개선된 블럭펄스 적분연산행렬을 이용한 LTI 시스템 모델축소

Model Reduction of LTI systems via Improved BPF integral operation matrix

조영호 · 심재선
Cho YoungHo, Shim JaeSun

Abstract - 적분연산행렬은 구간연속 직교함수들이 시스템 동정, 해석, 제어기 설계 등의 분야에 널리 이용될 수 있는 계기를 제공하였다. 특히 블럭펄스 함수는 연산이 간단하기 때문에 선형 시변계와 비선형계 등의 제어문제 등에 널리 이용되어 오고 있다. 본 논문은 기존의 블럭펄스 함수 적분 연산행렬과 비교했을 때 적분오차를 줄이는 적분연산행렬을 소개하였으며, 이를 이용하여 고차 시스템의 응답에 가장 최적한 응답을 갖는 저차 시스템의 응답을 갖도록 최적응답 방법에 적용하여 대수적인 방법으로 저차 시스템의 파라메터를 구하는 알고리즘을 제시함으로서 유용성을 확인하였다.

Key Words : 직교함수, 블럭펄스함수(BPF), 모델축소(Model Reduction), 보간법(Interpoartion)

1. 서 론

블럭펄스 함수는 구분연속상수(piecewise continuous constant)값을 갖는 직교함수 집합으로 1969년에 전기공학자인 Harmuth에 의해 처음으로 사용되었다. 1970년대 이후 블럭펄스 함수는 월쉬(Walsh) 또는 하알(Haar)함수 등의 직교함수보다 연산이 간단하기 때문에 선형 시변계와 비선형계 등의 제어문제 등에 널리 이용되어 왔다[1-2, 4].

블럭펄스 함수를 이용하여 시스템 문제를 해결하는데 있어서 가장 중요한 문제중의 하나는 블럭펄스 함수의 적분 연산행렬에 의하여 적분된 함수 값이 실제 적분함수 값에 근접하도록 오차를 줄이는 것이라 할 수 있다. 그러나 기존 적분연산행렬에 의하여 얻어진 적분함수의 계수는 특정 구간에서 적분함수의 평균 면적과 같게 되므로 함수 값이 곡선인 구간에는 오차의 크기가 커지게 되는 단점을 갖지고 있다. 그러나 개선된 적분연산행렬은 라그랑지 보간법(Lagrange interpolation)을 이용하여 근사함수를 얻고, 이 함수로부터 얻어진 적분 연산행렬이므로 그 오차가 작다[2].

로보트나 항공기 등과 같이 복잡하고 통합된 첨단 기술의 발달로 실제적인 물리계는 고차 시스템으로 표현되는 경우가 대부분인데 시스템이 차수가 커지면 그 시스템의 동작을 이해하기가 어렵고 또한 제어기 설계가 복잡해진다. 따라서 고차 전달함수의 차수를 줄이거나 상태 행렬의 배열을 감소시켜 고차 시스템의 유사한 특성을 지니는 저차 시스템을 얻는다면 시스템의 해석과 제어기 설계가 용이해 질 것이다. 그래서 모델 축소에 관한 연구는 많이 진행되어 왔고 현재도 활발히 연구되어지고 있다[4-7].

본 논문은 기존의 블럭펄스 함수 적분 연산행렬과 비교했을 때 적분오차를 줄이는 적분연산행렬을 소개하였으며, 이를 이용하여 고차 시스템의 응답에 가장 최적한 응답을 갖는 저차 시스템의 응답을 갖도록 최적응답 방법에 적용하여 대수적인 방법으로 저차 시스템의 파라메터를 구하는 알고리즘을 소개함으로서 개선된 적분연산행렬의 유용성을 확인하였다.

2. 개선된 블럭펄스 적분 연산행렬

블럭펄스 함수는 구형파의 형태로 1과 0의 값만을 취하는 함수의 집합으로 구성되며, 특성을 갖고 있는 함수이다[3-4].

$$\psi_i(t)=\begin{cases}1, & i\Delta t \le t < (i+1)\Delta t \\ 0, & \text{그외 구간}\end{cases} \tag{2.1}$$

[비결합성(disjointness)]

$$\psi_i(t)\,\psi_j(t)=\begin{cases}\psi_i(t), & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{2.2}$$

[직교성(orthogonality)]

$$\int_0^{t_f}\psi_i(t)\,\psi_j(t)dt=\begin{cases}\Delta t, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{2.3}$$

단, $i, j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, m-1$이다.

구간 $t \in [0, t_f)$는 m개의 세부구간으로 나뉘며 세부 구간은 $\Delta t=\frac{t_f}{m}$이다.

구간 $t \in [0, t_f)$에서 적분 가능한 임의 함수 $f(t)$는 m개의 블럭펄스 함수로 식(2.4)와 같이 유한급수 전개할 수 있다[1-4].

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{m-1} f_i\,\psi_i(t) \tag{2.4}$$

여기서

$$f_i=\frac{1}{\Delta t}\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} f(t)dt \tag{2.5}$$

블럭펄스 적분연산행렬은 다음과 같다.

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = F^T\overline{P}\Psi(t) \tag{2.6}$$

단, $\Psi(t)=[\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),.....,\ \psi_{m-1}(t)]^T$ (2.7)

$$\overline{P}=\frac{\Delta t}{2}\begin{pmatrix}1&2&2&2&\cdots\cdots&2&2\\0&1&2&2&\cdots\cdots&2&2\\0&0&1&2&\cdots\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots\cdots&1&2\\0&0&0&0&\cdots\cdots&0&1\end{pmatrix} \quad (2.8)$$

기존의 적분 연산행렬에 의하여 적분된 함수의 블럭펄스 계수는 구간 $(i-1)\Delta t$와 $i\Delta t$에서 적분된 함수의 평균값이므로 커브인 구간에서는 오차가 커지게 된다. 그러므로 라그랑지 보간법을 이용하여 $t_0=(i-3)\Delta t$, $t_1=(i-2)\Delta t$, $t_2=(i-1)\Delta t$, $t_3=i\Delta t$의 네 점을 지나는 적분함수에 대한 근사 함수를 구하고, 그 함수에 대한 블럭펄스 계수를 구함으로서 더 작은 오차를 갖는 새로운 적분 연산행렬를 아래와 같이 얻을 수 있다[2].

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = F^T P\Psi(t) \quad (2.9)$$

여기서

$$F^T=[f_1 f_2 .....f_{m-1} f_m] \quad (2.10)$$

$$P=\frac{\Delta t}{2}\begin{pmatrix}1&\frac{7}{3}&\frac{23}{12}&2&2&\cdots\cdots&2&2\\0&\frac{9}{12}&\frac{7}{3}&\frac{23}{12}&2&\cdots\cdots&2&2\\0&0&\frac{9}{12}&\frac{7}{3}&\frac{23}{12}&\cdots\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&\cdots\cdots&\frac{9}{12}&\frac{7}{3}\\0&0&0&0&0&\cdots\cdots&0&\frac{9}{12}\end{pmatrix} \quad (2.11)$$

3. LTI 시스템의 모델 축소

일반적인 n차의 LTI 시스템은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Hx(t) \quad (3.1)$$

원하는 축소 시스템은 다음과 같이 r차 시스템으로 가정하자

$$\dot{x}_r(t)=A_r x_r(t)+B_r u_r(t)$$
$$y_r(t)=H_r x_r(t) \quad (3.2)$$

단, $r<n$

저차의 출력 $y_r(t)$가 임의의 입력에 대해 고차의 출력 $y(t)$에 접근 하도록 파라메터 (A_r, B_r, C_r)을 결정해야 한다. 임의 입력에 대한 고차와 저차의 출력 간의 오차는 다음과 같다.

$$e(t)=y(t)-y_r(t) \quad (3.3)$$

다음과 같은 자승 형태의 평가 함수를 고려하여

$$J=\int_0^{t_f} e^2(t)dt \quad (3.4)$$

이 평가 함수를 최소화하는 저차 시스템의 파라메터를 결정하는 것이 최적 응답 방법이다.

고차의 출력 $y(t)$와 저차의 출력 $y_r(t)$를 블럭펄스 급수 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$y(t)=\sum_{i=1}^{m} C_i\psi_i(t) \quad (3.5)$$

$$y_r(t)=\sum_{i=1}^{m} C_{ri}\psi_i(t) \quad (3.6)$$

식 (3.5)와 (3.6)을 식(3.4)에 대입하여 평가 함수를 구하면 다음과 같다.

$$J=\sum_{i=1}^{m}(C_i-C_{ri})^2 \quad (3.7)$$

식(3.1)를 전달 함수로 표현하고 적분을 취하면 다음과 같다.

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t) \quad (3.8)$$
$$=b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}u(t)+b_0u(t)$$

전달 함수를 미분 방정식으로 표현하면 일반적인 상태 방정식 표현에서 n^2+n개의 파라메터 수가 $2n$개로 감소됨을 알 수 있다.

식 (3.9) 양변에 n회의 적분을 취하여 적분 방정식으로 변환하면 다음과 같이 나타난다.

$$y(t)+a_{n-1}y^1(t)+...+a_1y^{n-1}(t)+a_0y^n(t)= \quad (3.9)$$
$$b_{n-1}u^1(t)+b_{n-2}u^2(t)+...+b_1u^{n-1}(t)+b_0u^n(t)$$

여기서 위 첨자는 적분 횟수를 의미한다.

고차 시스템의 입력 $u(t)$을 블럭펄스 함수 유한급수 전개하면 다음과 같다.

$$u(t)=\sum_{i=1}^{m} U_i\psi_i(t) \quad (3.10)$$

식 (3.5), (3.11)을 식 (3.9)에 대입하여 전개하면 다음과 같다.

$$C^T\Psi(t)+a_{n-1}C^TP\Psi(t)+\cdots+a_1C^TP^{n-1}\Psi(t) \quad (3.11)$$
$$+a_0C^TP^n\Psi(t)=b_{n-1}U^TP\Psi(t)+b_{n-2}U^TP^2\Psi(t)$$
$$+\cdots+b_1U^TP^{n-1}\Psi(t)+b_0U^TP^n\Psi(t)$$

식 (3.12)에서 $\Psi(t)$는 소거가 가능하다 그러므로 임의의 입력 $u(t)$가 결정되면 출력을 구할 수 있다. 그러므로 출력의 계수 벡터 C는 다음 식에서 얻어진다.

$$C=[I+a_{n-1}P^{'}+a_{n-2}P^{2'}+\cdots+a_1P^{n-1'}+a_0P^{n'}]^{-1}$$
$$\times[b_{n-1}P^{'}U+b_{n-2}P^{2'}U+\cdots+b_1P^{n-1'}U+b_0P^{n'}U] \quad (3.12)$$

식 (3.9)에 대한 축소 모델의 전달 함수를 다음과 같이 가정하여

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)}=\frac{\beta_{r-1}s^{r-1}+\beta_{r-2}s^{r-2}+...+\beta_1s+\beta_0}{s^r+\alpha_{r-1}s^{r-1}+\alpha_{r-2}s^{r-2}+...+a_1s+a_0} \quad (3.13)$$

단, $r<n$

고차 모델과 같은 절차에 따라 축소 모델을 식을 구하면 다음과 같다.

$$C_r+a_{r-1}P^TC_r+\cdots+a_1P^{r-1T}C_r+a_0P^{rT}C_r \quad (3.14)$$
$$=\beta_{r-1}P^TU+\beta_{r-2}P^{2T}U+\cdots+\beta_1P^{r-1pT}U+\beta_0P^{rT}U$$

식 (3.7)에 의해 고차와 저차 시스템 간의 출력의 최소 자승 오차를 최소화하려면 $\frac{\partial J}{\partial C_r}=0$을 만족해야 한다. 즉 $C=C_r$ 일 때 J가 최소가 됨을 알 수 있다.

따라서 식 (3.15)에 고차의 출력 계수 벡터 C를 대입하여 정리하면

$$C+a_{r-1}P^{'}C+a_{r-2}P^{2'}C+\ldots+a_1P^{r-1'}C+a_0P^{r'}C \quad (3.15)$$
$$=\beta_{r-1}P^{'}U+\beta_{r-2}P^{2'}U+\ldots+\beta_1P^{r-1'}U+\beta_0P^{r'}U$$

와 같이 되고, 식 (3.16)을 행렬 표기로 쉽게 표시해 보면 다음과 같다.

$$C=QR \quad (3.16)$$

R은 미지 파라메터 벡터로써 다음과 같다.

$$R=[\alpha_{r-1}\alpha_{r-2}\ldots\alpha_1\alpha_0\beta_{r-1}\beta_{r-2}\ldots\beta_1\beta_0]' \quad (3.17)$$

그리고 Q는 $m\times 2r$ 행렬로 다음과 같다.

$$Q=[-P^{'}C-P^{2'}C \quad \cdots \quad -P^{r-1'}C-P^{r'}C$$
$$P^{'}U \quad P^{2'}U\cdots P^{r-1'}U \quad P^{r'}U] \quad (3.18)$$

식 (3.17)은 미지수의 개수보다 더 많은 독립 방정식의 개수가 존재하는 경우로써 미지 파라메터 벡터 R은 정확한 해(exact solution)가 존재하지 않는 경우이다.

따라서 미지 파라메터 벡터 R은 $\|C-QR\|$를 최소화하는 최소 자승해 (least squares solution) 인 Q로 얻을 수 있다. 이 최소 자승해는 matrix pseudoinverse를 취함으로써 구해진다. 따라서 R 은 left pseudoinverse를 취하여 다음 식에서

$$R=[Q^TQ]^{-1}Q^TC \quad (3.19)$$

미지 파라메터 R이 구해진다[4].

여기서 $\|\cdot\|$ 는 Euclidean norm 를 나타낸다.

4. 적용 예

본 장에서는 먼저 주어진 모델로부터 제안한 방법으로 축소 모델을 구하고 타 방법들을 통하여 얻어진 축소 모델과 원 모델의 출력 특성을 비교하였다. 다음과 같은 3차의 시스템을 고려하자.

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6} \quad (4.1)$$

다음의 결과들은 여러 가지 축소 방법들에 의하여 얻어진 축소 모델 시스템이다(단 블럭펄스는 전개항수 $m=100$으로 하고 시간은 $t_f=10$으로 함).

지배극(dominant pole) 유지 방법 : $\frac{Y_r(s)}{U(s)}=\frac{1.3333333}{s^2+3s+2}$

연분수 전개 방법: $\frac{Y_r(s)}{U(s)}=\frac{-0.0150375s+1.142857}{s^2+2.6917293s+1.7142857}$

기존 BPF 적분 연산행렬: $\frac{Y_r(s)}{U(s)}=\frac{-0.0168s+1.1332}{s^2+2.6579s+1.7023}$

개선된 BPF 적분 연산행렬: $\frac{Y_r(s)}{U(s)}=\frac{-0.0169s+1.1331}{s^2+2.6574s+1.7020}$

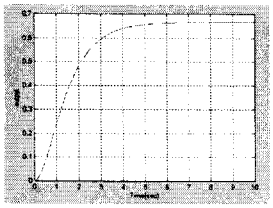

그림 4.1 고차 시스템의 출력

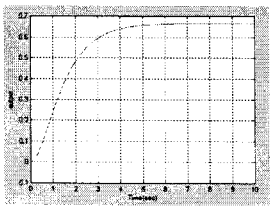

그림 4.2 BPF에 의한 저차시스템의 출력

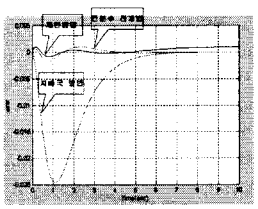

그림 4.3 출력 오차의 비교1

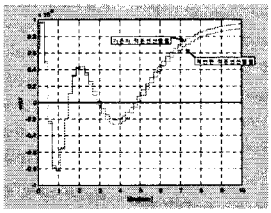

그림 4.4 출력 오차의 비교2

그림 4.1은 고차 시스템의 출력이고 그림 4.2은 개선된 BPF 적분연산행렬로 구한 저차시스템의 출력이다. 그림 4.3은 각 방법들의 오차를 비교한 것이고 그림 4.4는 기존의 적분연산행렬과 개선된 적분연산행렬로 얻은 저차 시스템의 오차를 비교한 것이다.

5. 결 론

본 연구에서는 최근 많이 이용되고 있는 블럭펄스 함수에 적분 연산행렬이 갖는 오차를 줄일 수 있는 새로운 블럭펄스 적분 연산행렬을 소개하였다. 그리고 이러한 적분 연산행렬을 이용하여 최적 응답 방법에서 축소 모델의 미지 파라메터를 구하기 위한 시행착오법의 번거로움을 피하도록 대수적인 방법으로 저차 시스템의 파라메터를 구하는 알고리즘에 적용하였다. 그리고 적용 예에서 개선된 적분연산행렬은 더 나은 결과 값을 얻음을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Palanisamy,K.R and Bhattacharyya, D.K., "System identification via block pulse functions," Int.J.Syst.Sci,Vol.12,pp.643-647, 1981

[2] 조영호외3, "보간법을 이용한 블럭펄스 함수에 대한 새로운 적분연산행렬의 유도", 대한 전기학회논문지, 48A권, 6호, 1999.

[3] Z.H.Jiang,W.Schaufelberger, "Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems," Springer-Verlag, 1992

[4] 안두수, "walsh 함수와 시스템 제어", 복두출판사, 2000

[5] Chen,T.C.and Chang, C.Y.and Han.K.W., "Model reduction usingthe stability equation and the continued fraction method," Int.J.Control, Vol.32, No.1,pp.81-94,1980.

[6] Sinha,N.K and Bereznai,G.T.,"Optimum approximation of high order system by low-order models, "Int.J.Control, Vol.14 , No.5,pp.951-959, 1971.

[7] Cheng- China Liu and Yen-Ping shih " Model reduction via Chebyshev Polynomials, "Comput. & Elect.Eng, Vol 12, No 3/4 1986, pp.89-100