) \sin(l\omega_2) \quad (5)$$

여기서, $|F(\omega_1, \omega_2)| \leq 1$ 의 필요 조건이 성립해야 한다. 식 (5)로부터 첫 번째 \cos 항은 2차원 필터의 주파수 사분면에서 대칭부분에 대한 항이며, \sin 항은 비대칭에 관한 항이다.

즉, 사분면 대칭일 경우에는 첫 번째 \cos 항만이 필요하며, 2차원 주파수 응답은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{H}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n[F(\omega_1, \omega_2)] \quad (6)$$

III. 창함수 설계법

푸리에 급수에 의해 설계되는 FIR 필터는 차수 N 을 크게 할수록 이상적인 필터의 특성에 접근하지만, 주파수 특성상 불연속점 부근에서 깃스현상이 발생하게 된다.

따라서 시간축상에서 불연속이 없는 창함수를 사용하여 그 영향을 완화할 수 있으며, 차수가 N 인 1차원 창함수 $W(\omega)$ 은 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(\omega) = \sum_{k=0}^N w_k e^{j\omega k} \quad (7)$$

또한 주파수영역에서의 임펄스응답 $H(e^{j\omega})$ 와 창함수 $W(\omega)$ 의 콘벌루션은 시간영역에서 h_k 에 대응되는 w_k

의 곱과 같으며, 최종적으로 $H(z)$ 는 다음의 식 (8)과 같다.

$$H(z) = \sum_{k=0}^N (w_k h_k) z^{-k} \quad (8)$$

또한, 2차원에서 창함수의 전달함수는 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$H(z_k, z_r) = \sum_{k=0}^M (w_k h_k) z^{-k} \sum_{r=0}^N (w_r h_r) z^{-r} \quad (9)$$

식 (9)에서 w_k 와 w_r 이 환상대칭이라면, 2차원 창함수 $w_{kr}(m, n)$ 은 식 (10)과 같다.

$$w_{kr}(m, n) = w_k(n) \Big|_{n=\sqrt{m^2+n^2}} = w_k(\sqrt{m^2+n^2}) \quad (10)$$

또한 Hanning window와 Hamming window는 다음의 두 식과 같다.

$$w_n(n) = 0.5(1 + \cos(2\pi n/N)), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (11)$$

$$w_m(n) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/N), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (12)$$

따라서, 창함수를 이용한 2차원 FIR 필터 설계는, 주파수영역에서 이상적인 값을 설정한 다음 적절한 창함수와 의 연산으로 설계할 수 있다.

IV. Bernstein 다항식을 이용한 설계

구간 $[0,1]$ 에서 $f_d(x)$ 가 정의된다면, Bernstein 다항식에 의해서 식 (13)과 같이 $f(x)$ 로 근사화할 수 있다[3].

$$f(x) = \sum_{i=0}^m f_d\left(\frac{i}{m}\right) \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i} \quad (13)$$

여기서 m 은 $f(x)$ 의 차수이며, $f(x)$ 는 $[0,1]$ 에서 고르게 분포된 $f_d(x)$ 에 의해 얻어진 가중치 계수와 커널 $x^i(1-x)^{m-i}$ 에 의해 합성된 것이다. 또한 $f_d(x)$ 가 $[0,1]$ 의 범위 내에 존재하고 연속일 경우, m 이 무한한 값을 가지게 되면 $f(x)$ 는 $f_d(x)$ 에 근접한다.

그리고 Bernstein 다항식을 이용한 FIR 저역통과 필터

를 설계하기 위해서 주파수응답 $H_d(\omega)$ 는 다음의 관계에 의해서 시간영역의 $f_d(x)$ 로 변환된다.

$$x = \frac{1 - \cos \omega}{2} \quad (14)$$

따라서 $f(x)$ 는 주파수영역에서 다음의 식 (15)로 나타낼 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{i=0}^K \binom{m}{i} \left(\frac{1 - \cos \omega}{2}\right)^i \left(\frac{1 + \cos \omega}{2}\right)^{m-i} \quad (15)$$

여기서 K 는 $\omega = \pi$ 에서의 평탄차수이며, Herrmann에 의해 다음의 식으로 정의된다[4].

$$K = m - \lfloor m\omega_c + 0.5 \rfloor \quad (16)$$

여기서 $\lfloor \cdot \rfloor$ 는 floor 함수이다.

그리고 2차원 영역에서 함수 $f_d(x)$ 가 설정되었다고 가정하였을 경우, $m \times n$ 차 Bernstein 다항식은 다음의 식 (17)과 같다.

$$f(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} f_d\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) x^i (1-x)^{m-i} y^j (1-y)^{n-j} \quad (17)$$

이 때, 위의 식 (17)의 주파수 응답은 다음의 식 (18)과 같다.

$$H(\omega_1, \omega_2) = f(x, y) \Big|_{x=(1-\cos\omega_1)/2, y=(1-\cos\omega_2)/2} \quad (18)$$

또한 차단주파수를 ω_{c1}, ω_{c2} 라 할 때, Circular 필터의 이상적인 주파수 응답은 다음과 같다.

$$H_d(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & |\omega_1/\omega_{c1}|^2 + |\omega_2/\omega_{c2}|^2 \leq 1 \\ 0, & |\omega_1/\omega_{c1}|^2 + |\omega_2/\omega_{c2}|^2 \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

만약 $\omega_{c1} = \omega_{c2} = \omega_c$ 라 하고, 사분면 대칭일 경우 Circular 필터의 경계를 다음과 식 (20)과 같이 설정할 수 있다.

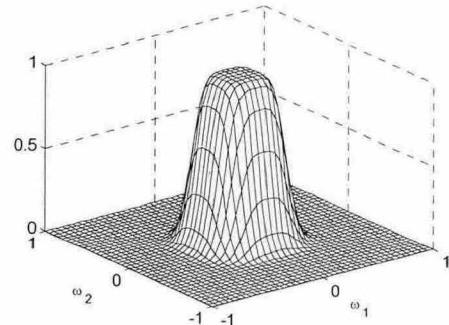
$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_c^2 \quad (20)$$

위의 과정으로부터 다음의 식 (21)과 같은 이차원함수 $f_d(i/m, j/m)$ 를 얻을 수 있다.

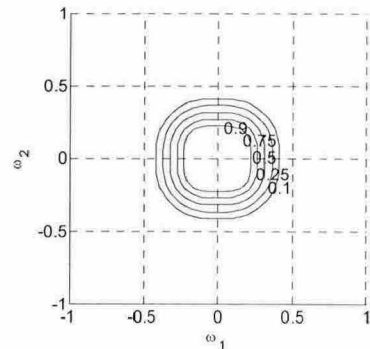
$$f_d(i/m, j/m) = \begin{cases} 1, & \arccos(1 - 2i/m) + \arccos(1 - 2j/m) \leq \omega_c \\ 0, & \arccos(1 - 2i/m) + \arccos(1 - 2j/m) \geq \omega_c \end{cases} \quad (21)$$

$0 \leq i, j \leq m$

그림 1은 Bernstein 다항식을 이용하여 설계된 차단주파수가 $\pi/3$ 인 41차 Circular 필터의 주파수 응답과 contour를 나타내고 있다.



(a) Frequency response of Circular filter



(b) A contour plot of Circular filter

Fig. 1. 2-D FIR circular lowpass filter($\omega_c = \pi/3$).

IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서 제안한 Bernstein 다항식을 이용한 2차원 FIR Circular 지역통과 필터를 시뮬레이션 하기 위해, 테스트 영상으로 AWGN이 중첩된 128×128 의 Baboon 영상을 사용하였다. 그림 2로부터 (a)는 원영상이며 (b)는 표준편차가 60인 AWGN에 의해 훼손된 영상이다. 그리고 (c), (d), (e), (f)는 각각의 방법에 의해 설계된 지역통과 필터로 필터링한 결과이며, 차단주파수는 $\pi/2$ 이다.

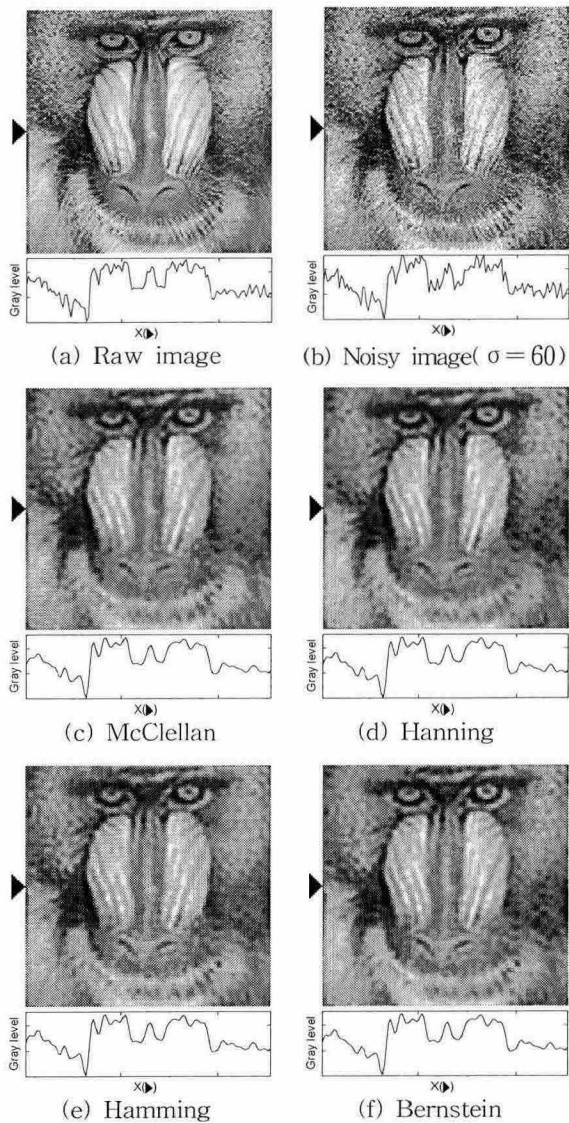


Fig. 2. Comparison of filtering results($\omega_c = \pi/2$).

Table 1. MSE comparison of each filter.

ω_c	σ	McClellan	Hanning	Hamming	Bernstein
$\pi/3$	40	428.1945	432.5878	433.0178	416.6833
	50	431.9546	436.3885	436.8027	420.0304
	60	435.8529	440.0683	440.6173	423.9273
$\pi/2$	40	305.1938	308.2913	310.4422	301.1577
	50	313.1166	318.2243	318.3779	308.6403
	60	320.3316	325.0054	325.1963	314.8681

표 1에서는 차단주파수와 AWGN의 표준편차에 따른 필터링 결과를 MSE로 나타내었다. 표로부터, Bernstein 다항식을 이용한 2차원 FIR Circular 필터의 MSE가 가장 우수한 결과를 보였다.

그리고 그림 3에서 원영상과의 차영상을 나타내었다.

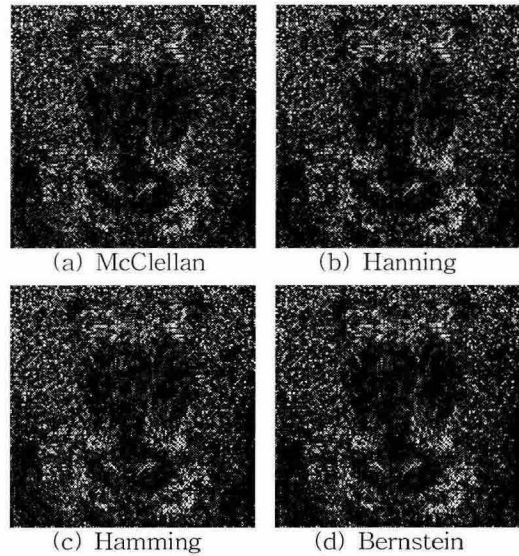


Fig. 3. Comparison of difference images($\omega_c = \pi/2$).

V. 결론

본 논문에서는 최대 평탄특성을 가지는 2차원 FIR Circular 저역통과 필터를 설계하기 위해 Bernstein 다항식을 이용하였다. 그리고 시뮬레이션에서 McClellan 변환 및 창함수 설계법의 필터링결과와 차영상을 비교하였으며, 성능비교를 위한 판단기준으로 MSE를 사용하였다.

시뮬레이션결과에서, 제안한 방법의 평탄한 특성으로 인해 차영상에서의 어두운 영역이 다른 방법의 결과보다 일정하게 보이고 있으며, 우수한 MSE를 나타내었다. 따라서 본 논문에서 제안한 Bernstein 다항식을 이용한 필터 설계법은 잡음 제거 및 평탄 특성이 우수하여 신호처리의 많은 분야에 유용하게 적용되리라 사료된다.

참고 문헌

- [1] R. W. Hamming, "Digital Filters", Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [2] H. Chen, G. E Ford, "A unified eigenfilter approach to the design of two-dimensional zero-phase FIR filters with the McClellan transform", IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process, vol. 41, 1994.
- [3] G. G. Lorentz, Bernstein Polynomials. Toronto, ON, Canada: Univ. of Toronto Press, 1953.
- [4] O. Herrmann, "On the approximation problem in nonrecursive digital filter design", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, pp. 411-413, May, 1971.