

Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동계산

김진환¹

Incompressible Flow Computations using a Hermite Stream Function

JIN WHAN KIM

KEY WORDS: Divergence Free Element 무발산 요소, Vector Potential 벡터 포텐셜, Solenoidal Basis Function 회전 기저 함수, Irrotational Basis Function 비회전 기저 함수

ABSTRACT: This paper describes a recent development on the divergence free basis function based on a hermite stream function. The well-known cavity problem has been used to compare the accuracy and the convergence of the present method with those of a modified residual method known as one of the stabilized finite element methods. The comparison showed the present method performs better in the accuracy and convergence.

1. 서 론

유체, 특히 액체나 저속의 기체 경우에는 밀도 변화를 무시함으로써 유체 운동에 대한 서술을 상당히 단순화할 수 있으며, 이 단순화된 유동 방정식을 비압축성 Navier-Stokes 방정식이라 한다. 이러한 운동 방정식의 단순화는 속도 벡터는 Solenoidal이어야 한다는 구속 조건을 제시하며, 오히려 이 구속 조건은 단순화된 운동 방정식의 풀이를 더 어렵게 하고 있다.

우리는 Helmholtz 정리로부터 모든 벡터는 회전 (Solenoidal) 성분과 비회전(Irrotational) 성분으로 직교 분리될 수 있음을 안다.[1] 이는 비압축성 Navier-Stokes 방정식도 예외가 아니며, 따라서 다음과 같이 분리된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = \pi^S (-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^S \quad (1.1)$$

$$\nabla p = \pi^I (-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^I \quad (1.2)$$

여기서, \underline{u} 는 유체 속도 벡터, p 는 압력, ν 는 동점성

계수이다. \underline{f}^S 는 중력항 \underline{f} 의 비보존적(Solenoidal) 부분을 의미하며, \underline{f}^I 는 \underline{f} 의 보존적 부분을 의미한다. 투사 연산자(Projection operator) π^S 와 π^I 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사하는 연산자이다.

회전(Solenoidal) 함수 중에서 가중 함수 \underline{v} 를 취하고 비회전(Irrotational) 함수 중에서 가중 함수 \underline{w} 를 취하여, 식 (1.1)과 (1.2)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$\left(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} \right) = - \left(\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) - \nu \left(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u} \right) + \left(\underline{v}, \underline{f}^S \right) \quad (2.1)$$

$$\left(\underline{w}, \nabla p \right) = - \left(\underline{w}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) - \nu \left(\nabla \underline{w}, \nabla \underline{u} \right) + \left(\underline{w}, \underline{f}^I \right) \quad (2.2)$$

2 사변형 요소에 대한 보간 함수

2.1 회전 보간 함수

$\psi^e(x, y)$ 를 사변형 요소 내의 유동 함수 $\psi(x, y)$ 의 근사값이라 하고 3차 Hermite 함수에 의하여 보간된다고 하자. (ξ, η) 좌표계를 가지는 Master 요소에 대한 Hermite

1 정회원, 동의대학교 기계공학과
E-mail: kimjw@deu.ac.kr

함수는 다음과 같다.[5]

$$g_{0i} = (1/8)(1 + \widehat{\xi}_i \widehat{\xi}(1 + \widehat{\eta}) \widehat{\eta}(2 + \widehat{\xi}_i \widehat{\xi} + \widehat{\eta} \widehat{\eta} - \xi^2 - \eta^2)) \quad (3.1)$$

$$g_{1i} = (-1/8) \widehat{\xi}_i (1 - \xi^2)(1 + \widehat{\xi}_i \widehat{\xi}(1 + \widehat{\eta}) \widehat{\eta}) \quad (3.2)$$

$$g_{2i} = (-1/8) \widehat{\eta}_i (1 - \eta^2)(1 + \widehat{\xi}_i \widehat{\xi}(1 + \widehat{\eta}) \widehat{\eta}) \quad (3.3)$$

여기서, 아래 첨자 'i'는 요소의 절점 번호를 나타내며, $\widehat{\xi}_i$ 와 $\widehat{\eta}_i$ 는 해당되는 절점 좌표값인 ± 1 을 가진다.

3차 hermite 함수에 대한 자유도는 미지수 그 자신과 각 방향에 대한 도함수들로 구성된다. 임의 절점 "i"에 대한 자유도를 $(\Psi_i,)$ 라 하면, 요소 내에서 유동 함수는 다음과 같이 구한다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \left(\Psi_i g_{0i} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} g_{xi} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} g_{yi} \right) \quad (4)$$

여기서,

$$g_{0i} = g_{0i} \quad (5.1)$$

$$g_{xi} = g_{10i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (5.2)$$

$$g_{yi} = g_{10i} \frac{\partial y}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (5.3)$$

(x, y) 좌표계와 (ξ, η) 좌표계 사이에서 기저 함수의 변환은 다음과 같다.

(6)

여기서 $\underline{g}_i = (g_{0i}, g_{xi}, g_{yi})$, $\widehat{\underline{g}}_i = (g_{0i}, g_{10i}, g_{01i})$ 이다. 변환 Jacobian J 는 아래와 같이 정의한다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

우리는 Hermite 보간 함수에서 x 및 y 도함수에 대한 함수들의 위치를 바꾸고 \pm 부호를 바꾸더라도 유동 함수의 보간에는 이상이 없음을 주목한다. 따라서 절점 "i"에 대한 자유도가 $(\Psi_i, \partial \Psi_i / \partial y, -\partial \Psi_i / \partial x)$ 혹은 (Ψ_i, U_i, V_i) 가 되도록 기존 hermite 함수들에서 순서

와 부호를 바꿀 수 있다. 그리하면 요소 내의 유동 함수에 대한 보간 함수는 다음과 같다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 (g_{0i}, g_{yi}, -g_{xi}) \underline{\Psi}_i^e \quad (8.1)$$

여기서, $\underline{\Psi}_i^e$ 는 요소 절점의 자유도를 의미하며 다음과 같다.

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i, U_i, V_i)^t \quad (8.2)$$

여기서, Ψ_i 는 유동 함수 ϕ 자신에 대한 자유도, U_i 는 x 방향의 속도 u 그리고 V_i 는 y 방향의 속도 v 에 대한 자유도이다.

회전 속도(Solenoidal velocity) 벡터 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 $\phi^e(x, y)$ 에 대한 curl을 취함으로써 얻어진다.

따라서

$$\begin{aligned} \underline{u}^e(x, y) &= \nabla \times \phi^e(x, y) \widehat{k} \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i}, g_{yi}, -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i}, g_{yi}, -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \end{aligned} \quad (9)$$

회전 속도에 대한 보간 함수를 $S_i(x, y)$, $i=1, \dots, 4$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} S_i(x, y) &= \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i}, g_{yi}, -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i}, g_{yi}, -g_{xi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{11i} & S_{12i} & S_{13i} \\ S_{21i} & S_{22i} & S_{23i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, S_{11i}, \dots, S_{23i} 는 부록 A에 이들의 도함수들과 함께 나타내었다. 따라서 요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 아래와 같이 구해진다.

$$\underline{u}^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 S_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e \quad (11)$$

이렇게 구해진 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 가 무발산임을 검증하는 것은 어렵지 않다. 아래에 이를 보기 위하여 식들을 정리 하였다.

$$\nabla \cdot \underline{u}^e(x, y) = \nabla \cdot \sum_{i=1}^4 S_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^4 \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \\ -\frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\psi}_i^e \\
&= \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \right) \underline{\psi}_i^e = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

2.2 비회전 보간 함수

비회전 속도 성분들은 스칼라 포텐셜 ($\phi(x, y)$)의 Gradient로부터 얻을 수 있다. 스칼라 포텐셜 ($\phi(x, y)$)의 보간 함수는 식(5)와 (6)에서 보인 3차 Hermite 함수 $g_i(x, y)$ 이다. 임의 사변형에서 $\phi^e(x, y)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\phi}_i^e \tag{13}$$

여기서 $\underline{\phi}_i^e$ 는 스칼라 포텐셜의 자유도로서 다음과 같다.

$$\underline{\phi}_i^e = (\phi_i \ \partial\phi_i/\partial x \ \partial\phi_i/\partial y)^t \tag{14}$$

비회전 기저 함수, $I_i(x, y)$ 는 스칼라 포텐셜, $\phi^e(x, y)$ 의 Gradient를 취하여 구하면 된다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\nabla \phi^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \nabla (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\phi}_i^e \\
&= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \end{pmatrix} \underline{\phi}_i^e
\end{aligned} \tag{15}$$

요소 내에서 $\nabla \phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 I_i(x, y) \underline{\phi}_i^e$ 로 근사화되기 때문에 비회전 기저 함수, $I_i(x, y)$ 는 다음과 같다.

$$I_i(x, y) = \begin{pmatrix} I_{11i} & I_{12i} & I_{13i} \\ I_{21i} & I_{22i} & I_{23i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \end{pmatrix} \tag{16}$$

3. 수치 계산

유동 해석의 새로운 기법들은 대체로 Chia 등[7]의 Cavity 유동에 대한 수치 결과들과 비교하여 종종 검증하는 관례로 본 연구에서도 이 문제에 대하여 살펴보았다. 그리고 무발산 요소의 계산 결과를 Illinca 등[6]이 제시한 수정 잔여치법(modified residual method)의 결과와 비교 검토하기로 한다. Cavity 유동에 대하여 비교할 레이놀즈(Re) 수는 400, 1000 그리고 3200이고 요소의 수는 32 x 32의 균일 요소로 하였다. 수정 잔여치법은 비압축성 유동 방정식의 유한 요소 계산에서 잔여치의 섭동을 이용하여 무발산 혹은 연속 방정식의 구속 조건을 완화하고자 하는 방법이다. 이 알고리즘은 잘 알려진 Hughes와 Brooks[7]의 Streamline Upwind Petrov Galerkin(SUPG)과 일맥상 통하며 Illinca 등은 이를 토대로 τ 로 알려진 내재적 시간 변수를 결정하여 비압축성 유동에 적용하였다.

레이놀즈 수가 400일 경우(Fig. 2), 수정 잔여치법과 무발산 요소법에 의한 결과들은 모두 Chia 등이 제시한 결과들과 잘 일치하고 있다. 이 경우 두 방법 간의 우열을 가리기가 어렵다. 레이놀즈 수가 1,000일 경우(Fig. 3), 완만하게 변하는 부분($0.2 < y < 0.9$)에서는 두 방법 모두 Chia 등의 값들에 근접하고 있으나, 그 이외의 부분에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 레이놀즈 수가 3,200일 경우(Fig. 4), 완만하게 변하는 부분($0.1 < y < 0.9$)에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치함을 볼 수 있고, 아래 부분($0 < y < 0.1$)에서는 수정 잔여치법에 의한 값들이 더 잘 일치함을 볼 수 있고, 윗 부분($0.9 < y < 1.0$)에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치하나, 전체적으로 수정 잔여치에 의한 해들이 더 잘 일치함을 보인다. 따라서 유동이 급격하게 변하지 않거나 혹은 층류 유동에서는 무발산 요소에 의한 해들이 더 정확함을 알 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서 비압축성 유동 해석을 위한 무발산 요소에 대하여 살펴보았다. 서론에서 언급하였지만, 벡터 포텐셜 혹은 유동 함수 ψ 의 적절한 보간을 위하여 Hermite 3차 함수를 도입하였다. 이를 이용하여 회전(Solenoidal) 및 비회전(Irrotational) 보간 함수를 유도하였으며, 이의 수행을 보기 위하여 잘 알려진 정사각형 Cavity 문제에 적용하여 적절함을 살펴보았다. 현재의 무발산 요소에 의한 방법은 레이놀즈 수가 3,200 이하에서는 잘 수행한다고 볼 수 있

으며, 그 이상에서는 더 세밀한 격자 구조가 필요하거나 혹은 안정화 기법의 적용이 필요하리라 본다.

현재의 방법은 유동 해석 뿐 아니라 전자장 해석과 같은 분야에도 적용 가능하기 때문에 더 심도있는 연구가 필요하며, 고차 요소 및 3차원에서 적용 가능하도록 개발할 필요가 있다고 하겠다.

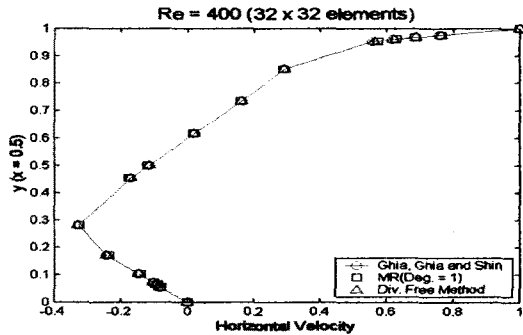


Fig. 1 Horizontal velocities at Re = 400.

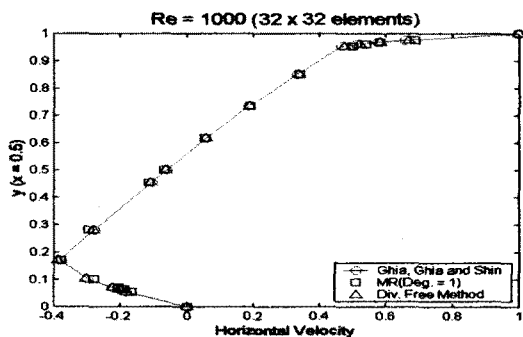


Fig. 2 Horizontal velocities at Re = 1,000.

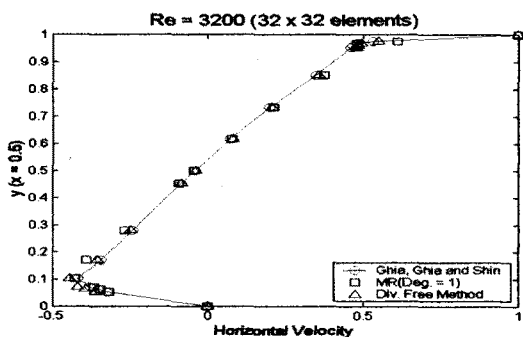


Fig. 3 Horizontal velocities at Re = 3,200.

참고문헌

- [1] C. Pozrikidis. (1977). "Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics", Oxford University Press.
- [2] Holdeman, J.T. (2002). "Recent Advances in the Finite Element Method for Incompressible Flow," USNCTAM14 Conference, Blacksburg, VA.
- [3] Holdeman, J.T. (2004). "I. Some Lagrange Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields", manuscript, submitted to Mathematics of Computation.
- [4] Holdeman, J.T. (2004). "II. Some Hermite Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields", manuscript, submitted to Mathematics of Computation.
- [5] Lapidus, L. and Pinder, G.F. (1982). "Numerical solution of Partial Differential Equations in Sciences and Engineering", John Wiley & Sons, Inc.
- [6] Ilinca, F., Hetu, J.F. and Pelletier, D. (2000). "On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems," Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol 188, pp 235-255.
- [7] Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T. (1982). "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," J. of Comp. Physics, Vol 48, pp 387-411.