

동적유한요소법을 이용한 유연매체의 기하비선형해석 Geometric Nonlinear Analysis of Flexible Media Using Dynamic FEM

지중근†·홍성권*·장용훈**·박노철***·박영필****

Jung-Geun Jee, Sung-Kwon Hong, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park, Young-Pil Park

Key Words : Co-rotational(CR), Full Newton-Raphson(FNR), Newmark Temporal Discretization

ABSTRACT

In the development of sheet-handling machinery, it is important to predict the static and dynamic behavior of the sheets with a high degree of reliability. Flexible media is very thin, very light and very flexible so it behaves geometric nonlinearity of large displacement and large rotation but small strain. In this paper, static and dynamic analyses of flexible media are performed by dynamic FEM considering geometric nonlinearity. Mass and tangent stiffness matrices based on the Co-rotational(CR) approach are derived and numerical simulations are performed by full Newton-Raphson(FNR) method and Newmark integration scheme.

1. 서론

복사기, 팩시밀리, 프린터, ATM 등 유연매체를 사용하는 다양한 사무자동화 기기들이 널리 보급되고 있으며, 고속화 정밀화 추세를 보이고 있다. 이러한 기기에서 피딩(Feeding)시스템은 중요한 역할을 담당하고 있으며, 반송 시에 발생할 수 있는 채류와 잼의 예측은 피딩 기구를 설계하는데 있어서 중요한 인자라 할 수 있다. 유연매체는 대변형, 소변형률의 기하비선형 거동을 보이며, 이러한 비선형 빔 구조물의 수식화를 위하여 Total-Lagrangian(TL)방법, Updated-Lagrangian(UL)방법 그리고 Co-rotational(CR)방법 등이 사용되며 비선형 문제의 해를 얻기 위해서 Incremental-iterative 방법을 적용한 Full Newton-Raphson (FNR)법과 Modified Newton-Raphson(MNR)법 등이 사용된다. 본 연구에서는 Euler Bernoulli 빔 요소를 이용하여 CR 방법을 적용하여 강성행렬과 질량행렬을 유도하고, FNR 법과 Newmark β 법을 이용하여 정

적 및 동적 해석을 수행하였다.

2. Co-Rotational 방법

TL 법과 UL 법에서는 좌표계가 고정되어 있지만 CR 법에서는 요소를 따라서 회전하는 좌표계를 도입한다. Figure 2.1은 CR 법을 적용한 빔 요소를 나타낸 것이다.

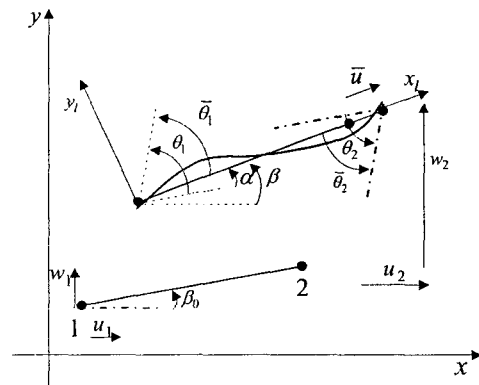


Fig.2.1 Beam Kinematics

전체좌표계에서의 변위벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$d = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (2.1)$$

국부좌표계에서의 변위벡터는 다음과 같다.

$$d_i = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2]^T \quad (2.2)$$

d_i 의 요소는 다음과 같이 계산된다.

† 연세대학교 기계공학과
E-mail : jj7315@honmail.net
Tel : (02) 2123-4677, Fax : (02) 365-8460

* 연세대학교 기계공학과

** 연세대학교 기계공학과 조교수

*** 연세대학교 정보저장기기 협동과정 부교수

**** 연세대학교 기계공학부 정교수

$$\begin{aligned} \bar{u} &= l_n - l_0 \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 - \alpha \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 - \alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

CR 법을 사용하면 K_I 가 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} K_I &= B^T K_I B + \frac{zz^T}{l_n} N \\ &+ \frac{1}{l_n^2} (rz^T + zr^T) (M_1 + M_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

위 식에서 r, z, B, K_I 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} r &= [-c \quad s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \\ z &= [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} -c & s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 1 & s/l_n & -c/l_n & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 0 & s/l_n & -c/l_n & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$K_I = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EI & 2EI \\ 0 & 2EI & 4EI \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

3. Newmark β 법

3.1 Direct Integration

다음과 같은 선형방정식을 고려한다.

$$M^{t+\Delta t} \ddot{U} + C^{t+\Delta t} \dot{U} + K^{t+\Delta t} U = {}^{t+\Delta t} F \quad (3.1)$$

Newmark 관계식은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \dot{U} &= {}^t \dot{U} + \Delta t \left[(1-\beta) {}^t \ddot{U} + \beta {}^{t+\Delta t} \ddot{U} \right] \\ {}^{t+\Delta t} U &= {}^t U + \Delta t {}^t \dot{U} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{U} + \alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{U} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

위 식(3.2)를 ${}^{t+\Delta t} \ddot{U}$ 와 ${}^{t+\Delta t} \dot{U}$ 에 대해서 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \ddot{U} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} U - {}^t U) - \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{U} + \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) {}^t \ddot{U} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{U} &= \frac{\beta}{\alpha \Delta t} ({}^{t+\Delta t} U - {}^t U) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) {}^t \dot{U} + \Delta t \left(1 - \frac{\beta}{2\alpha} \right) {}^t \ddot{U} \end{aligned} \quad (3.3)$$

위 식을 식(3.1)에 대입하여 정리하면 선형방정식에 대한 Newmark β 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2 \alpha} M + \frac{\beta}{\Delta t \alpha} C + {}^{t+\Delta t} K \right) {}^{t+\Delta t} U &= {}^{t+\Delta t} F \\ &+ M \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^t U + \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{U} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{U} \right] \\ &+ C \left[\frac{\beta}{\alpha \Delta t} {}^t U + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) {}^t \dot{U} + \Delta t \left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{U} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2 Temporal Discretization

Newmark β 법은 선형인 경우에는 3.1 절과 같이 방정식이 얻어지지만 K 가 U 의 함수인 경우에는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} M^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(k)} + C^{t+\Delta t} \dot{U}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} K^{(k-1)} \Delta U^{(k)} \\ = {}^{t+\Delta t} F - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

여기서 다음과 같은 관계가 적용된다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} U^{(k)} &= {}^{t+\Delta t} U^{(k-1)} + \Delta U^{(k)} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(k-1)} + \Delta \dot{U}^{(k)} \\ {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(k)} &= {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(k-1)} + \Delta \ddot{U}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

위에서 초기치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} K^{(0)} &= {}^t K \\ {}^{t+\Delta t} R^{(0)} &= {}^t R \\ {}^{t+\Delta t} U^{(0)} &= {}^t U \\ {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(0)} &= {}^t \dot{U} \\ {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(0)} &= {}^t \ddot{U} \end{aligned} \quad (3.7)$$

위 식(3.6)와 식(3.7)을 식(3.5)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} M \left({}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(k-1)} + \Delta \ddot{U}^{(k)} \right) + C \left({}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(k-1)} + \Delta \dot{U}^{(k)} \right) \\ + {}^{t+\Delta t} K^{(k-1)} \Delta U^{(k)} = {}^{t+\Delta t} F - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

위 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M \Delta \ddot{U}^{(k)} + C \Delta \dot{U}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} K^{(k-1)} \Delta U^{(k)} \\ = {}^{t+\Delta t} F - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)} - M {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(k-1)} - C {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

식(3.3)으로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(k-1)} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} U^{(k-1)} - {}^t U) - \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{U} + \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) {}^t \ddot{U} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(k-1)} &= \frac{\beta}{\alpha \Delta t} ({}^{t+\Delta t} U^{(k-1)} - {}^t U) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) {}^t \dot{U} + \Delta t \left(1 - \frac{\beta}{2\alpha} \right) {}^t \ddot{U} \end{aligned} \quad (3.10)$$

위 식을 식(3.9)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2 \alpha} M + \frac{\beta}{\Delta t \alpha} C + {}^{t+\Delta t} K^{(k-1)} \right) \Delta U^{(k)} &= {}^{t+\Delta t} F - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)} \\ &+ M \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} ({}^t U - {}^{t+\Delta t} U^{(k-1)}) + \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{U} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{U} \right] \\ &+ C \left[\frac{\beta}{\alpha \Delta t} ({}^t U - {}^{t+\Delta t} U^{(k-1)}) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) {}^t \dot{U} + \Delta t \left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{U} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Contact 알고리즘

중의 움직임이 강체 바닥에 구속되어지는 경우 접촉이 발생하는 지점에서 접촉력과 마찰력이 구해져야 한다. 마찰력은 반력과 마찰계수에 의해서 계산되며 마찰력의 방향은 접촉점의 속도 방향으로 부터 구해진다.

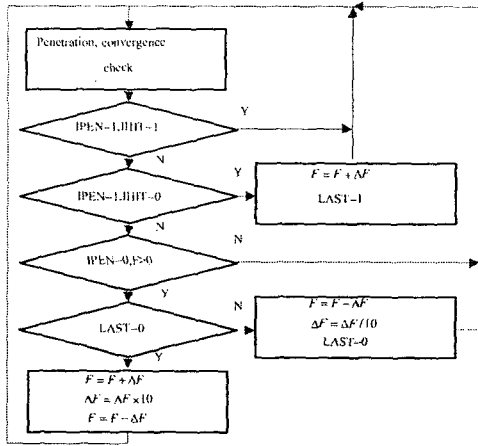


Fig.4.1 Contact Force Algorithm

Figure 4.1 에서처럼 관통이 확인되면 점진적으로 접촉력을 증가시키게 되고 처음 관통이 일어났던 부분이 바닥으로부터 분리가 되면 가해주었던 힘을 빼고 다시 1/10의 힘을 점진적으로 가하면서 수렴조건 안에 들어오는 힘을 찾게 된다.

5. Simulation 결과

5.1 정적해석

CR 방법과 FNR 법을 사용하여 정적해석을 수행

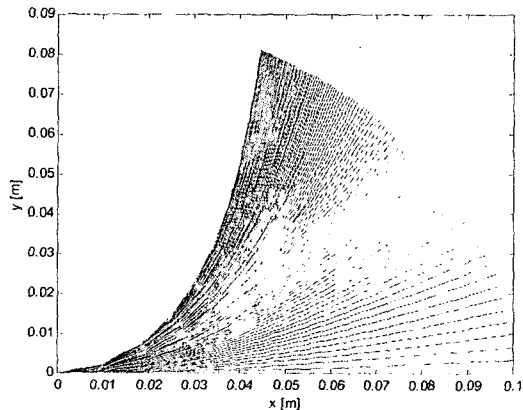


Fig. 5.1 Deflection of Sheet with End Force

하였다. Figure 5.1 은 외팔보의 끝단에 $1.0EI/L^2$ 의 힘을 가하여 해석을 수행한 결과이고, Figure 5.2 는 끝단에 $2\pi EI/L$ 의 모멘트를 가하여 해석한 결과이다.

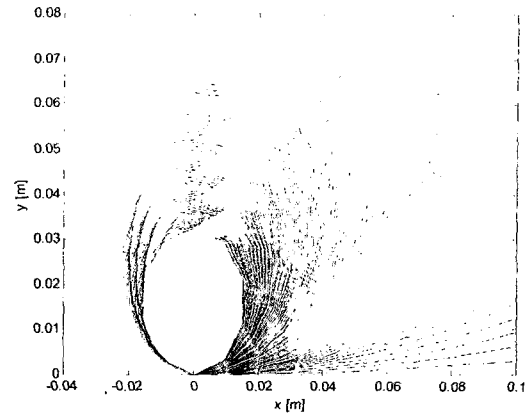


Fig. 5.2 Deflection of Sheet with End Moment

5.2 동적해석

CR 방법과 Newmark temporal discretization 방법을 사용하여 동적해석을 수행하였다. 물성치는 A4 용지의 값을 사용하였다.

Figure 5.3 은 한쪽이 고정된 외팔보로 자중으로 인한 처짐을 $\Delta t = 1/1000$ 초로 2.5 초간 해석한 결과이다.

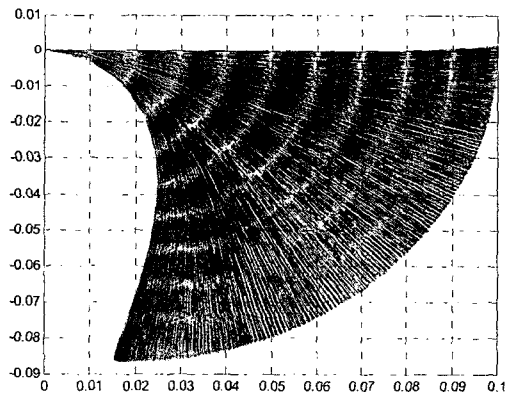


Fig. 5.3 Oscillation of Sheet in Gravitational Field

Figure 5.4 와 Figure 5.5 는 Figure 5.3 에서 끝단의 X, Y 의 위치를 시간에 따라서 나타낸 결과이다.

Figure 5.6 은 30° 의 경사를 가지고 떨어지는 종이를 해석한 결과이다. 여기서는 바닥과 종이의 마찰계수를 0.2로 하였으며 공기 중을 움직이면서 받는 공기의 영향력은 항력만을 고려하였다.

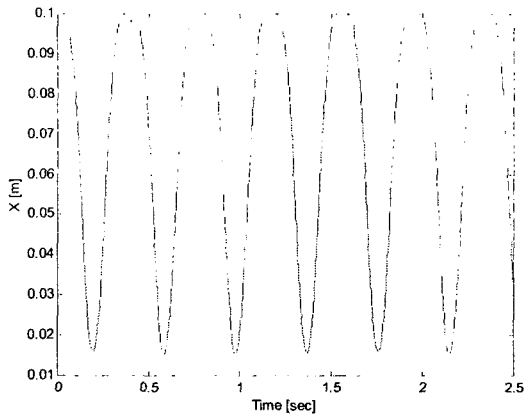


Fig.5.4 X Position of Fig.5.3

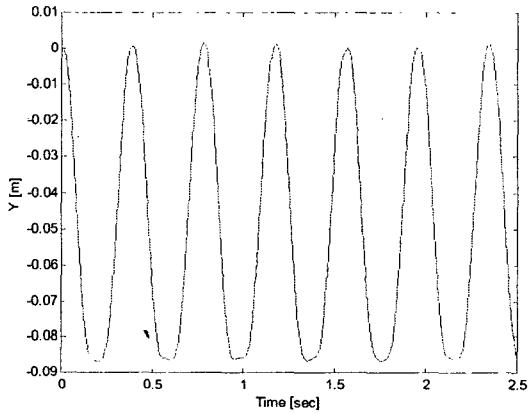


Fig.5.5 Y Position of Fig.5.3

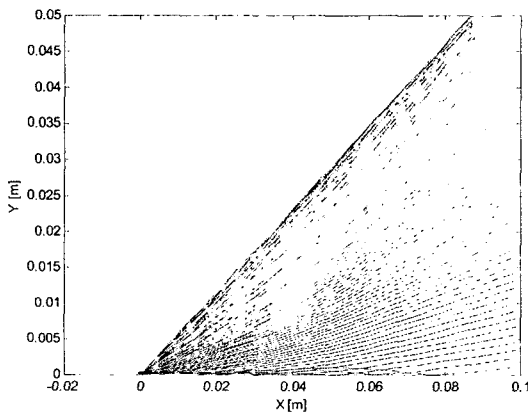


Fig.5.6 Simulation Result of Sheet Impacting on the Horizontal Guide

6. 결론

CR 법과 FNR 법, 그리고 Newmark β 방법을

사용하여 유연매체의 정·동적 거동 해석을 수행하였다. CR 법은 기하비선형 거동을 해석하는 전통적인 방법인 TL 법이나 UL 법 보다 Engineering strain 을 사용하기 때문에 수식이 간단하고 매 반복 계산에서 빠른 수렴 결과를 보였다. 본 논문에서는 종이가 공기 중을 움직일 때 받는 항력만을 고려하였으나 양력과 squeeze-film damping, vortex 등을 고려한다면 보다 정확한 결과를 얻을 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) Wen Yi Lin and Kuo Mo Hsiao, 2001, "Co-rotational formulation for geometric nonlinear analysis of doubly symmetric thin_walled beams", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp.6023-6052.
- (2) K. Behdinan, M.C. Stylianou and B. Tabarrok, 1998, "Co-rotational dynamic analysis of flexible beams", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.154, pp.151-161.
- (3) M.A. Crisfield, 1991, *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, JOHN WILEY & SONS.
- (4) George E. Blandford and Gordon C. Glass, 1987, "Static/Dynamic Analysis of Locally Buckled Frames", *Journal of Structural Engineering*, Vol.113, No.2, pp.363-380.
- (5) H.A. Elkaranshawy and M.A. Dokainish, 1995, "Corotational finite element analysis of planar flexible multibody systems", *Computers & Structures*, Vol. 54, No.5, pp. 881~890.
- (6) M.A. Crisfield, 1990, "A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 81, pp.131-150.
- (7) Klaus-Jürgen Bathe, 1996, *Finite Element Procedures*, PRENTICE HALL.