

지반위에 놓인 변단면 후판의 안정해석

Stability Analysis of Tapered Thick Plate on Foundation

이용수† · 김일중* · 오숙경**

Lee, YongSoo, Kim, IlJung and Oh, SoogKyong

Key Words : Dynamic instability(동적안정), Inplane stress(면내응력), Tapered ratio(변단면율)

ABSTRACT

This paper has the objects of deciding dynamic instability regions of thick plates on inhomogeneous Pasternak foundation by finite element method and providing kinematic design data for mats and slabs of building structures.

In this paper, dynamic stability analysis of tapered opening thick plate is done by use of Serendipity finite element with 8 nodes considering shearing strain of plate. To verify this finite element method, buckling stress and natural frequencies of thick pate with or without in-plane stress are compared with existing solutions.

The results are as follow that this finite element solutions with 4×4 meshes are shown the error of maximum 0.56% about existing solutions, and the larger foundation parameters, the farther dynamic instability regions are from vertical axis of graph presented relation of β and $\bar{\omega}/\omega$.

1. 서론

판 부재는 건축, 토목, 항공, 우주, 선박 등의 구조물을 구성하는 기본 부재중의 하나이다.

판 부재는 작용하는 면내력 종류에 따라서 좌굴에 의해 발생하는 정적 불안정과 진동에 의해 발생하는 동적 불안정을 가질 수 있다. 그 동안 대부분의 연구들은 정적인 안정과 동적인 안정을 별개의 경우로 해석을 하여왔으나 정적인 안정과 동적인 안정상태가 동시에 만족해야만 부재가 안정상태 있다고 할 수 있다.

그동안 판의 동적안정에 관한 연구동향은 비균질 지반에 놓인 박판에 대한 동적해석이거나 균질지반에 지지된 후판의 동적해석에 국한되어 있다.

본 연구에서는 면내력을 받는 개구부가 있는 변단면판에 대한 동적안정해석을 행하였다. 면내력과 진동수에 의한 영

향이 고려된 판의 안정영역을 구하여 판 부재의 동적안정 설계에 도움이 되고자 한다.

동적안정 해석을 하기 위하여 지하층 바닥슬래브를 대상으로 해석하였으며 판은 집수정과 같은 개구부가 있는 후판으로 모델링하였다. 지반은 탄성지반 중의 하나인 Pasternak 지반으로 하였으며, Serendipity 유한요소를 이용하여 후판의 동적 안정해석을 행하였다.

본 연구는 건축물의 대형화에 즈음하여 탄성지반위에 놓인 바닥 구조물의 동적안정 해석시 필요한 불안정 영역들을 결정하고 지반의 특성에 따른 판의 거동을 파악함으로써 건축물의 기초 구조 및 바닥슬래브의 효율적인 설계를 하는데 그 목적이 있다.

2. 유한요소 해석

2-1. 변단면 후판

장방형 후판의 x축 두께만 선형으로 증가하는 변단면 후판을 고려하면 판의 두께는 다음과 같다.

$$h(x) = h_0 \left(a \frac{x}{a} + 1 \right) \tag{1}$$

여기서, $a = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$: 변단면률,

† 책임저자, 원광대학교 건축공학부, 정회원
E-mail : struct@wonkwang.ac.kr
Tel : (063) 850-6709.

* 전북과학대학 건축토목계열 조교수, 정회원

** 원광대학교 건축공학부 강의전담교수, 정회원

a : 판의 x 축 방향 길이

h_0 : $x=0$ 일 때 판두께

h_1 : $x=a$ 일 때 판두께

판단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 \left(a^{-\frac{x}{a}} + 1 \right) \quad (2)$$

여기서,

$$D_0 = E h_0^3 / 12(1 - \nu^2)$$

2-2. 강성 행렬 구성

판요소의 변형에너지, 운동에너지 및 외력이 한 일을 구하고 가상일의 원리를 이용하여 이들 변분을 썬으로 놓아 고유치 방정식을 얻는다.

판요소 해석을 위해 8절점 Serendipity 요소계를 사용하며, 임의 점의 변위와 회전 변위의 관계를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \quad (3)$$

여기서,

w : 판요소의 수직변위,

θ_x, θ_y : 판요소의 x, y 방향 회전변위,

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}]$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (4)$$

판요소를 무차원 변수 ξ, η 를 이용하여 8절점 Serendipity 요소계의 형상함수를 나타내면 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} \left\{ (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta) (1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi \xi) (1 - \eta^2) \right\} \quad (5)$$

$(i=1, 2, \dots, 8)$

분할된 판 요소의 운동 에너지 (T_e), Winkler지반 강성과 전단 지반 강성을 포함한 판요소의 변형 에너지 (U_e), 한방향 압축만을 고려한 외력에 의한 일 (W_e)을 구하여 전체 판에 대해 조합하고 가상일의 원리에 의한 Hamilton 방정식에 적용시키면 다음과 같다.

$$[K_M] \{\ddot{\delta}\} + [K_E] - [K_G] \{\delta\} = 0 \quad (6)$$

여기서,

$[K_M]$: 전체 판에 대한 질량행렬

$[K_E]$: 전체 판에 대한 강성행렬

$[K_G]$: 전체 판의 기하강성행렬

$\{\delta\}$: 전체 판의 절점 변위

$$\{\ddot{\delta}\} = \frac{\partial^2 \{\delta\}}{\partial t^2}$$

2-3 동적 안정 방정식의 구성

동적안정문제를 다룰 경우 σ 는 정응력 부분과 동응력 부분의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \alpha \sigma_{cr} + \beta \sigma_{cr} \cos \bar{\omega} t = \sigma_0 + \sigma_t \cos \bar{\omega} t \quad (7)$$

여기서,

α : 좌굴응력에 대한 정응력비

β : 좌굴응력에 대한 동응력비

$\bar{\omega}$: 동응력의 진동수, σ_{cr} : 정적 좌굴응력

σ_0 : 평균응력, σ_t : 응력진폭

식(7)을 식(6)에 대입함으로써 다음 행렬 형태의 Mathieu - Hill 방정식을 얻는다.

$$[K_M] \{\ddot{\delta}\} + [K_E] - \alpha \sigma_{cr} [K_{GS}] - \beta \sigma_{cr} [K_G] \cos \bar{\omega} t \{\delta\} = 0 \quad (8)$$

여기서

$[K_{GS}]$: 평균응력 σ_0 의 영향을 나타내는 기하강성행렬

$[K_G]$: 주기응력 진폭 σ_t 의 영향을 나타내는 기하강성행렬

식(8)의 Mathieu - Hill 방정식은 주기 $2T \left(= \frac{4\pi}{\omega} \right)$ 인 해

$\delta(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\bar{\omega}}{2} t + b_k \cos \frac{k\bar{\omega}}{2} t \right)$ 로 가정할 수 있으므로 이 해를 식(8)에 대입하여 a_k 와 b_k 에 대한 $k \times k$ 행렬식을 일차 근사화하면 다음식이 된다.

$$\left\{ [K_E] - \alpha \sigma_{cr} [K_{GS}] \pm \frac{1}{2} \beta \sigma_{cr} [K_G] - \frac{\bar{\omega}^2}{4} [K_M] \right\} = 0 \quad (9)$$

평균응력과 응력진폭의 영향을 동일하게 취하여 $[K_{GS}] = [K_G] = [K_G]$ 로 하면 식(10)은 다음과 같다.

$$\left\{ [K_E] - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) \sigma_{cr} [K_G] - \frac{\bar{\omega}^2}{4} [K_M] \right\} = 0 \quad (10)$$

식(10)에서 정적응력 계수비 α 와 동적응력계수비 β 값에 따른 판의 진동수비 $\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{\text{면내응력의 진동수}}{\text{판의 고유진동수}} \right)$ 를 구하여 동적 안정의 영역을 얻을 수 있다.

3. 비교 분석 및 적용

정방형 후판의 형상, 면내응력, 지지조건 등이 대칭이므로 후판의 1/2 만을 모델링하고 2장의 이론을 근거로 개발된 동적안정프로그램을 이용하여 좌굴응력, 고유진동수 및 정면내 응력을 받는 경우 고유진동수를 구하고, 수렴성 및 정밀도를 기존해와 비교한다. 탄성지반에 지지된 정방형판과 지지되지 않는 정면내응력을 받는 후판의 고유진동수를 구하여 기존해와 비교한다.

후판해석시 Winkler지반강성 k_w 와 전단지반강성 k_g 대신 무차원 Winkler 지반변수 $WFP (k_w a^4/D, a: \text{판길이}, D: \text{휨강성})$ 와 전단지반변수 $SFP(k_g a^4/D)$ 를 사용한다.

3-1 비교분석

유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 해석의 정확성을 검토하였다.

table 1. Comparison of Natural Frequency of plates on Pasternak Foundation ($\lambda^2 = \alpha a^2 \sqrt{\rho/D_0}$)

WFP	Reference ⑥	This Study	Error(%)
0	22.21	22.25	0.18
10	22.41	22.47	0.25
10^2	24.27	24.31	0.15
10^3	38.06	38.09	0.08
10^4	99.45	99.66	0.21

table 2. Comparison of Natural Frequency of Tapered Thick Plate

$(\lambda^2 = \alpha a^2 \sqrt{\rho/D_0})$

Taper Ratio	Reference ⁵⁾	This Study	Error(%)
0.2	21.59	21.59	0.01
0.4	23.51	23.45	0.19
0.6	25.38	25.29	0.33
0.8	27.23	27.08	0.56

table 1은 SFP 가 10일 때 WFP 의 변화에 따라 평균

의 고유진동수를 구하여 기존해와 비교한 것으로 최대 0.28%이내의 오차를 보였다. table 2는 지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 Taper Ratio의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고 문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 적은 오차로 본 연구를 위한 해석결과에 대한 신뢰성을 확인할 수 있었다.

table 3에서 좌굴계수 k 를 기존해와 본 해석해와 비교한 결과 요소분할 4×4 의 유한요소를 사용할 경우 기존해와 0.43%의 오차를 나타내어 높은 정밀도를 나타내고 있다.

table 3. Comparison of Buckling Ratio of Thick Rectangular Plate

h/b	Buckling stress(σ_{cr})		Buckling ratio(k)	
	This Study	Reference ⁷⁾	This Study	Reference ⁷⁾
0.001	761.920	759.200	4.0143	3.997
0.002	3029.4490	3036.800	3.9903	3.990
0.05	18689.620	18980.008	3.9388	3.937
0.1	71742.340	75920.034	3.7799	3.787
0.2	247430.800	303680.135	3.2591	3.264

3-2. 해석 예제

본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 fig.1에서 보는 바와 같이 탄성지반에 지지된 개구부를 갖는 변단면 후판의 동적 안정영역을 결정한다.

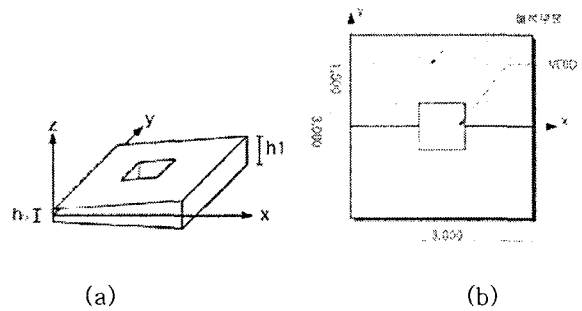


fig 1. Modeling of Tapered Opening Thick Plates

유한요소법을 적용한 해석을 위한 제원은 다음과 같다.

- 탄성계수(E) : $2.1 \times 10^5 (Mpa)$
- 포와송비(ν) : 0.167
- 판 지지상태 : 4변 단순지지
- 판의 체적당 질량(ρ) : $2.448 \times 10^{-6} kgf/cm^3$
- 판의 크기 : 300cm \times 300cm
- Taper ratio(TR) : 0, 0.25, 0.5
- 면내응력 : $0.4 \sigma_{cr}$
- Winkler 지반 파라미터 : 10, 100, 1000

전단 지반 파라미터 : 5, 10, 15

■ : 동적불안정영역 □ : 동적안정영역

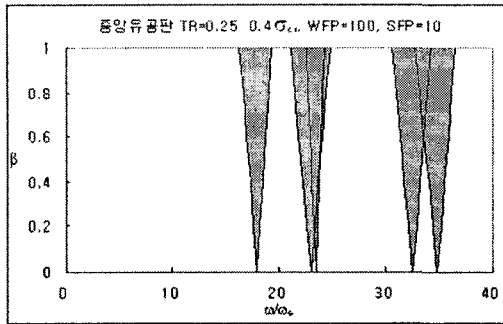


fig. 2 WFP=100, SFP=10, $0.4\sigma_{cr}$, TR=0.25

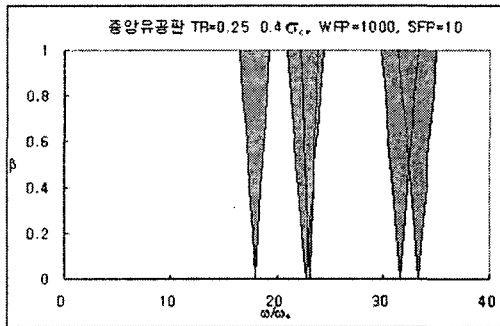


fig. 3 WFP=1000, SFP=10, $0.4\sigma_{cr}$, TR=0.25

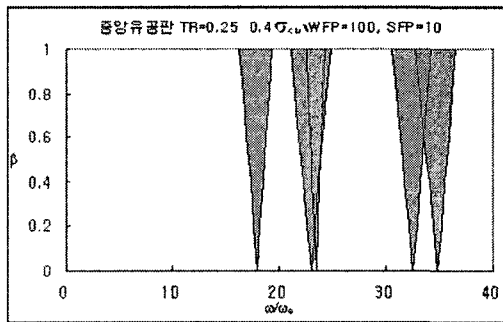


fig. 4 WFP=100, SFP=15, $0.4\sigma_{cr}$, TR=0.25

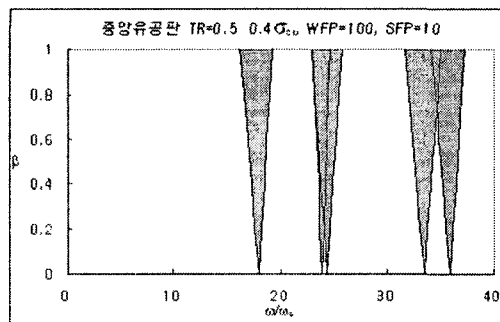


fig. 5 WFP=100, SFP=10, $0.4\sigma_{cr}$, TR=0.5

4. 결 론

본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 개구부를 갖는 변 단면 후판의 지반강성, 판의 변단면률, 면내응력의 변 화에 따라 동적 안정 해석을 통해 변단면판의 불안정 영역을 결정하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 후판의 좌굴응력, 변단면 후판과 지반에 지지된판의 고유진동수, 면내응력이 가해진 경우 고유진동수를 구하여 기존해와 적은 오차를 보여 본 해석을 위한 프로그램의 신뢰성을 얻을 수 있었다.
2. 탄성지반 매개변수와 전단지반 매개변수가 증가할수록 4차와 5차 mode가 중첩되고, 각 mode의 불안정영역 또한 축소되었다.
3. 판의 변단면률(TR)이 커질수록 1차 mode와 2차 mode 간격이 벌어지고 2차 mode와 3차 mode의 영역이 중첩되며 불안정영역이 축소됨을 볼 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) H. Matsunaga, 2004. "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundation", J. of Engineering Mechanics, Vol.126, pp27 ~ 34.
- (2) A. K. Srivastava, P. K. Datta and A. H. Sheikh, 2003. "Buckling and Vibration of Stiffened Plates Subjected to Partial Edge Loading," J. of Mechanical Sciences, Vol. 45, pp 73 ~ 93.
- (3) 이병구, 김일중, 오숙경, 이용수, 1998. "Pasternak 지반위에 놓인 보강판의 고유치해석," 한국전산구조공학회 논문집 18(2), pp 151 ~ 158.
- (4) 이용수, 김일중, 오숙경, 2003. "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동해석," 한국강구조학회 논문집 15(3), pp 291 ~ 298.
- (5) 이용수, 김일중, 오숙경, 2003. "비균질 Pasternak 지반위에 놓인 정방형 후판의 동적안정해석," 대한건축학회논문집 19권 4호(통권174), pp 45 ~ 54.