

# $e^N$ -Method를 이용한 초음속 영역에서의 평판 및 원뿔형 경계층의 천이 예측

장제선\* · 박승오\*\*

## Transition Prediction of Flat-plate and Cone Boundary Layers in Supersonic Region Using $e^N$ -Method

Je-Sun Jang\*, Seung-O Park\*\*

**Keywords :**  $e^N$ -Method( $e^N$ -기법), Transition Prediction(천이예측), Linear Stability Theory(선형안정이론)

### Abstract

This paper is about the code that realizes the  $e^N$ -Method for boundary-layer transition prediction. The  $e^N$ -Method based on the linear stability theory is applied to predicting boundary-layer transition frequently. This paper deals with the construction of code, stability analysis and the calculation of N-factor. The results of transition prediction using the  $e^N$ -Method for flat plate/cone compressible boundary-layers are presented.

### 1. 서론

수송기관이나 유체기계의 해석에 있어서 천이영역을 예측하고 유동의 천이현상을 연구하는 것은 공학적으로 중요한 문제이다. 천이영역과 천이 전후의 층류영역과 난류영역에서 마찰 및 열전달 특성이 크게 달라지기 때문이다. 따라서 천이영역의 정확한 계산은 전체유동의 모사에 중요한 요소이므로 모델링 혹은 지배방정식을 이용한 천이현상의 이해와 천이예측기술은 수송 및 추진기관의 설계에 필요한 핵심적인 기술이다.

상용수송 항공기에서 천이가 발생하면 표면마찰이 크게 증가하는 난류영역이 되므로 높은 마속에서 층류를 유지시킬 수 있다면 비행기 날개에서 상당한 저항을 감소시킬 수 있다. 일반적으로 비행기 날개가 받는 항력 중 약 80%가 마찰항력을 고려할 때, 익형 위 유동에 대한 천이예측과 이를 바탕으로 천이를 제어하는 것은 비행체의 성능 및 열전달 향상 면에서 매우 중요하다. 또한 천이지점을 정확히 예측할 수 있다면 전체 유동해석의 정확도를 높일 수 있고, 천이영역의 제어를 통해 유동의 안정성을 지속시킴으로써 유체기계의 효율성을 높일 수 있다. 따라서 천이현상 연구는 유체역학적으로 큰 중요성을 가지고 있다. 하지만 기본적인 유동형태 이외에는 천이현상에 대해 잘 알려져 있지 않다. 실질적인 공학적인 문제에서는 기본 실험 자료를 바탕으로 한 실험적 상관관계식을 이용하고 있지만 다양한 유동에 적용하기에는 한계가 있다. 선형안정이론을 이용한  $e^N$ -Method 및 난류모델을 이용한 천이예측기법도 활용되고 있지만 응용범위 및 신뢰성이 명확히 설정된 상태는 아니다. 최근에는 선형이론에서 진보한 Parabolized Stability Equation(PSE)에 대한 연구도 천이예측에 기여하기 시작했다.

본 논문에서는 비행체의 천이예측에 활용되는  $e^N$ -method의 code 구성, 안정성 해석, N-factor계산 등을 다루고, 본 code를 이용해서 비압축성, 압축성에서 평판과 원뿔 경계층의 천이예측 결과를 제시하고 타당성을 검토한다.

### 2. 안정성해석 및 천이예측방법

#### 2.1 선형안정이론(Linear Stability Theory)

선형안정이론은 유동주위의 미소교란에 의한 불안정한 고유모드의 시간적, 공간적 불안정성을 분석하는 방법이다. 선형안정이론은 미소교란과 정상층류의 합을 일시적인 유동상태량의 초기조건으로 두고 동일한 경계조건을 만족하는 유동장이 Navier-Stokes방정식을 만족한다고 가정한다. 미소교란조건을 이용해서 기본 유동장에 대해 선형화시켜서 선형교란방정식을 유도할 수 있다. 교란은 식(1)과 같이 조화함수(또는 wavelike mode)로 나타낼 수 있고 고유치( $\alpha, \beta, \omega$ )의 허수값에 의해서 교란이 증폭 또는 감쇠됨을 알 수 있다.

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)] \quad (1)$$

교란의 정의에 따라 시간적인 불안정성을 해석하는 temporal stability theory와 공간적인 불안정성을 나타내는 spatial stability theory로 나타낼 수 있다[1]. 본 연구에서는 계산적으로 더 편리한 temporal theory를 사용했다. 하지만  $e^N$ -method를 이용하기 위해서 군속도를 이용해서 시간적 증폭률을 공간적인 증폭률로 변환하였다. M. Gaster(1962)에 의해서 시간적 증폭률(temporal growth rate)  $\omega_i$ 를 공간적 증폭률(spatial growth rate)  $\sigma$ 로 변환시킬 수 있다고 밝혀졌다.

\* 한국과학기술원 항공우주공학과, acrotoro@kaist.ac.kr

\*\* 한국과학기술원 항공우주공학과, sopark@kaist.ac.kr

$$\sigma = \frac{\omega_i}{\text{Re}(V_g)}, \quad \{V_g = (\omega_\alpha, \omega_\beta)\} \quad (2)$$

초음속 흐름에서 가장 불안정한 모드는 oblique wave로 마하 수가 1.6이상일 때는 55°~65°사이에서 가장 불안정하다[2].

## 2.2 e<sup>N</sup>-Method

e<sup>N</sup>-method 는 유동의 천이예측에 가장 보편적인 방법으로 선형안정성 방정식에서 amplification rate와 실험적인 상관관계로 N 값을 결정해서 천이지점을 예측하는 방법이다. 대부분의 교란성장 상관계가 선형적인 경우에 성공적인 천이예측이 가능하며 무소음 풍동, 실제 비행조건에서 교란은 선형적으로 증가하고 실험적인 상관관계를 만족시키는 N값의 범위는 9~11로 알려져 있다.

2차원 평균 유동장에서, β=0이라고 두면, 교란이 하류로 전파됨에 따라 교란의 amplitude의 비를 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{A}{A_0} = e^N \quad (3)$$

A<sub>0</sub>는 x<sub>0</sub>지점에서 지정된 주파수에 따른 amplitude이고 A는 하류의 어떤 지점 x에서 amplitude이다. 여기서 N은 식(4)과 같다. amplification rate값이 최대가 되는 가장 불안정성이 큰 값을 적분해서 구한다.

$$N = - \int_{x_0}^x \alpha_i(x) dx \quad (4)$$

## 3. 지배방정식

3차원의 국소평행(locally-parallel) 압축성 경계층유동의 선형안정성을 고려하기 위해 직교좌표계 x, y, z를 사용한다. y축은 벽면에 수직인 방향이고, x, z축은 여기에 평행한 방향으로 x축은 streamwise 방향을 나타내고, z축은 spanwise 방향을 나타낸다. 교란은 다음과 같은 조화함수의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \tilde{u} = \hat{u}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \\ \tilde{v} = \hat{v}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \\ \tilde{w} = \hat{w}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \\ \tilde{p} = \hat{p}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \\ \tilde{T} = \hat{T}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \end{cases} \quad (5)$$

정규모드해를 이용하면 교란방정식(disturbance equation)을 상미분방정식으로 유도할 수 있다. 압축성유동에서 선형적으로 증가하는 미소교란에 대한 다음과 같은 3차원 압축성 선형안정성 방정식으로 나타낼 수 있다[3].

$$\left( A \frac{d^2}{dy^2} + B \frac{d}{dy} + C \right) \phi = 0 \quad \phi = \begin{Bmatrix} \alpha \hat{u} + \beta \hat{w} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \\ \hat{T} \\ \alpha \hat{u} - \beta \hat{w} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

A, B, C는 유동의 안정성방정식을 구성하는 행렬로 평균유동의 특성량과 wavenumber α, β, 주파수 ω, temporal amplification factor ω<sub>t</sub>, 그리고 Reynolds수로 구성되어 있다. 여기서 ϕ는 교란(disturbance)의 크기를 나타내는 진폭(amplitude)으로 eigenfunction(또는 eigenvector)을 말한다.

속도와 온도에 대한 교란이 벽과 자유류에서 사라지게 된다는 조건을 이용해서 안정성방정식의 경계조건을 나타낼 수 있다.

$$y=0: \quad \tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{T} = 0 \quad (7)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T} \rightarrow 0 \quad (8)$$

앞의 식(6)과 경계조건인 식(7), (8)은 ω, α, β에 대한 고유치문제(eigenvalue problem)를 구성하게 된다. 고유치 문제는 주어진 Reynolds수 R에 대해 식(9)의 complex dispersion relation을 가진다.

$$\omega = \omega(\alpha, \beta) \quad (9)$$

## 4. 수치기법

### 4.1 유한차분법(Finite Difference Representation)

앞의 선형안정성 방정식(7)을 staggered mesh에서 2차 유한차분법을 이용해서 나타낸다. 먼저 boundary layer coordinate(y, 0<y<y<sub>e</sub>)를 computational domain(η, 0<η<η<sub>e</sub>)으로 algebraic mapping 한다.

$$\eta = \frac{gy}{L+y} \quad \left( g = 1 + \frac{L}{y_e} \right) \quad (10)$$

y<sub>e</sub>는 경계층의 끝단(edge)을 말하고 L은 scaling parameter로 L=2y<sub>0</sub>(U<sub>0</sub>(y<sub>0</sub>) = 1/2 U<sub>∞</sub>)이다.

2<sup>nd</sup>-order accurate central difference discretization (Malik & Orzag [4],[5])을 사용해서 차분을 한다.

#### (1) 2<sup>nd</sup> - order equation

$$\begin{aligned} f_1 A_j \left[ \frac{\bar{\phi}_{j+1} - 2\bar{\phi}_j + \bar{\phi}_{j-1}}{\Delta \eta^2} \right] + d_j [(f_2 A_j + f_3 B_j) \left( \frac{\bar{\phi}_{j+1} - \bar{\phi}_{j-1}}{2\Delta \eta} \right) + C_j \bar{\phi}_j] \\ + d_j [f_3 B_j \left( \frac{\bar{\phi}_{j+1} - \bar{\phi}_{j-1}}{\Delta \eta} \right) + C_j \left( \frac{\bar{\phi}_{j+1} + \bar{\phi}_{j-1}}{2} \right)] = 0 \quad (j=0, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (11)$$

#### (2) 1<sup>st</sup> - order equation

$$\begin{aligned} f_3 B_{j+1/2} \left( \frac{\bar{\phi}_{j+1} - \bar{\phi}_j}{\Delta \eta} \right) + C_{j+1/2} \bar{\phi}_{j+1/2} = 0 \quad (j=0, \dots, N-1) \quad (12) \\ f_1 = \frac{(g-\eta)^4}{g^2 L^2}, \quad f_2 = \frac{(g-\eta)^3}{g^2 L^2}, \quad f_3 = \frac{(g-\eta)^2}{gL} \end{aligned}$$

ϕ̄는 ϕ<sub>kj</sub> (k=1, ..., 5)의 원소를 가진다. ϕ<sub>1</sub>, ϕ<sub>2</sub>, ϕ<sub>4</sub>, ϕ<sub>5</sub>에 대해서 d<sub>1</sub>=1, d<sub>2</sub>=0, 압력 교란(ϕ<sub>3</sub>)에 대한 식에서는 d<sub>1</sub>=0, d<sub>2</sub>=1을 이용한다.

안정성방정식은 (5×5)block들을 가지는 block-tridiagonal system이 된다. 이 system에서 고유치를 구해서 안정성을 판단하게 된다.

#### 4.2 Global Eigenvalue Method

압축성 안정성방정식을 행렬문제로 공식화하면 식(13)과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 일반적인 complex matrix의 eigenvalue를 계산하는 알고리즘을 사용할 수 있다.  $\omega$ 는 eigenvalue이고,  $\bar{\phi}$ 는 eigenfunction을 나타낸다. 따라서 행렬식조건을 이용해서 고유치를 결정할 수 있다.

$$\bar{A} \bar{\phi} = \omega \bar{B} \bar{\phi} \quad (13)$$

$$\text{Det}[\bar{A} - \omega \bar{B}] = 0 \quad (14)$$

Global method를 이용하면 eigenvalue에 대한 초기값의 추측이 불가능할 때에도 사용할 수 있으므로 효율적이고 유용한 방법이다. 하지만 y방향의 각 node에 대한 eigenvalue를 모두 구하는 것이므로 initial value method보다 상대적으로 수치적으로 많은 계산을 필요로 한다.

#### 4.3 Local Eigenvalue Method

고유치에 대한 추측이 가능할 때 local method로 정확한 고유치(eigenvalue)를 구할 수 있다. Global method에 비해 빠른 속도와 작은 계산 메모리를 요구한다. Global method에서 구한 고유치(eigenvalue)를 초기치로 넣고 inverse Rayleigh iteration procedure로 행렬방정식( $\bar{A}\bar{\phi} = \omega\bar{B}\bar{\phi}$ )을 푼다.

$$(\bar{A} - \omega \bar{B}) \bar{\phi}^{k+1} = \bar{B} \bar{\phi}^k \quad (15)$$

$$(\bar{A} - \omega \bar{B})^T \bar{\psi}^{k+1} = \bar{B}^T \bar{\psi}^k \quad (16)$$

식(15)과 식(16)에서 고유함수와 켈레고유함수를 구할 수 있다. Block-tridiagonal형태로 fully pivoted LU method[6]를 이용하고 고유함수와 켈레고유함수는 임의의 함수분포를 가정해서 시작한다. 식(17)식과 같이 고유함수와 켈레고유함수를 이용해서 내적으로 고유치의 보정(correction)값을 구한다.

$$\omega_{k+1} = \frac{(\bar{\psi}^{(k+1)}, \bar{A}\bar{\phi}^{(k+1)})}{(\bar{\psi}^{(k+1)}, \bar{B}\bar{\phi}^{(k+1)})} \quad (17)$$

#### 4.4 군속도(Group Velocity)

군속도(group velocity)는 공간에 대한 안정성(spatial stability)과 시간에 대한 안정성(temporal stability)을 연결하는 중요한 변수이다.

$$\bar{V}_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}, \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) \quad (18)$$

dispersion relation 식(19)을  $\alpha$ 에 대해 미분해보면 식(21)로 나타낼 수 있다[3], [5].

$$L(\alpha, \beta, \omega(\alpha, \beta)) \bar{\phi} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} \bar{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \bar{\phi} + L \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \alpha} = 0 \quad (20)$$

Group velocity의 x성분은 식(21)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{(\bar{\psi}, \frac{\partial L}{\partial \alpha} \bar{\phi})}{(\bar{\psi}, \frac{\partial L}{\partial \omega} \bar{\phi})} \left\{ \dots (\bar{\psi}, L \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \alpha}) = (L^T \bar{\psi}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \alpha}) = 0 \right\} \quad (21)$$

### 5. 결과 및 해석

안정성 계산을 수행하기 위해 기본유동장인 평판과 원뿔에서의 경계층유동장은 EDDYBL을 이용해서 구하였다. 그리고 선형안정이론을 이용해서 특정 Reynolds수에서 시작해서 하류로 흘러감에 따라(Reynolds수가 증가함에 따라) 고유치를 계산해서 증폭률을 구하였다. 이를 통해 불안정성이 시작되는 critical Reynolds수 와 안정한 부분과 불안정한 영역을 경계짓는 그림1과 같은 neutral stability curve를 구할 수 있다. 그림2에서는 wave angle에 따른 temporal amplification rate를 나타내었다. 마하수 1.3일 때는 2D wave모드의 amplitude rate와 3D wave모드와의 차이가 크지 않지만 마하수가 커질수록 3D wave형태의 교란이 2D wave에 비해 상당히 커짐을 알 수 있다. 그림3은 마하수 3.0까지 가장 불안정한 3D wave에 대한 amplitude growth rate curve를 로그스케일로 나타내었고 이는 M. Mack[4]의 결과와 잘 일치함을 보였다. 천이발생지점에 대한 실험 데이터와 e<sup>N</sup>-method를 비교하기 위해 마하수 3.5에서 N-factor curves 그림4에서 구하였다. 가장 불안정한 mode (wave-angle이 65°)에서 N값이 9일 때 실험결과[7]와 잘 일치하는 것을 그림5를 통해 알 수 있었다. 이 실험결과를 adiabatic wall을 가지는 평판과 원뿔의 압축성 경계층에 대한 천이예측결과로 NASA Langley Research Center의 Low-disturbance pilot quiet tunnel에서 실험하였고 교란이 아주 작은 크기로 발생한다. 그림 6에서는 cone angle의 변화에 따른 N-factor curves로 cone angle이 커짐에 따라 천이가 천천히 일어나는 것을 나타내었다.

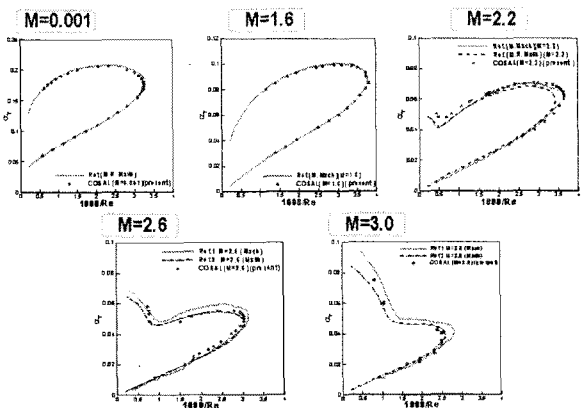


그림 1. Neutral stability curves for 2D-disturbance

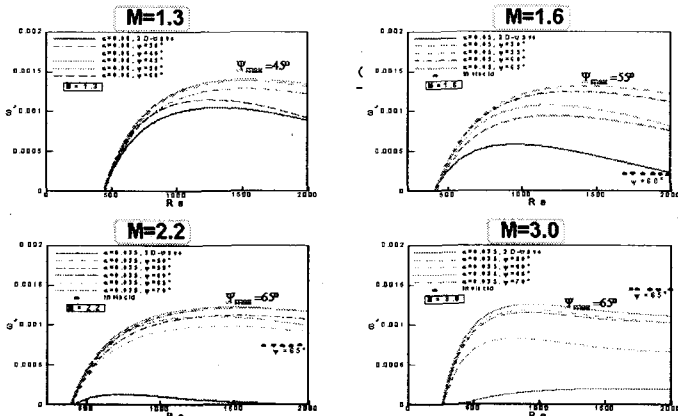


그림 2. Temporal amplification rate for wave angles

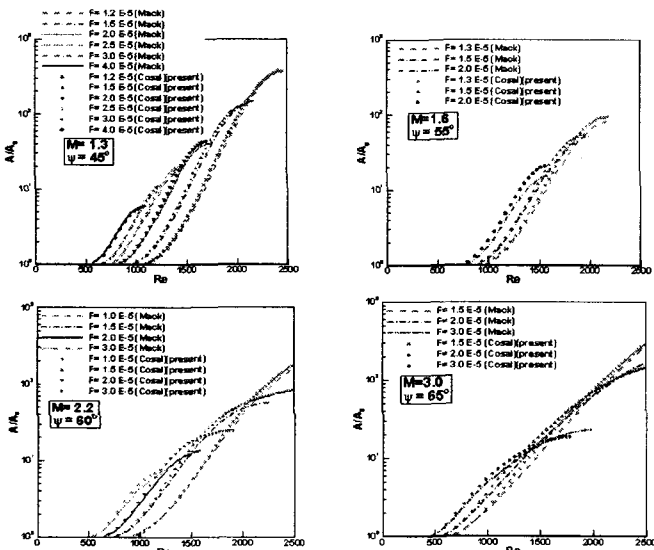


그림 3. Amplitude growth curves of 3D-disturbance at M=1.3~3.0

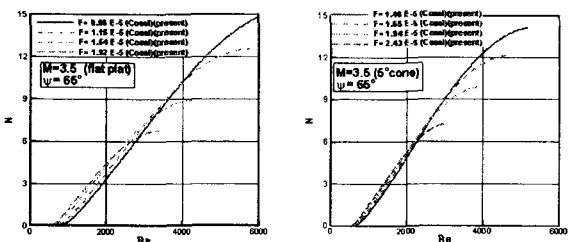


그림 4. N-factor curves for flat plate and cone at M=3.5

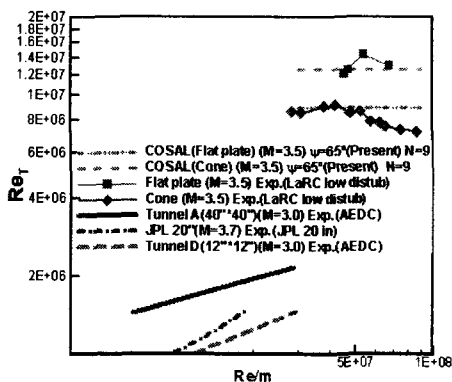


그림 5. Transition onset Reynolds number on flat plate and cone

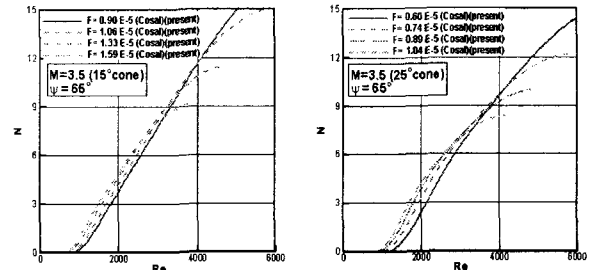


그림 6. N-factor curves for cone angle at M=3.5

## 6. 결론

본 논문에서는 3차원 압축성 경계층유동의 안정성해석과  $e^N$ -method를 이용한 천이예측에 대한 연구를 수행하였으며, 다음과 같은 결과를 얻었다.

첫째, 압축성경계층유동의 안정성방정식을 temporal method를 이용해서 마하수에 따른 neutral stability curve를 구했다. 이 곡선은 Reynolds수에 대한 시간적 증폭률을 계산해서 불안정성이 나타나는 영역을 나타내었다. 마하수가 증가함에 따라 critical Reynolds수가 커지고 경계층유동의 viscous instability는 감소하며 inviscid instability가 증가함을 잘 나타내었다. 이를 M. Mack의 결과와 비교해서 압축성안정성코드가 유동의 안정성을 정확하게 해석하고 있음을 검증하였다.

둘째, 마하수에 따라 3차원 교란의 amplitude growth curves를 비교해서  $e^N$ -method가 잘 수행됨을 알 수 있었다.

셋째,  $e^N$ -method로 평판과 원뿔에서의 압축성 경계층의 천이 지점을 예측할 수 있었다. 마하수와 wave angle에 따라서 N 값이 변하였고 무소음풍동에서 실험한 결과와 가장 불안정한 wave angle을 가지는 교란에 대해 N이 9일 때 천이예측지점과 잘 일치하였다.

## 후 기

본 연구는 국방과학연구소 및 서울대학교 비행체특화연구센터의 연구비 지원에 의한 연구결과입니다.

## 참고문헌

- [1] Mujeeb R. Malik "Stability Theory for Laminar Flow Control Design," American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1990, pp. 3-46
- [2] Leslie M. Mack, "Linear Stability Theory and the Problem of Supersonic Boundary-Layer Transition," AIAA Journal, Vol.13, No.3, pp. 278-289, 1975
- [3] Mujeeb R. Malik, "Finite-Difference Solution of the Compressible Stability Eigenvalue Problem," NASA Contractor Report 3584, NAS1-16572, June, 1982
- [4] Mujeeb R. Malik, "Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability," Journal of Computational Physics, Vol. 86, pp. 376-413, 1990
- [5] Mujeeb R. Malik, and S. A. Ozang, "Efficient Computation of the Stability of Three-Dimensional Compressible Boundary Layers," 1981
- [6] J.H. WILKINSON, "The Algebraic Eigenvalue Problem," Oxford University Press, 1965
- [7] F. J. Chen and M. R. Malik, "Boundary-Layer Transition on a Cone and Flat Plate at Mach 3.5," AIAA Journal, Vol. 27, No. 6, June, pp. 687-693, 1989