

방전현상 해석을 위한 전자장 및 전하이동 방정식의 비선형 결합 알고리즘

이세연\*, 박일한\*, 이세희\*\*  
 성균관대학교\*, 한국전기연구원\*\*

Discharge Analysis Using Nonlinearly-Coupled Equation of Electromagnetic Field and Charge Transport

Se-Yeon Lee\*, Il-Han Park\*, Se-Hee Lee\*\*  
 Sungkyunkwan University\*, Korea Electrotechnology Research Institute\*\*

**Abstract** - A complete finite element analysis method for discharge onset process, which is governed and coupled by charge transport equation and electric field equation, was presented. The charge transport equation of first order was transformed into a second-order one by utilizing the artificial diffusion scheme. The two second-order equations were analyzed by the finite element formulation which is well-developed for second-order ones. The Fowler-Nordheim injection boundary condition was adopted for charge transport equation. After verifying the numerical results by comparing to the analytic solutions using parallel plane electrodes with one carrier system, we extended the result to blade-plane electrodes in 2D xy geometry with three carriers system. Radius of the sharp tip was taken to be 50 μm. When this sharp geometry was solved by utilizing the space discretizing methods, the very sharp tip was found to cause a singularity in electric field and space charge distribution around the tip. To avoid these numerical difficulties in the FEM, finer meshes, a higher order shape function, and artificial diffusion scheme were employed.

위 식에서  $\epsilon$ 은 비유전율을,  $e$ 는 전자의 전하량,  $V$ 는 전위이다. 시뮬레이션에는 COMSOL사의 Multiphysics가 이용되었고, 물리적인 셋팅은 Multiphysics소프트웨어의 확산-이동 모듈과 프아송방정식 모듈에서 프로그래밍 되었다. [6]

2.2 음극에서의 전자의 방사 조건

본 논문에서는 음극에서 일어나는 두 가지의 전자방출현상을 고려하고 있는데 하나는 Fowler-Nordheim의 전계방출이고, 다른 하나는 양이온의 충돌에 의한 2차방출이다. 고체나 액체의 표면의 전계방출은 전기장의 영향으로 나타나는 데 이러한 전계방출현상은 다음의 식으로 표현된다. [3],[5]

$$J_{FN} = A \frac{E^2}{\Phi \cdot t^2(y)} \exp\left\{-B \frac{\Phi^{3/2}}{E} v(y)\right\} [A/cm^2] \quad (3)$$

$J_{FN}$ 은 Fowler-Nordheim의 필드방출효과에 의한 전류밀도이고,  $E$ 는 전계를 그리고  $\Phi$ 는 일함수(work function)를 나타내고 있다. A, B는 필드와는 독립적인 상수로 다음 값으로 주어진다.

$$A = \frac{e^3}{8\pi h} = 1.54 \times 10^{-6}, \quad B = \frac{8\pi \sqrt{2m}}{3eh} = 6.83 \times 10^7 \quad (4)$$

여기서  $m$ 은 전자의 질량,  $h$ 는 플랑크상수(Planck's constant)이다. 쇼트키(Schottky)의 일함수장벽 저감효과는 다음과 같다.

$$y = \frac{\sqrt{e^3 E}}{\Phi} = 3.79 \times 10^{-4} \sqrt{E/\Phi} \quad (5)$$

본 논문에는  $v(y) = 0.95 - y^2$ ,  $t^2(y) = 1.1$  값이 적용되었다. 전계 방출에 의해 방출된 양이온들이 음극을 때릴 때, 전자는 음극에서 다시 방출되는데 이러한 음극에서의 2차방출현상은 다음 식으로 표현된다.

$$J_{se} = \gamma_i e |V_e| \frac{N_p(r = C_-, t) |V_p(r = C_-, t)|}{|V_e(r = C_-, t)|} \quad (6)$$

$J_{se}$ 는 2차방출현상에 의한 전류밀도이고,  $r$ 은 위치벡터 그리고  $C_-$ 는 음극을 나타낸다.  $\gamma_i$ 는 이온의 2차방출계수이고, 본 논문에서는 0.01 [1]의 값이 적용되었다. 이제 음극에서의 전자의 전체 전류밀도를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$J_{tot} = J_{FN} + J_{se} \quad (7)$$

2.3 에너지법을 이용한 터미널전류계산

터미널전류를 계산하기 위하여 포인팅정리가 이용되었다. 임의의 체적 안의 필드를 고려할 때, 체적 내 모든 점에서의 포텐셜 에너지 분포는 공간을 내에 전체적으로 분포해 있고, 외부경계 표면의 전계에 의한 자기유도를 무시할 수 있다고 가정하고, 변위전류의 영향은 무시할 수 있으므로 회로방정식에서 유도된 식으로 입력된 전력에 의한 터미널 전류의 계산식을 표현할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^n V_i I_i = \frac{d}{dt} \int_v w dv + \int_v P_d dv \quad (8)$$

with  $w = \frac{1}{2} \epsilon E \cdot E + \frac{1}{2} \mu H \cdot H$  and  $P_d = E \cdot J_c$

여기서  $I$ 는 터미널 전류이고,  $V$ 는 외부경계면으로 쌓여있는 체적,  $H$ 는 자속밀도이다. 전도전류  $I_c$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$J_c = \rho_p V_p - \rho_n V_n - \rho_e V_e \quad (9)$$

$\rho_p$ ,  $\rho_n$ ,  $\rho_e$ 는 각각 양이온과 음이온 그리고 전자의 밀도이다. 기본적으로

1. 서 론

기존의 방전현상 해석에는 FDM(Finite Difference Method)과 FEM(Finite Element Method)과 MOC(Method of Characteristics)가 결합된 방법 그리고 FEM과 FCT(Flux Corrected Transport)가 결합된 해석방법들이 이용되어 왔다. [1]-[4] 방전현상의 수학적 모델은 이온화, 부착, 재결합 과정이 포함된 전자와 음이온, 양이온을 위한 전하연속 방정식(Charge continuity equation)과 전기장에 관한 프아송 방정식(Poisson's equation)으로 이루어 지는데, 이 두 종류의 방정식은 비선형 결합되어 있기 때문에 해석을 위해 반복적 해석과정이 필요하다. 또한 이런 공간전하 문제는 대류현상에 크게 의존하고 있는데, 이런 이산적인 대류전달문제가 가지고 있는 해석적인 어려움을 해결하기 위해 본 논문에서는 Artificial diffusion 테크닉이 적용되었다.  $10^7$ V/cm보다 높은 전계에서는 고체와 액체표면의 전자의 방출현상이 일어나게 되는데, 본 논문의 해석모델에서의 전자 방출은 도체표면에서 Fowler-Nordheim injection 조건을 만족하는 전계방출(Field emission)현상과 방출된 양이온에 의해 발생하는 2차방출(Secondary emission)현상이 고려되었다.[5]

2. 본 론

2.1 방전해석을 위한 유체역학 확산-이동(Diffusion-drift) 모델

공간전하의 확산-이동을 해석하기 위하여 유체역학 모델이 사용되었다. 다음의 세 방정식들은 방전초기의 전자와 양이온 그리고 음이온의 변화에 관한 식들이다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e V_e) &= S + N_e \alpha |V_e| - N_e \eta |V_e| - N_e N_p \beta_{ep} \\ \frac{\partial N_p}{\partial t} + \nabla \cdot (N_p V_p) &= S + N_e \alpha |V_e| - N_e N_p \beta_{ep} - N_n N_p \beta_{np} \\ \frac{\partial N_n}{\partial t} + \nabla \cdot (N_n V_n) &= N_e \eta |V_e| - N_n N_p \beta_{np} \end{aligned} \quad (1)$$

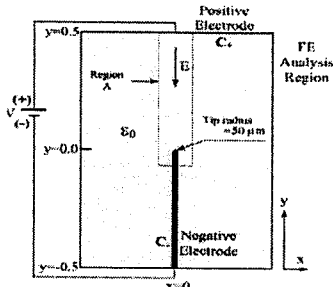
$t$ 는 시간,  $V_e$ ,  $V_p$ ,  $V_n$ 은 각각 전자와 음이온 그리고 양이온의 이동속도,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ 는 각각 이온화계수와 부착계수 그리고 재결합계수를 나타낸다. S는 광전리소스로 본 논문에서 고려되지 않았다. 확산효과(diffusion effect) 또한 전하이동의 주요 요소가 아니므로 고려되지 않았다. [1] 본 논문에서는 공간전하의 방사현상 이전에 발생할 수 있는 충격파(shock wave)에 의한 수치적 불안속을 해결하기 위해서 artificial diffusion 기법이 이용되었다. 식(1)의 연속방정식들은 artificial diffusion 항과 프아송 방정식에 맞게 수정되어 각각의 시간에 따른 전기장의 분포가 적절히 반영되도록 하였다.

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = e(N_p - N_e - N_n) \quad (2)$$

유한요소법은 좀 더 정확하고 일반적인 에너지의 결과를 보여주는데 이는 FEM이 에너지의 최소화 조건을 따르고 있기 때문이다.

### 2.4 해석 모델

하나의 캐리어를 가진 2차원 Plane-Plane 모델에 본 논문의 해석방법을 적용한 결과를 기존 해석 결과와 비교 하였다. [8] 비교를 통해 해석방법의 적합성을 확인한 후 3개의 캐리어를 가진 Blade-Plane 모델로 확장하였다.



〈그림 1〉 Blade-Plane 해석모델

Blade-Plane 모델의 물리적인 셋팅은 전자와 이온의 속도에 의존하는 전계에 의한 심플한 이동모델로 근사 하였고, 나머지는 아래에 언급되어 있다.

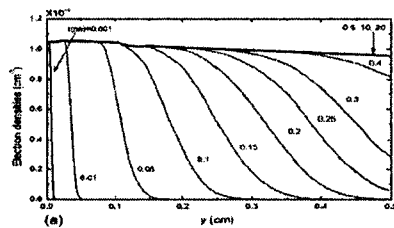
〈표 1〉 Transport and interaction properties

Properties	Material function
$\alpha, \text{cm}^{-1}$	$0.0035 \exp(-1.65 \times 10^4 E^{-1})$
$\eta, \text{cm}^{-1}$	$0.15 \exp(-2.5 \times 10^4 E^{-1})$
$\beta_p, \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$	$2 \times 10^7$
$\beta_{pe}, \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$	$2 \times 10^7$
$V_p, \text{cm s}^{-1}$	$-382E$
$V_{pe}, \text{cm s}^{-1}$	$3.42E$
$V_{ne}, \text{cm s}^{-1}$	$-3.42E$

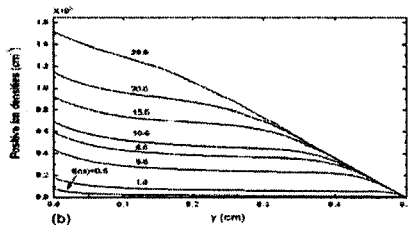
Blade-Plane 모델에는 양극사이에는 계단전압(step voltage)이 인가되었고, 장벽전위를 넘지 못하는 전압에서는 전자의 방출이 일어나지 않는다.

### 2.5 해석 결과

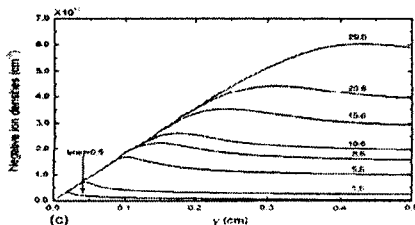
충분한 전압이 인가되었을 때 Fowler-Nordheim 방출조건에 의해 음극에서부터 전자방출이 시작된다.  $y=0$ 에서 0.5까지  $y$ 축을 따라서 본 전자의 밀도는 그림 3, 4, 5에 있다. 본 시뮬레이션의 인가 전압설정은 음극표면에서의 필드방사요인으로 예상되는 미소한 Defect요소가 배제된 상태이므로 실제 실험적인 값보다 높게 설정되어 있다.



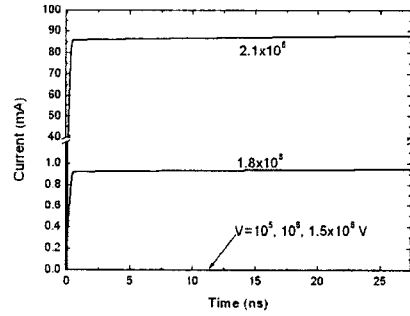
〈그림 2〉 Electron densities



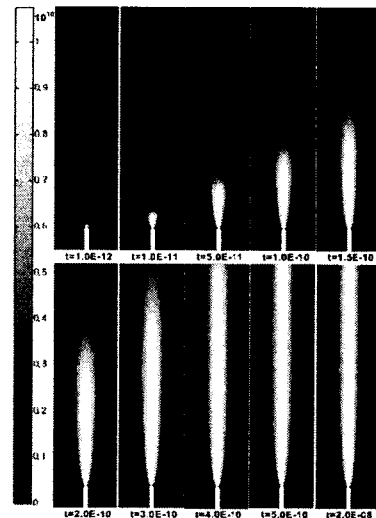
〈그림 3〉 Positive ion densities



〈그림 4〉 Negative ion densities



〈그림 5〉 터미널전류



〈그림 6〉 시간에 따른 전자밀도의 변화

## 3. 결 론

본 논문에서는 유체역학의 확산 모델과 프라운호프 방정식이 결합된 공간전하의 이동을 해석하였다. 하나의 캐리어를 가진 Plane-Plane 모델의 해석으로부터 세 개의 캐리어를 가진 Blade-Plane 모델의 확장 결과 에너지법에 의한 터미널전류의 계산까지 이러한 과정들은 모두 FEM으로 해석되었고 결과적으로는 방전현상 초기의 전자 방출과 이동을 적절하게 해석하는 것이 가능했다.

### 〈참 고 문 헌〉

- [1] R. Morrow, "Theory of negative corona in oxygen," Physical Review A, Vol. 32, No. 3, pp. 1799-1809, 1985.
- [2] Gunther Steinle, Doerte Neundorf, Wolfgang Hiller, and Martin Pietralla, "Two-dimensional simulation of filaments in barrier discharges," J. Phys. D: Appl. Phys., Vol. 32, pp. 1350-1356, 1999.
- [3] J. Paillol, P. Espel, T. Reess, A. Bibert, and P. Domens, "Negative corona in air at atmospheric pressure due to a voltage impulse," Journal of Applied Physics, Vol. 91, NO. 9, pp.5614-5621, 2002.
- [4] G. E. Georghiou, A. P. Papadakis, R. Morrow, and A. C. Metaxas, "Numerical modelling of atmospheric pressure gas discharges leading to plasma production," J. Phys. D: Phys., Vol. 38, pp. R308-R328, 2005.
- [5] R. H. Fowler and L. Nordheim, "Electron emission in intense electric fields," Proc. R. Soc. London, Vol. 119, No. 781, pp. 173-181, 1928.
- [6] COMSOL Multiphysics Manual
- [7] Se-Hee Lee, Francis O'Sullivan, Il-Han Park, and Markus Zahn, "Analysis of Charge Transport in a Dielectric Liquid by Employing the Coupled Finite Element Method," IEEE Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena, Missouri USA, October 15-18, 2006 [Accepted for conference presentation].
- [8] Markus Zahn, Cheung Fung Tsang, and Shing-Chong Pao, "Transient electric field and space-charge behavior for unipolar ion conduction," Journal of Applied Physics, pp. 2432-2440, Vol. 45, No. 6, June 1974.