

## DC 모터 제어를 통한 개선된 개인 스케줄링 제어기의 성능 검증

### Performance Verification of the Modified Gain Scheduling Controller by Speed Control of a DC Motor

천민규\*  
Cheon Minkyu

박민용\*\*\*  
Park Mignon

현창호\*\*  
Hyun Changho

이희진\*\*\*\*  
Lee Heejin

**Abstract** – This paper describes performance of the modified gain scheduling controller by speed control of a DC motor. The modified gain scheduling controller can perform tracking at more than one equilibrium points. The modified gain scheduling controller which considers transient response according to added zero shows better result of tracking performance than the unmodified gain scheduling controller shows.

**Key Words** : modified gain scheduling controller, unmodified gain scheduling controller, DC motor, tracking

#### 1. 서론

선형화를 통한 비선형 시스템 설계는 하나의 평형점 주위에서의 수행을 보장하는데 한계점이 있다. 개인 스케줄링은 선형화의 유효 범위를 확장함으로써 이와 같은 한계점을 극복한다. 개인 스케줄링은 스케줄링 변수라 불리는 하나 또는 그 이상의 변수를 통해 평형점을 변수화하여 시스템을 설계한다. 이러한 방법을 통해 몇 개의 평형점에서 시스템을 선형화하고, 각 점에서 선형 케한 제어기를 설계하고, 스케줄링 변수를 포함한 제어기를 통해 수행한다. 이러한 제어기를 개인 스케줄링 제어기라 한다. [1]

#### 2. 개인 스케줄링

##### 2.1 개인 스케줄링 제어기

다음과 같은 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x} = f(x, u, v, w) \quad (2.1)$$

$$y = h(x, w) \quad (2.2)$$

$$y_m = h_m(x, w) \quad (2.3)$$

이 때,  $f, h, h_m$ 은 미분 가능한 함수이고,  $x$ 는 상태 벡터,  $u$ 는 제어 입력,  $v$ 는 측정된 외부 입력,  $w$ 는 알 수 없는 상수,  $y \in R^p$ 는 출력,  $y_m \in R^m$ 은 측정된 출력을 의미한다.

최소한의 추적 오차  $e = y - r$ 를 갖도록 하는 출력 케한 제어기를 설계하고자 할 때 외부 입력은 다음과 같다.

##### 저자 소개

- \* 천민규 : 연세大学 전기전자학과 硕士課程
- \*\* 현창호 : 연세大学 전기전자학과 博士課程
- \*\*\* 박민용 : 연세大学 전기전자학과 助教授 · 工博
- \*\*\*\* 이희진 : 한경大学 정보제어학과 助教授 · 工博

$$\rho = \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \in D_\rho \equiv D_r \times D_v$$

$v = \alpha$  일 때, 정상 상태 오차를 0으로 만들기 위해 적분 제어기를 사용하고, 서서히 변화하는  $\rho$ 에 대해 오차를 0으로 만들기 위해 개인 스케줄링을 이용한다.  $\alpha$ 를 각각  $r$ 와  $v$ 에 대한 상수 값  $\alpha_r$ 와  $\alpha_v$ 로 나누어  $\alpha = [\alpha_r^T \alpha_v^T]^T$ 로 나타내고,  $\rho$ 를 스케줄링 변수로 사용한다. 적분 제어기의 설계를 위해 다음과 같은 유일한 쌍  $(x_{ss}, u_{ss})$ 이 존재한다고 가정한다.

$$0 = f(x_{ss}, u_{ss}, \alpha, w), \alpha_v, w \quad (2.4)$$

$$\alpha_r = h(x_{ss}, \alpha, w) \quad (2.5)$$

$\rho = \alpha$  일 때, 선형화를 이용하여 다음과 같은 적분 제어기를 설계할 수 있다. [3],[4]

$$\dot{\sigma} = e = y - r \quad (2.6)$$

$$\dot{z} = F(\alpha)z + G_1(\alpha)\sigma + G_2(\alpha)y_m \quad (2.7)$$

$$u = L(\alpha)z + M_1(\alpha)\sigma + M_2(\alpha)y_m + M_3(\alpha)e \quad (2.8)$$

여기서 제어기 이득  $F, G_1, G_2, L, M_1, M_2, M_3$ 은 미분가능하고, 다음과 같이 설계되어 질 수 있다.

$$A_c(\alpha, w) = \begin{bmatrix} A + BM_2C_m + BM_3C & BM_1 & BL \\ C & 0 & 0 \\ G_2C_m & G_1 & F \end{bmatrix}$$

이 때,  $A, B, C, C_m$ 은  $(x, u, v) = (x_{ss}, u_{ss}, \alpha_{ss})$ 에 의한 Jacobian 행렬

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, B = \frac{\partial f}{\partial u}, C = \frac{\partial h}{\partial x}, \text{ and } C_m = \frac{\partial h_m}{\partial x}$$

이다.

상태 케한의 경우, 식 (2.7)은  $y_m = x, L = 0, M_1 = -K_2, M_3 = 0, K = [K_1 \ K_2]$  하여 다음과 같이 설계 되어 질 수 있다. [4]

$$\begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

식 (2.6)–(2.8)에 의한 고정 이득 제어기 기반의 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x} = f(x, Lz + M_1\sigma + M_2h_m(x, w) + M_3e, v, w) \quad (2.9)$$

$$\dot{\sigma} = e = h(x, w) - r \quad (2.10)$$

$$\dot{z} = Fz + G_1\sigma + G_2h_m(x, w) \quad (2.11)$$

$$\dot{y} = h(x, w) \quad (2.12)$$

이 때,  $\rho = \alpha$ 이고, 평형 점은  $(x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$ 이다.  $\rho = \alpha$ 이고  $(x, \sigma, z) = (x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$ 일 경우를 선형화 하면 다음과 같다.

[3]

$$\dot{\xi} = A_f(\alpha, w)\xi_\delta + B_f(\alpha, w)\rho_\delta \quad (2.13)$$

$$y_\delta = C_f(\alpha, w)\xi_\delta \quad (2.14)$$

이 때,

$$\xi_\delta = \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ \sigma - \sigma_{ss} \\ z - z_{ss} \end{bmatrix}, \quad \rho_\delta = \rho - \alpha = \begin{bmatrix} r_\delta \\ v_\delta \end{bmatrix}, \quad y_\delta = y - \alpha_r$$

$$A_f = A_c, \quad B_f = \begin{bmatrix} -BM_3 & E \\ -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_f = [C \quad 0 \quad 0]$$

$$E = \frac{\partial f}{\partial v}(x, u, v, w) \Big|_{x=x_{ss}, u=u_{ss}, v=\alpha_r}$$

이다. 그러므로 이 시스템은  $\rho = \alpha$ 일 때, 평형 점  $(x_{ss}, u_{ss}, z_{ss})$ 에서 지수적으로 안정하다.

개인 스케줄링 제어기는 위의 식 (2.6)–(2.8)에서 고정 이득 제어기로부터 스케줄링 변수  $\rho$ 의 함수로써 이득  $F$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $L$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ 을 스케줄링 하여 계산되어 질 수 있다.

## 2.2 개선된 개인 스케줄링 제어기

위의 개인 스케줄링 제어기에서 적분기의 위치를 변화시킴으로써 더 나은 응답을 기대해 볼 수 있다. 즉 제어기의 입력단 쪽의 적분기를 출력단 쪽으로 이동시키고  $y_m$  대신  $y_m$ 을 사용함으로써 두 시스템은 같은 특성 방정식을 갖지만 개선된 개인 스케줄링 제어기는 추가적인 영점을 가지게 되어 과도 응답에 변화를 줄 수 있다. 이와 같은 방법으로 식 (2.6)–(2.8)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \psi \\ \dot{z} &= F(\alpha)z + G(\alpha)\lambda \\ u &= L(\alpha)z + M(\alpha)\lambda + M_3(\alpha)e \end{aligned}$$

이 때,  $\psi = \begin{bmatrix} e \\ y_m \end{bmatrix}$ ,  $G = [G_1 \quad G_2]$ ,  $M = [M_1 \quad M_2]$ 이다.

ψ로부터  $u$ 로의 전달함수는

$$\{L(\alpha)[sI - F(\alpha)]^{-1}G(\alpha) + M(\alpha)\} \frac{1}{s}$$

또는  $\frac{1}{s}\{L(\alpha)[sI - F(\alpha)]^{-1}G(\alpha) + M(\alpha)\}$ 라 할 수 있다. [4]

그러므로, 제어기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varphi = F(\rho)\varphi + G(\rho)\psi$$

$$\dot{\eta} = L(\alpha)\varphi + M(\alpha)\psi$$

$$u = \eta + M_3(\alpha)e$$

이를 다시 식 (2.6)–(2.8)의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\varphi} = F(\rho)\varphi + G_1(\rho)e + G_2(\rho)y_m \quad (2.15)$$

$$\dot{\eta} = L(\rho)\varphi + M_1(\rho)e + M_2(\rho)y_m \quad (2.16)$$

$$u = \eta + M_3(\rho)e \quad (2.17)$$

만약  $y_m$ 를 구할 수 없을 경우, 위의 식을 다음과 같이 바꿔 표현 할 수 있다.

$$\dot{\varphi} = F(\rho)\varphi + G_1(\rho)e + G_2(\rho)\vartheta \quad (2.18)$$

$$\dot{\eta} = L(\rho)\varphi + M_1(\rho)e + M_2(\rho)\vartheta \quad (2.19)$$

$$u = \eta + M_3(\rho)e \quad (2.20)$$

이 때,  $\vartheta$ 는  $e\dot{\zeta} = -\zeta + y_m$ ,  $\vartheta = \frac{1}{e}(-\zeta + y_m)$ 이고,

이 식에서의  $e$ 은 아주 작은 양의 상수이며,  $k > 0$ 에 대해  $\|\zeta(0) - y_m(0)\| \leq ke$ 을 만족한다. [1]

## 3. 수행

3.1 다음과 같은 이차 시스템을 고려해 본다.

$$\dot{x}_1 = \tan x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u$$

$$y = x_2$$

이 때, 단 하나의 측정된 신호는  $y$ 이고, 그러므로  $y_m = y$ 이다. 제어기의 목적은 출력  $y$ 가 기준 입력  $r$ 을 추적하는 것이며,  $r$ 을 스케줄링 변수로 사용한다.  $r = \alpha = constant$  일 때, 평형 방정식 (식 (2.4), (2.5)) 은하나의 다음과 같은 해를 갖는다. [3]

$$x_{ss}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad u_{ss}(\alpha) = \tan^{-1}\alpha$$

이 시뮬레이션에서는 다음과 같은 관측기 기반 적분 제어기 를 사용하였다. [4], [5]

$$\dot{\sigma} = e = y - r \quad (3.1)$$

$$\dot{x} = A(\alpha)\hat{x} + Bu + H(\alpha)(y - C\hat{x}) \quad (3.2)$$

$$u = -K_1(\alpha)\hat{x} - K_2(\alpha)\sigma \quad (3.3)$$

이 때, 각 행렬은 다음과 같다.

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

$$K_1(\alpha) = \begin{bmatrix} (1+\alpha^2)(3+\alpha^2) + 3 + \frac{1}{1+\alpha^2} & 3+\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$K_2(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}, \quad H(\alpha) = \begin{bmatrix} 10 + (4+\alpha^2)(1+\alpha^2) \\ (4+\alpha^2) \end{bmatrix}$$

제한 이득  $K_1(\alpha)$ 과  $K_2(\alpha)$ 은 폐회로의 고유값이

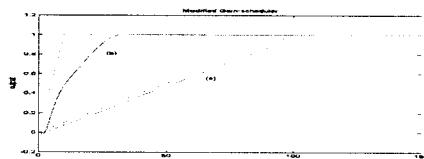
$-1, -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되도록 설계되었고, 관측기 이득  $H(\alpha)$

는 관측기의 고유값이  $-\frac{3}{2} \pm j\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 가 되도록 설계되었다.

이 고정 이득 제어기는 식 (2.6)–(2.8)에서  $z = \hat{x}$ ,  $F = A - BK_1 - HC$ ,  $G_1 = -BK_2$ ,  $G_2 = H$ ,  $L = -K_1$ ,  $M_1 = -K_2$ ,  $M_2 = M_3 = 0$ 일 경우이다. [4]

이 시스템에서  $y_m$ 은 존재하지 않으므로  $\epsilon = 0.01$ 으로 하여 식 (2.18)~(2.20)을 이용하여 설계된 개선된 개인 스케줄링 제어기의 의한 결과는 <그림 2.2>와 같다.

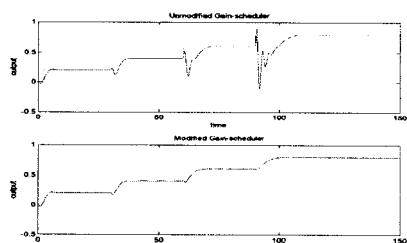
개인 스케줄링 제어기에서 기준 입력의 값이 바뀔 때, 시스템의 평형점은 재설정되고,  $0_+$ 에서의 시스템 초기 상태는  $0_-$ 에서의 평형 상태와 같다. 만약 초기 상태가 새로운 평형 점의 region of attraction에 속한다면, 이 시스템은 정상 상태에 도달할 것이다. 즉, 이 제어기는 선형화를 기반으로 하였으므로, 오직 지역적인 안정성만 보장할 수 있으므로 계단 입력의 변화 범위가 제약된다. 그러므로 큰 입력 변화에 대한 제어기 설계는 몇 개의 작은 입력 변화를 통해 이루어질 수 있다. 또 다른 방식은 서서히 입력을 변화시키는 방법이다. <그림 1>은 선형적으로 증가하는 입력에 대한 폐루프 시스템의 응답 그래프이며, 입력의 기울기가 클수록 추적 성과가 좋지 않음을 보여준다.



<그림 1> 램프 기준입력에 대한 개선된 개인 스케줄링 제어기의 추적 결과

<그림 2.1>는 개선되지 않은 개인 스케줄링 제어기를 기반으로 한 폐루프 시스템의 응답이다.

<그림 2.1>, <그림 2.2>에서 개선되지 않은 개인 스케줄링 제어기는 0인 정상 상태 오차를 추적하는 과정에서 과도 응답이 개선된 개인 스케줄링 제어기에 비해 훨씬 심하게 흔들림을 볼 수 있다. 이는 폐루프 전달 함수에서 추가되어진 영점에 의한 영향으로 볼 수 있다. 이 수행 과정에서는 불안정한 결과가 나오지 않았지만 이러한 과도 응답은 시스템의 불안정한 결과를 초래할 수 있다.



<그림 2.1> 개선되지 않은 개인 스케줄링 제어기 추적 결과  
<그림 2.2> 개선된 개인 스케줄링 제어기 추적 결과

### 3.2 다음과 같은 전류 전압에 의해 field circuit이 조절될 때의 field-controlled DC motor를 고려해 보자. [2]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 u + \theta_3 \\ \dot{x}_2 &= -\theta_4 x_2 + \theta_5 x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

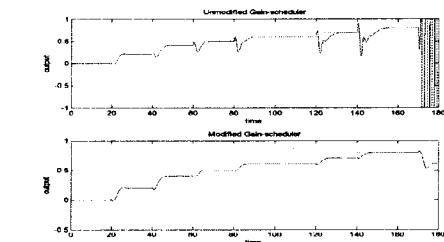
기준 속력  $r$ 을 추적하는 개인 스케줄링 제어기를 위의 예와 같이 관측기 기반 적분 제어기를 통해 설계하면 다음과 같다.

$$x_{ss} = \left[ 1 + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right], u_{ss} = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} & -1 \end{bmatrix}, B(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1+\sqrt{1-\alpha^2} \end{bmatrix}$$

이 때,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta_5 = 1$ ,  $\theta_3 = 2$ 이고, 그 이 외의 행렬과 제어기의 형태는 위의 예제와 동일하다.

위의 DC motor의 속력 제어 결과는 <그림 3.1>, <그림 3.2>와 같다.



<그림 3.1> 개선되지 않은 개인 스케줄링 제어기 추적 결과

<그림 3.2> 개선된 개인 스케줄링 제어기 추적 결과

아래쪽의 개선된 개인 스케줄링 제어기는 정확한 추적 결과를 보여주는 반면, 위쪽의 개선되지 않은 개인 스케줄링 제어기는 앞선 예제와 같이 진동이 개선된 제어기에 비해 큼 뿐 아니라 기준 입력이 증가하다 감소하는 부분에서 추적이 거의 되지 않았다.

## 4. 결론

개인 스케줄링 제어기를 통한 수행 결과는 하나 이상의 평형점에서 거의 정확한 추적 결과를 보여준다. 큰 기준 입력의 변화를 추적하는 데는 한계가 있었으나 점차적인 기준 입력의 변화를 통해 어느 정도 극복할 수 있다는 것을 알 수 있었다. 또한 적분기의 위치를 제어기의 출력단으로 이동시킨 개선된 개인 스케줄링 제어기는 추가되는 영점으로 인해 개선되지 않은 제어기에 비해 과도 응답에 있어 더 나은 결과를 보여 주었다.

## 참 고 문 헌

- [1] Hassan K.Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice Hall, pp 469-504.
- [2] G. R. Slemmon and A. Straughen, "Electric Machines", Addison-Wesley, Reading, MA, 1980
- [3] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall
- [4] Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", pp 143-183, 231-268
- [5] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Michael Workman, "Digital Control of dynamic Systems", pp 279-337