

대진폭 조화 운동을 하는 잠수구에 의한 비선형 조파현상의 시간영역 해석

김용직* · 하영록*

*부경대학교 조선해양시스템공학과

Time-Domain Analysis of Nonlinear Wave-Making Phenomena by a Submerged Sphere Oscillating with Large Amplitude

YONG JIG KIM* AND YOUNG ROK HA*

*Dept. of Naval Architecture and Marine Systems Engineering, Pukyong National University, Pusan, Korea

KEY WORDS: High-order spectral/boundary-element method 고차 스펙트럴/경계요소법 Large amplitude oscillation 대진폭 조화운동, Wave-making problems 조파문제, Nonlinear waves 비선형 파, Hydrodynamic forces 동유체력, Time-domain 시간영역

ABSTRACT: A high-order spectral/boundary-element method is newly adapted as an efficient numerical tool. In this method, the velocity potential is expressed as the sum of surface potential and body potential. Then, surface potential is solved by using the high-order spectral method and body potential is solved by using the high-order boundary element method. Through the combination of these two methods, the wave-making problems by a submerged sphere moving with the large amplitude oscillation are solved in time-domain. With the example calculations, nonlinear effects on free-surface profiles and hydrodynamic forces are shown and discussed.

1. 서 론

전산기를 이용하여 외부 자유표면 유동을 효율적으로 계산하기 위한 새로운 수치해법으로서 잠수체에 의한 조파현상을 시간영역에서 다룰 수 있는 3차원 고차 스펙트럴/경계요소법(high-order spectral/boundary-element method)이 개발된 바 있다(김용직 등, 2003). 본 논문에서는 이 수치해법을 이용하여, 자유수면 아래에서 물체가 대진폭 운동을 하는 경우에 따른 조파문제의 예로, 잠수된 구가 수면아래에서 단순 조화 운동을 하는 경우를 다루었다. 이로부터 물체의 대진폭 운동에 의한 발생파 및 동유체력에 있어서의 비선형 영향을 고찰하였다.

2. 시간영역 경계치 문제의 정식화

자유표면을 갖는 무한 깊이의 유체내에서 물체가 초기 정지상태로부터 주어진 운동을 하는 경우를 대상으로 한다. 유체는 비점성, 비압축성이고 유체의 운동은 비회전성이라고 가정하며 표면장력은 무시한다. 좌표계는 원점을 정수면에 두고, z 축이 상방향인 직교 좌표계를 택한다.

위의 가정으로부터 속도포텐셜 $\Phi(x, z, t)$ 를 도입하면 유체의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\nabla_x^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in fluid region, } t \geq 0 \quad (1)$$

여기서 $x = (x, y)$ 는 수평면 내의 벡터를 표시하고, t 는 시간을 나타내며, $\nabla_x = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 이다.

자유표면 $z = \eta(x, t)$ 에서의 속도포텐셜 값을 표면포텐셜(surface potential) $\phi^s(x, t)$ 를 도입하여 표현하면 다음과 같다.

$$\phi^s(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t) \quad (2)$$

그리고 각 순간의 자유표면상에서 만족되어야 하는 운동학적(kinematic) 경계조건과 동력학적(dynamic) 경계조건을 ϕ^s 를 이용하여 각각 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_x \phi^s \cdot \nabla_x \eta - (1 + \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \eta) \cdot \Phi_z(x, \eta, t) &= 0, \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \nabla_x \phi^s \cdot \nabla_x \phi^s - \frac{1}{2} (1 + \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \eta) \Phi_z^2(x, \eta, t) &= 0, \end{aligned} \quad \text{on } z = \eta(x, t), t \geq 0 \quad (3)$$

여기에서 g 는 중력 가속도이다.

각 순간의 물체표면상에서 만족되어야 하는 경계조건은

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V(t) \cdot n \quad \text{on the body surface, } t \geq 0 \quad (4)$$

교신저자 하영록: 부산광역시 남구 대연3동 599-1

051-620-6480 yrha@mail1.pknu.ac.kr

이며, 이 때 \mathbf{n} 는 유체 밖으로 향한 단위 법선 벡터이고, $V(t)$ 는 물체의 속도벡터이다. 물체로부터 무한히 떨어진 곳에서 만족되어야 하는 무한원방 경계조건은 다음과 같고,

$$\left. \begin{array}{l} \nabla\Phi \rightarrow 0 \\ \Phi < \infty \end{array} \right] \quad \text{as} \quad R \rightarrow \infty, t \geq 0 \quad (5)$$

여기에서, $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 이다. 정수면에서의 초기조건은 다음과 같다.

$$\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0, \quad t = 0. \quad (6)$$

3. 고차 스펙트럴/경계요소법을 이용한 수치해법

시간의 진행에 따른 수면변위 η 와 표면포텐셜 ϕ^s 의 변화는 자유표면 경계조건식(3)을 시간에 따라 적분하여 얻을 수 있으므로, 각 순간에서 공간상의 경계치 문제는 $z = \eta$ 에서 Dirichlet 경계조건으로서 ϕ^s 가 주어졌을 때 식(1)의 Laplace 방정식과 식(4), 식(5)의 경계조건을 만족하는 속도포텐셜 $\Phi(x, z, t)$ 를 구하는 문제가 된다.

속도포텐셜 Φ 를 파 기울기 정도의 차수를 가지는 $\phi^{(m)}$ 으로 M 항까지의 급수로 표현한 뒤, $z = \eta$ 에서의 표면포텐셜 ϕ^s 를 각각의 속도포텐셜 $\phi^{(m)}$ 의 $z=0$ 에 대한 Taylor 급수로 나타낸 뒤 다시 차수별로 분류하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^s(x, t) &= \Phi(x, \eta, t) \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial z^k} \phi^{(m)}(x, 0, t) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

그리고 임의의 물체운동을 포함하는 해를 구하기 위해서 $\phi^{(m)}$ 을 다음과 같이 파포텐셜(wave potential) $\phi_w^{(m)}$ 과 물체포텐셜(body potential) $\phi_b^{(m)}$ 의 합으로 나타낸다.

$$\phi^{(m)} = \phi_w^{(m)} + \phi_b^{(m)} \quad (8)$$

이 때, $\phi_b^{(m)}$ 은 식(1)의 Laplace 방정식과 식(5)의 무한원방 경계조건 외에 다음의 경계조건들을 만족하는 포텐셜로 한다.

$$\phi_b^{(m)} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad (9)$$

$$\nabla\phi_b^{(m)} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} V(t) \cdot \mathbf{n} - \nabla\phi_w^{(m)} \cdot \mathbf{n}, & m=1 \\ -\nabla\phi_w^{(m)} \cdot \mathbf{n}, & M \geq m \geq 2 \end{cases} \quad (10)$$

, on the body surface

$\phi_w^{(m)}$ 은 $z=0$ 에서 다음의 경계조건을 만족하여야 하며,

$$\begin{aligned} \phi_w^{(m)}(x, 0, t) &= \begin{cases} \phi^s(x, t), & m=1 \\ -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial z^k} (\phi_w^{(m-k)} + \phi_b^{(m-k)}) \right]_{z=0}, & M \geq m \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

이외에 식(1)의 Laplace 방정식과 식(5)의 경계조건을 만족하여야 한다.

각각의 경계치 문제의 해 $\phi_w^{(m)}$ 과 $\phi_b^{(m)}$ 의 합으로 얻어지는 속도포텐셜 Φ 는 식(7)의 급수가 유효한 범위내에서 자유표면에 주어진 Dirichlet 경계조건과 식(1), 식(4), 식(5)로 이루어진 각 순간의 경계치 문제의 해가 된다.

고차 스펙트럴/경계요소법(김용직 등, 2003)은 이상의 $\phi_w^{(m)}$ 과 $\phi_b^{(m)}$ 에 대한 공간상의 경계치 문제들을 각각 고차 스펙트럴법(Dommermuth and Yue, 1988)과 고차 경계요소법(홍사영, 1994)에 의해 풀고, 식(3)을 적절한 시간적분법에 의해 수치적 분함으로써 시간영역에서의 해를 순차적으로 계산해 나가는 방법이다. 이 때, 시간적분법으로는 4차 Runge-Kutta 적분법을 사용하였다.

파포텐셜 $\phi_w^{(m)}$ 의 수치계산을 위해 정수면의 계산영역을 x 축방향 길이 L , y 축방향 길이 W 로 정하고, 그 각각의 길이를 P 개와 Q 개로 균등분할하여 수평면상의 절점들을 정한다. 이 사각영역에서 각 차수별 포텐셜 $\phi_w^{(m)}$ 을 Eigen함수 전개식(복소 Fourier급수)으로 표현하고, 식(11)의 Dirichlet 경계조건을 만족하도록 Fast Fourier 변환법인 FFT를 이용하여 구한다.

물체포텐셜 $\phi_b^{(m)}$ 은 물체표면과 정수면 위의 그 이미지에 source와 normal doublet을 분포시켜 나타내고, 물체표면에 분포되는 특이점의 세기를 결정하기 위해서 Green정리로부터 얻어지는 제2종 Fredholm 적분방정식을 이용한다. 이의 수치계산을 위한 이산화는 8절점 경계요소법(8 node bi-quadratic element method; 홍사영, 1994)을 사용하였다.

4. 계산결과 및 고찰

자유수면 아래에서 물체가 대진폭 운동을 하는 경우에 대한 조파문제의 예로서, 잠수된 구가 평균 잠수깊이 h 에서 초기 정지상태로부터 동요진폭 a , 동요원주파수 ω 로 상하 방향 또는 수평 방향의 단순 조화 운동을 하는 문제들을 다룬다.

각각의 문제에 대하여 잠수깊이, 동요진폭, 그리고 동요파수를 변화시켜가면서 수치계산을 수행하였고, 이로부터 발생파형과 동유체력 등에 있어서의 비선형 영향을 고찰하였다.

수치계산에 있어서, 시간간격 Δt 는 주어진 각 동요파수에서 운동주기 T 의 1/20로 하였다. 자유표면의 절점수는 128×128 (16,384) 개로 두었으며, 물체표면의 경우는 구의 반쪽 면의 요소수를 16개, 절점수를 49개로 분할하여 사용하였다. 특히, 자유표면에 있어서의 계산영역은 잠수구가 동요할 때 생성되

는 파가 실제 진행하여 도달하는 거리보다도 충분한 여유를 두고 설정하였다. 그리고 물체에 작용하는 전체 힘은 물체의 운동에 기인한 동유체력만이 되도록 계산하였으며, 그 시간평균력과 조화성분력들은 과도현상이 충분히 제거된 준정상상태에서의 결과만을 평균하고 Fourier변환하여 구하였다.

수치계산 중 과도현상의 지속 영향을 살펴보기 위한 테스트 결과, 약 2주기의 동요운동 이후부터는 준정상상태에 도달함을 확인하였다(하영록, 2006). 따라서 모든 수치계산은 물체 동요운동의 5주기(100스텝)를 전체 계산시간으로 하여 수행하였다.

본 계산에서 R 은 구의 반경, K 는 동요파수(wave number, ω^2/g)이며, t^* 는 시간 t 에 ω 를 곱한 무차원 시간을 나타낸다.

$h=1.8R$, $a=0.25R$, $KR=1.0$ 일 때 상하동요하는 구에 의한 $t/T=5.00$ 에서의 비선형 발생과 결과를 Fig. 1에서 보여 주고 있으며, Fig. 2에서는 $y=0$ 에서의 선형 및 비선형 파형이 각각 보여 지고 있다. 이 때, 비선형 경우에는 비선형 파에서 여러 가지 성분파들의 중첩에 의한 비선형 효과를 볼 수 있다.

Fig. 3에서는 $h=2.0R$, $a=0.5R$, $KR=1.0$ 일 때의 본 수치계산에 의한 선형 및 비선형 동유체력 결과를 경계적분법을 이용하여 주파수영역에서 계산한 선형 결과(Ferrant, 1987) 및 시간영역에서 계산한 비선형 결과(Kang, 1991)와 각각 비교하고 있다. 이 때 Kang은 경계를 bi-cubic spline으로 표현한 곡면 요소를 사용하여 계산하였다. 그래프 상의 F_r 는 전체 동유체력을 나타낸다. 본 계산의 선형 및 비선형 결과가 각각 잘 일치함을 볼 수 있다.

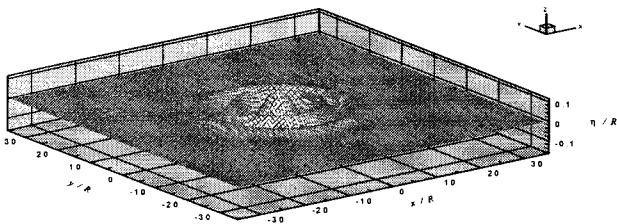
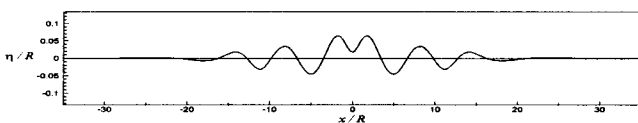
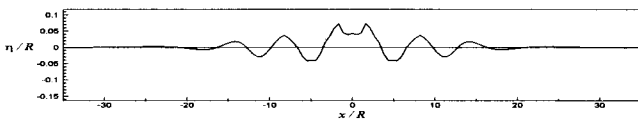


Fig. 1 Free-surface waves generated by the submerged sphere with simple harmonic heaving motion; Nonlinear case ($L/R=W/R=70$, $P=Q=128$, $\Delta t=T/20$, $M=5$, $\nu=1.0$)



(a) Linear case ($M=1$)



(b) Nonlinear case ($M=5$)

Fig. 2 Wave profiles by the heaving sphere on the center line $y=0$ (Calculation parameters are the same as in Fig. 1 except M)

Fig. 4에는 잠수깊이, 동요진폭, 그리고 파수의 변화에 따라서 계산된 동유체력의 무차원 1차 조화성분력 값들을 보여준다. 이 값들은 선형 운동방정식의 동유체력 계수들과 관계되며, 정현항 진폭 F_{1c} 가 부가질량력에 해당하고, 여현항 진폭 F_{1s} 가 조파감쇠력에 관계된다. $h=1.8R$, $a=0.25R$, 그리고 $KR=1.0$ 일 때 최대 크기의 부가질량 및 조파감쇠계수를 구해 보면, 잠수구의 반경 $R=1.0$ m 일 경우 각각 1816.7 kg과 344.1 kg/s 가 된다. 이 때 부가질량의 경우는 무한 유체중 해석해의 87%에 해당한다.

F_{1c} 및 F_{1s} 값들의 증감 폭에 있어서, 동요진폭 변화에 따른 영향보다도 수면과 가까운 평균 잠수깊이에 의한 영향이 더 크게 나타남을 알 수 있다. 이 때 F_{1c} 에서의 최대 변화량은 $KR=1.5$ 에서 평균 잠수깊이가 가장 작은 $h=1.8R$, $a=0.25R$ 일 때가 평균 잠수깊이가 가장 큰 $h=2.5R$, $a=0.25R$ 의 값에 비해 약 15.7% 감소하였다. F_{1s} 에서의 최대 변화량은 $KR=0.75$ 에서 $h=1.8R$, $a=0.25R$ 일 때가 $h=2.5R$, $a=0.25R$ 의 값에 비하여 약 206.3%가 증가하였다. 또한 $KR=0.25$ 근방의 낮은 파수영역을 제외하고 수면에 가까워질수록 조파감쇠가 현저히 증가함을 알 수 있다.

이로부터 선형 동유체력에 관계되는 1차 조화성분력의 경우는 잠수깊이에 따른 영향이 지배적이고 그 영향이 매우 크게 나타남을 알 수 있으며, 자유수면 근처에서 동요하는 물체를

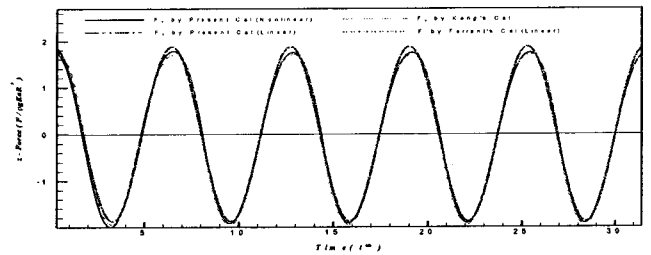


Fig. 3 Comparison of force time histories with others' results for the heaving sphere; z -Force ($h/R=2.0$, $a/R=0.5$, $KR=1.0$)

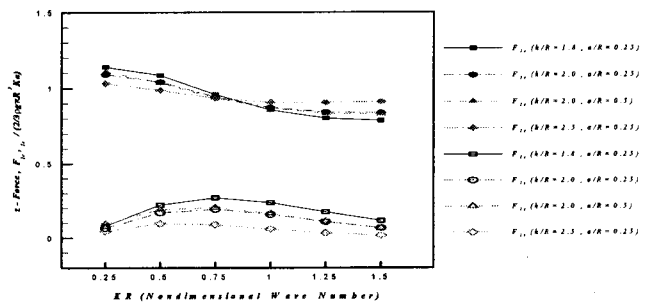


Fig. 4 1st-harmonic components of the force for the heaving sphere

다루는 조파문제 경우 반드시 고려되어야 할 것으로 여겨진다.

Fig. 5에서 시간평균력 F_0 는 상하동요 과정 중 자유수면에 가장 근접하는 $h=2.0R$, $a=0.5R$ 일 때가 가장 크게 변함을 알 수 있다. 그리고 낮은 파수영역에서는 상방향의 힘으로 높은 파수영역에서는 하방향의 힘으로 작용함도 알 수 있다.

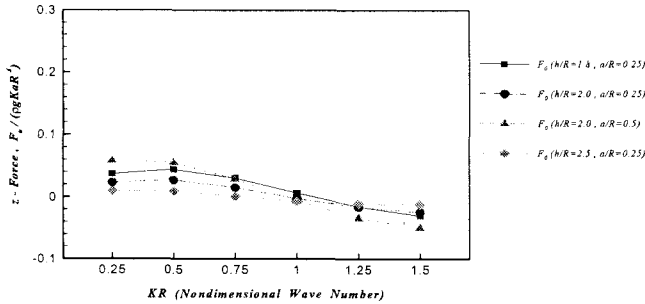


Fig. 5 Time-mean forces for the heaving sphere

Fig. 6에서 보여 지는 2차 조화성분력 F_{a2} 의 영향도 상하동요 과정 중 자유수면에 가장 근접하는 경우에서 가장 높게 나타나고, 낮은 파수영역으로 갈수록 영향이 크게 나타남을 알 수 있다. 이 때, 아래침자 a 는 정현항 및 여현항의 합성진폭을 나타낸다. 또한, 3차 조화성분력 F_{a3} 도 그 크기는 2차 조화성분력 보다도 작지만 같은 경향을 보인다(하영록, 2006).

잠수깊이 $h=2.0R$, 동요진폭 $a=0.5R$ 일 경우에 있어서의 시간평균력 F_0 와 고차 조화성분력 진폭들 F_{ak} 를 각각 1차 조화성분력 진폭 F_{a1} 에 대한 비로 나타내면, F_0 는 $KR=0.25$ 인 경우 약 2.5% 정도이고, $KR=1.5$ 인 경우는 약 3% 정도 되었다. 그리고 F_{a2} 는 $KR=0.25$ 와 $KR=1.5$ 인 각각의 경우에 대하여 약 10% 정도와 약 6% 정도였고, F_{a3} 는 $KR=0.25$ 와 $KR=1.5$ 인 각각의 경우에 대하여 약 4% 정도와 약 1% 정도였다.

이로부터 고차 조화성분력들의 비중은 무차원 파수 $KR=0.25$ 일 때에 가장 크게 나타나며, KR 이 증가 할수록 감소하는 것을 알 수 있었다. 즉, 낮은 파수영역에서 고차 조화성분력들에 의한 비선형의 영향이 가장 크게 나타남을 알 수 있었고, 이 현상은 Kang에 의하여 도출된 결과와 일치한다.

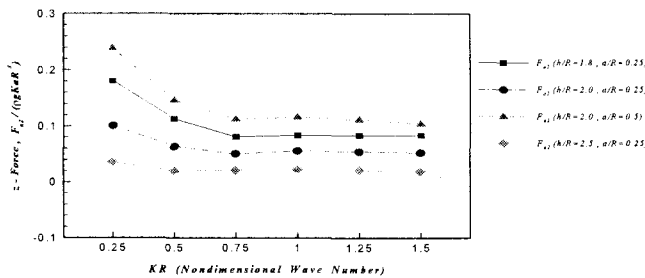


Fig. 6 2nd-harmonic force amplitudes for the heaving sphere

Fig. 7은 수평동요(편의상 surging으로 표기함)의 경우 무차원 동요파수 KR 에 따른 수직 방향 동유체력의 2차 조화성분력의 진폭 변화를 보여 주고 있는데, 상하동요의 경우에 비하

여 상대적으로 변화량은 작지만 평균 잠수깊이가 가장 작은 경우에 비선형 영향이 크게 나타난다.

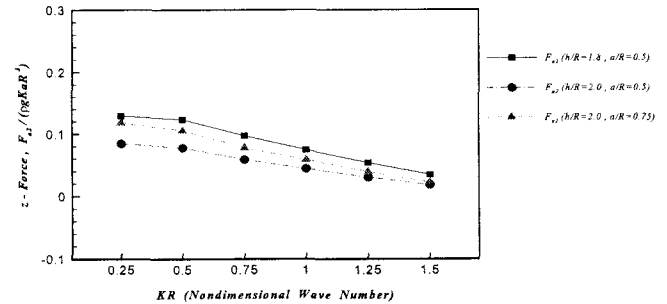


Fig. 7 2nd-harmonic force amplitudes for the surging sphere

5. 결 론

본 논문에서는 고차 스펙트럴/경계요소법(김용직 등, 2003)을 이용하여 잠수구의 대진폭 조화 운동에 의한 3차원 비선형 조파현상을 시간영역에서 다루었으며, 얻어진 주요결론은 다음과 같다.

(1) 잠수구에 의한 상하동요문제 경우 본 수치계산의 선형 및 비선형 결과는 각각 Ferrant(1987)의 선형 결과 및 Kang(1991)의 비선형 결과와 잘 일치한다.

(2) 선형 동유체력에 관계되는 1차 조화성분력은 잠수깊이에 따른 영향이 지배적이고, 그 영향은 매우 크게 나타난다.

(3) 동유체력과 그 고차 조화성분력들의 비선형 영향은 낮은 파수영역에서 두드러지게 나타나고, 2차 조화성분력의 비중은 무시할 수 없을 정도로 크게 나타난다.

(4) 동유체력의 시간평균력은 낮은 파수영역에서는 상방향 힘으로 나타나고, 높은 파수영역에서는 하방향 힘으로 나타난다.

참고 문헌

- 김용직, 하영록, 홍사영 (2003). "잠수체 주위 자유표면 유동의 수치계산", 대한조선학회논문집, 제40권, 제2호, pp 11-20.
- 하영록 (2006). "고차 스펙트럴/경계요소법을 이용한 3차원 비선형 조파문제의 시간영역 해석", 부경대학교 대학원, 조선해양시스템공학과, 공학박사학위논문.
- 홍사영 (1994). "고차 경계요소법에 의한 선체주위 유동해석", 서울대학교 대학원, 조선해양공학과, 공학박사학위논문.
- Dommermuth, D.G. and Yue, D.K. (1988). "The Nonlinear Three-Dimensional Waves Generated by a Moving Surface Disturbance", Proc. 17th Symp. on Naval Hydrodynamics.
- Ferrant, P. (1987). "Sphere immergee en mouvement de pilonnement de grande amplitude", Premiers Journes De L'hydrodynamique, Nantes.
- Kang, C.G. (1991) "Nonlinear Free Surface Flows for an Axisymmetric Submerged Body", SNAK, Vol 28, No 1, pp 27-37.