대칭면을 갖는 단일 진동체의 진동축 합성기법

*장선준[1], 최용제[2]
[1] 연세대학교 대학원 기계공학과, [2]연세대학교 기계공학부

Synthesis of Vibration Axes of a Rigid Body having Plane of Symmetry

*Seon Jun Jang[1], Yong Je Choi[2]
[1] Graduate School of Mech. Eng., Yonsei Univ., [2] School of Mech. Eng. Yonsei Univ.

Key words : Axes of vibration, Plane of symmetry, Geometrical design method, Screw theory

1. 서론

공간상에 탄성체에 의해 지지되는 강체의 진동응답은 관성행렬과 강성행렬로 표현된 강체의 운동방정식의 모우드 해석으로부터 수치적으로 구할 수 있다. 그러나 역으로 진동설계를 위한 해석적인 해를 구하는 것은 일반적으로 매우 복잡하므로 의미있는 결과를 얻기 위해서는 운동방정식을 단순화하는 조건을 부여한다. Harris[1]는 직교스프링들에 의해 지지되는 강체의 운동방정식의 비연성화조건을 제시하였고 이때 모우드들이 대칭면에 대해서 3 개의 in-plane modes와 3 개의 out-of-plane modes들로 분리되는 것을 보였다. Ball[2]의 나선이론적(screw theory) 관점에서 진동모우드들은 공간상의 진동축으로 해석할 수 있다. 본 논문에서는 진동축간의 관성행렬에 대한 직교관계를 이용하여 반작용렌치를 정의하고 대칭면을 갖는 진동시스템에서의 진동축과 반작용렌치 간의 기하학 관계를 보인 뒤 이를 이용하여 관성행렬과 강성행렬에 대한 직교성으로부터 모우드간의 관계에 대한 기하적 해석을 제시하였다. 이로부터 대칭면을 갖는 단일강체의 진동축의 합성기법을 제안하였다.

2. 진동축과 반작용렌치 간의 기하적 관계

임의의 평면을 대칭면으로 갖는 진동계는 회전변환에 의해서 *XY* 평면을 대칭면으로 갖는 진동시스템으로 나타낼 수 있다. 진동시스템이 대칭면을 가질 경우 진동축들은 3 개의 대칭면수직 진동축들 $\hat{\mathbf{X}}^{prep}$ (in-plane modes)과 3 개의 대칭면안 진동축들 $\hat{\mathbf{X}}^{in}$ (out-of-plane modes)로 분리되며 진동축간의 관계는 Fig. 1 과 같이 나타낼 수 있다.

i 번째 진동축을 $\hat{\mathbf{X}}_i$ 라 하고 관성행렬을 $\mathbf{M}$ 이라 할 때 다음과 같이 반작용렌치를 정의할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{w}}_i = \mathbf{M}\hat{\mathbf{X}}_i \,. \tag{1}$$

일반적으로 진동축들은 관성행렬 $\mathbf{M}$ 에 대해 다음과 같은 직교관계를 만족한다.

$$\hat{\mathbf{X}}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}}_j = 0 \,, \tag{2}$$

여기서 $i \neq j$ 이다.

식 (1)와 (2)으로부터 i 번째 진동축과 j 번째 반작용렌치 간의 관계식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{X}}_i^T \hat{\mathbf{w}}_j = 0 \,. \tag{3}$$

식 (3)는 진동축과 반작용렌치가 역관계(reciprocal relation)를 이룸을 의미한다. 따라서 대칭면을 갖는 진동시스템의 진동축과 반작용렌치들은 Fig. 2 과 같은 기하적 관계를 갖는다.

3. 모우드 직교 관계의 기하적 해석

XY 평면을 대칭면으로 갖는 진동시스템에서 각각 점 (x_i, y_i) 와 점 (x_j, y_j) 를 지나는 대칭면수직 진동축들을 관성행렬에 대한 직교관계를 나타내는 식 (2)에 적용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$x_i x_j + y_i y_j + I_{zz}/m = 0 \,. \tag{4}$$

식 (4)는 대칭면수직 진동축들이 무게중심을 수심으로 하는 삼각형의 세 꼭지점을 통과하는 것을 의미하고 있다 (Fig. 3-(a)).

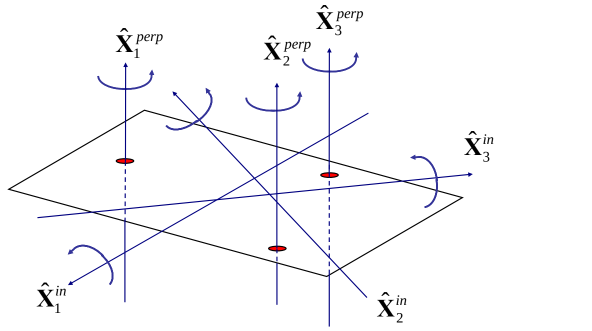

Fig. 1 Geometrical representation of in-plane and out-of-plane modes as three vibration axes perpendicular to the plane of symmetry and three vibration axes lying in the plane of symmetry respectively

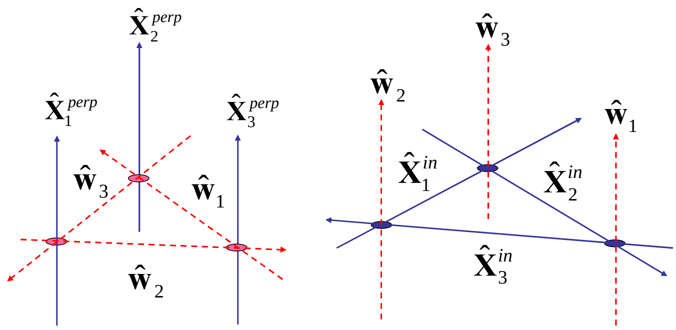

Fig. 2 Geometrical relationship between vibration axes and their reaction wrenches

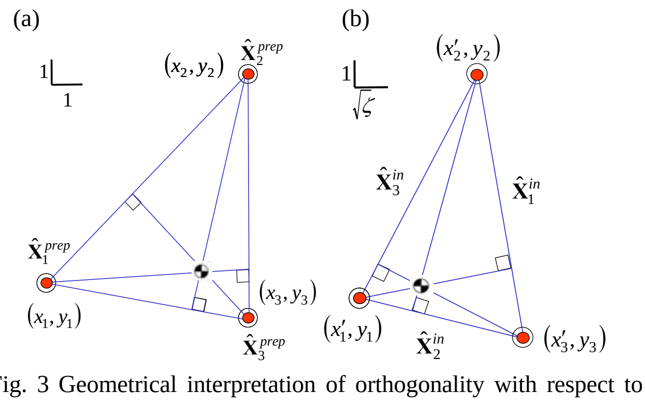

Fig. 3 Geometrical interpretation of orthogonality with respect to mass matrix

식 (2)로부터 반작용렌치들의 $\mathbf{N}$ 행렬에 대한 직교 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{N} \hat{\mathbf{w}}_j = 0 \,, \tag{5}$$

여기서 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$.

$\hat{\mathbf{w}}_i$ 와 $\hat{\mathbf{w}}_j$ 가 각각 점 (x_i, y_i) 와 점 (x_j, y_j) 에서 대칭면을 지

나는 대칭면안 진동축들의 반작용렌치라고 하면 식 (5)로부터 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$x_i' x_j' + y_i y_j + I_{xx}/m = 0\,, \tag{6}$$

여기서 $x' = \sqrt{\zeta}\,x$, $\zeta = I_{xx}/I_{yy}$.

따라서 식 (6)은 대칭면안 진동축들의 반작용렌치들이 (x', y)평면상에서 무게중심을 수심으로 하는 삼각형을 이루고 있음을 나타내고 있다 (Fig. 3-(b)).

강성행렬과 순응행렬을 고유렌치와 고유트위스트를 이용하여 기하적으로 분해하면 각각 다음과 같다[3].

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}\mathbf{K}_f\mathbf{F}^T & \mathbf{F}\mathbf{K}_f\mathbf{T}^T \\ \mathbf{T}\mathbf{K}_f\mathbf{F}^T & \mathbf{T}\mathbf{K}_f\mathbf{T}^T + \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}_\gamma\mathbf{\Gamma}^T \end{bmatrix}, \tag{7.a}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}\mathbf{A}_\gamma\mathbf{\Delta}^T + \mathbf{F}\mathbf{A}_f\mathbf{F}^T & \mathbf{\Delta}\mathbf{A}_\gamma\mathbf{\Gamma}^T \\ \mathbf{\Gamma}\mathbf{A}_\gamma\mathbf{\Delta}^T & \mathbf{\Gamma}\mathbf{A}_\gamma\mathbf{\Gamma}^T \end{bmatrix}, \tag{7.b}$$

여기서 $\begin{bmatrix} f_i^T & \tau_i^T \end{bmatrix}^T$ 는 고유렌치(eigenwrench)를 나타내며 $\begin{bmatrix} \delta_i^T & \gamma_i^T \end{bmatrix}^T$ 는 고유트위스트(eigentwist)를 의미한다. 또한 $\mathbf{K}_f = diag(k_1 \quad k_2 \quad k_3) = \mathbf{A}_f^{-1}$, $\mathbf{K}_\gamma = diag(k_4 \quad k_5 \quad k_6) = \mathbf{A}_\gamma^{-1}$.

좌표축이 고유렌치의 방향과 일치한다면 $(\mathbf{F} = \mathbf{I})$, 대칭면 조건을 적용하면 식 (7.a)에서 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_y \\ 0 & 0 & -h_x \\ -g_y & g_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

여기서 (h_x, h_y)는 대칭면에 수직한 고유트위스트가 대칭면과 만나는 점의 좌표이며 (g_x, g_y)는 대칭면과 수직한 고유렌치가 대칭면과 만나는 좌표이다. 마찬가지로 좌표축이 고유트위스트의 방향과 일치한다면 $(\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I})$, 대칭면 조건을 적용하여 식 (7.b)에서 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{\Delta} = -\mathbf{T}^T\,. \tag{9}$$

일반적으로 $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ 행렬에 대해 다음의 직교관계가 성립한다.

$$\hat{\mathbf{X}}_i^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_j = 0\,, \tag{10.a}$$

$$\hat{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{w}}_j = 0\,. \tag{10.b}$$

식 (10.a)의 강성행렬에 식 (8)을 대입하고 각각 점 (x_i, y_i)와 점 (x_j, y_j)를 지나는 대칭면수직 진동축들을 앞뒤로 곱하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\left(h_x'' + \frac{x_i'' + x_j''}{2}\right)^2 + \left(h_y + \frac{y_i + y_j}{2}\right)^2 = \frac{(x_1'' - x_2'')^2}{4} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{4} - \beta\,, \tag{11}$$

여기서 $x'' = \sqrt{\alpha}\,x$ 이고 $\alpha = k_2/k_1$, $\beta = k_6/k_1$.

식 (11)은 (x'', y)평면상에서 대칭면수직 진동축들이 대칭면과의 교점을 세 꼭지점으로 하는 삼각형의 각 변의 중심점들을 원점으로 하는 3 개의 원을 나타낸다. (Fig. 4)

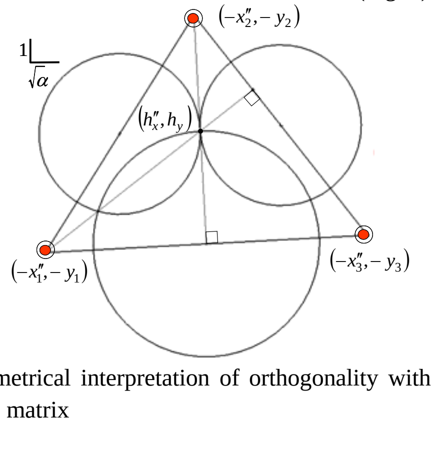

Fig. 4 Geometrical interpretation of orthogonality with respect to stiffness matrix

이 원들은 삼각형의 수심에서 동시에 만나며 수심의 좌표로부터 h_x , h_y 를 찾을 수 있다. 마찬가지로 식 (10.b)의 순응행렬에 식 (9)를 대입하고 각각 점 (x_i, y_i)와 점 (x_j, y_j)를 지나는 대칭면안 진동축들의 반작용렌치들을 앞뒤로 곱하면 다음의 식을 얻게 된다.

$$\left(g_x''' + \frac{x_i''' + x_j'''}{2}\right)^2 + \left(g_y + \frac{y_i + y_j}{2}\right)^2 = \frac{(x_1''' - x_2''')^2}{4} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{4} - \frac{1}{\varepsilon}\,, \tag{12}$$

여기서 $x''' = \sqrt{\chi^{-1}}\,x$ 이고 $\chi = k_5/k_4$, $\varepsilon = k_3/k_4$.

4. 대칭면을 갖는 단일 진동체의 합성기법

3 절의 기하적 관계를 이용하여 단일 진동체의 합성기법을 다음과 같이 제안할 수 있다.

(1) 대칭면 수직 진동축들이 대칭면과 만나는 3 점중 2 점의 좌표를 임의로 결정한다. 식 (4)로부터 나머지 한 점의 좌표가 결정되게 된다. 또한 I_{zz}/m 값이 결정되게 된다.

(2) 대칭면안 진동축들의 3 개의 교점중 2 점의 좌표를 임의로 결정한다. ζ 값을 임의로 결정하면 식 (5)로부터 나머지 한 교점의 좌표가 결정되며 I_{xx}/m 값이 결정되게 된다.

(3) α 값을 결정한 뒤 대칭면수직 진동축들의 좌표를 식 (11)에 적용하면 수심의 좌표로부터 h_x , h_y 값을 얻을 수 있으며 β 값을 결정할 수 있다.

(4) χ 값을 결정한 뒤 대칭면안 진동축들의 좌표를 식 (12)에 적용하면 마찬가지로 g_x , g_y 값과 ε 값을 결정할 수 있다.

(5) $\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}_i = \lambda \mathbf{M}\hat{\mathbf{X}}_i$, $\mathbf{C}\hat{\mathbf{w}}_i = \lambda^{-1}\mathbf{N}\hat{\mathbf{w}}_i$ 으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\Omega_i^2 = \lambda = \frac{k_1(y_i + h_y)}{m y_i}\,,\quad \frac{1}{\Omega_i^2} = \frac{1}{\lambda} = \frac{I_{xx}(y_i + g_y)}{k_4 y_i}\,. \tag{13}$$

식 (13)으로부터 임의 진동축의 주파수를 결정하면 나머지 진동축들의 주파수가 정해지며 이로서 진동계의 모든 파라메터들을 결정할 수 있다.

5. 결론

공간상에 탄성적으로 지지되는 단일 강체의 주어진 6 개의 진동축의 위치를 만족하는 강성과 관성행렬의 기하적 합성법을 제안하였다. 대칭면을 갖는 강체진동계의 진동축과 반작용렌치간의 기하적 관계를 보였고 관성, 강성행렬에 대한 직교성을 기하적으로 해석하였다. 이로부터 주어진 진동축의 위치와 주파수값을 순차적으로 구하는 해석기법을 도출하였다.

후기

이 논문은 2005 년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2005-041-D00056)

참고문헌

1. Harris, C., *Shock and Vibration Handbook* 4th, McGraw Hill, 1997.
2. Ball, R. S., *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, 1900.
3. Lipkin, H. and Patterson, T., "Geometrical Properties of Modeled Robot Elasticity: Part I-Decomposition," *ASME Design Technical Conference*, DE-vol. 45, pp. 179~185, 1992.