

전왜세라믹 내의 계면균열 해석

범현규¹, *김유환², 윤철근²

¹인하대학교 기계공학부, ²인하대학교 대학원

Analysis of an Interface Crack in an Electrostrictive Ceramic

H. G. Beom¹, *Y. H. Kim², C. K. Yoon²

¹Dept. of Mech. Eng., Inha Univ., ²Graduate School, Inha Univ.

Key words : Electrostrictive Ceramic, Interface Crack, Stress Intensity Factor, Electric Field, Electrical Small Scale Nonlinear Model

1. 서론

전왜세라믹은 전기장을 인가하면 전기장의 제곱에 비례하는 큰 변형률이 발생하는 재료로서 액추에이터(actuator)로 널리 이용되고 있다. 전왜세라믹에 전기장이 인가될 때, 미소균열이나 내부전극(internal electrode) 주위에서 전기장이 집중되어 부적합 변형률이 발생한다. 이로 인한 강한 응력은 전왜액추에이터의 내부전극 주위, 혹은 전왜재료와 전극사이의 계면에서 파괴를 일으켜, 액추에이터의 신뢰성에 악영향을 준다¹.

최근 전왜액추에이터의 신뢰성 향상 위한 파괴역학 연구가 중요하게 대두하고 있다. Ru등²은 전왜세라믹과 전극 사이의 계면균열에 대한 응력확대계수를 해석하였고, 전왜재료내의 균열보다 계면균열에서 파괴가 더 쉽게 발생함을 밝혔다. 전기적 소규모 포화모델을 적용한 기존의 연구²와는 다르게 또한 Beom³은 전기적 소규모 비선형 모델(electrical small-scale nonlinear model)을 이용하여 전기적 하중을 받는 전왜세라믹내의 반무한 균열에 대한 점근해를 구하였다. 전기장 확대계수(electric field intensity factor)가 균열선단의 특성을 결정함을 보였고, 절연균열에서는 균열이 열리지만, 전도균열에서는 균열선단 부분을 제외한 균열면이 닫힘을 보였다.

본 연구에서는 전기적 소규모 비선형 모델에 근거하여, 전왜세라믹과 전극 사이의 계면균열에 대한 응력확대계수를 계산한다.

2. 응력확대계수의 수식화

전왜세라믹은 전기장에 의하여 응력과 무관한 변형률이 발생한다. 이는 열변형률과 같은 고유변형률(eigen-strain)의 한 예이다. 고유변형률이 작용하는 탄성체에 대한 응력해석 문제는 Duhmel - Neumann 유사성에 의하여 체적력(body force)과 표면력(traction)이 존재하는 문제로 바꿀 수 있다. 탄성체의 체적력과 표면력은 점하중(point force)으로 생각할 수 있고, 점하중에 의한 균열선단의 응력확대계수는 $K_\alpha = h_{\alpha i} P_i$ 으로 표시할 수 있다. 응력확대계수는 다음과 같다⁴.

$$K_\alpha = \int_A h_{\alpha i} f_i dA + \int_\Gamma h_{\alpha i} t_i d\Gamma \quad (1)$$

여기서 $h_{\alpha i}$ 는 가중함수(weight function)이다. 체적력과 표면력은 각각 $f_i = -(C_{ijkl} \epsilon_{kl}^T)_{,j}$, $t_i = n_j C_{ijkl} \epsilon_{kl}^T$ 이다. 하첨자 $(i, j = 1, 2)$ 는 평면 Cartesian 좌표계의 성분을 나타낸다. 한 항에서 로마 하첨자의 반복은 첨자의 범위 1에서 2까지의 합을 나타낸다. 하첨자 α 는 파괴모드 I, II를 나타낸다. 등방성 전왜세라믹의 강성텐서와 전왜변형률은 다음과 같다.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$\epsilon_{kl}^T = Q[(1+q)D_k D_l - q(1+\nu)D_m D_m \delta_{kl}]. \quad (2)$$

여기서, δ_{ij} 는 Kronecker 델타이고, μ 는 전단계수(shear modulus)이고, $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ 이다. ν 는 Poisson의 비이다. 또한 D_i 는 전기변위(electric displacement)의 성분이고, Q 와 q 는 전왜계수이다. 체적력과 표면력을 대입하고, Gauss 정리를 적용하면 식 57

(1)은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$K_\alpha = \int_A h_{\alpha i, j} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^T dA. \quad (3)$$

여기서 콤마(comma) (,)는 평면 Cartesian 좌표에 대한 편미분을 나타낸다. 식 (2)를 식 (3)에 대입하면, 응력확대계수는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$K_\alpha = 2\mu \int_A U_{kl}^\alpha \epsilon_{kl}^T dA,$$

$$U_{kl}^\alpha = \frac{1}{2\mu} C_{ijkl} h_{\alpha i, j} = \frac{\nu}{1-2\nu} h_{\alpha i, i} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (h_{\alpha k, l} + h_{\alpha l, k}),$$

$$U_{kl}^\alpha \epsilon_{kl}^T = Q[(1+q)U_{kl}^\alpha D_k D_l - q(1+\nu)D_m D_m U_{kk}^\alpha]. \quad (4)$$

전기변위장과 가중함수를 식 (4)에 대입한 다음, 면적적분하면 전왜세라믹의 균열에 대한 응력확대계수를 구할 수 있다.

전기장이 커짐에 따라 전기변위는 전기장에 대한 비선형 특성을 보이며 Ramberg-Osgood 모델과 유사한 비선형 모델로 나타낼 수 있다³.

$$E_i = \frac{E_0}{D_0} D_i, \text{ for } D < D_0, \quad (5)$$

$$E_i = E_0 \left(\frac{D}{D_0} \right)^n \frac{D_i}{D}, \text{ for } D > D_0.$$

여기서 E_i 는 전기장이다. D_0 , E_0 는 전기적 항복(electrical yield)에 도달했을 때의 전기변위와 전기장의 크기이다. 또한 D_0/E_0 은 유전률(permittivity) ϵ 이고, $D = \sqrt{D_k D_k}$ 이다. n 은 전기적 비선형성의 정도를 나타내는 지수이다. 전왜세라믹에 전기장을 가하면 균열선단의 미소영역에서 전기장의 집중으로 인한 전기적 항복(electrical yielding)이 일어난다. R_0 을 전기적 항복영역의 반경이라고 하면 $R < R_0$ 인 영역 내에서 특이(singular)전기장파 전기변위는 다음과 같다³.

$$D_i = D_0 \left(\frac{J^E}{D_0 E_0 r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{D}_i. \quad (6)$$

여기서 J^E 는 절연균열(insulating crack) 선단의 전기적 특이성을 결정하는 보존적분이며, $J^E = -(1/2)\epsilon(K^E)^2$ 이다. K^E 는 전기장 확대계수이고, $(K^E)^2 = 2\pi R_0 E_0^2$ 이다. 또한, $I = -[(n+1)/2n]\pi$ 이다. 그리고 \tilde{E}_i , \tilde{D}_i 를 극좌표계 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\tilde{D}_r = \tilde{D} \sin(\theta - \omega), \quad \tilde{D}_\theta = \tilde{D} \cos(\theta - \omega), \quad (7)$$

$$\tilde{D} = \left[\frac{1+n^2 - (1-n^2)\cos 2\omega}{2n^2} \right]^{1/2(n+1)}.$$

여기서 $\omega = [\theta + \sin^{-1}\{(n-1)/(n+1)\sin\theta\}]/2$ 이다. 전기적 항복이 일어나지 않은 $R > R_0$ 영역에서는 전기변위와 전기장은 다음과 같다.

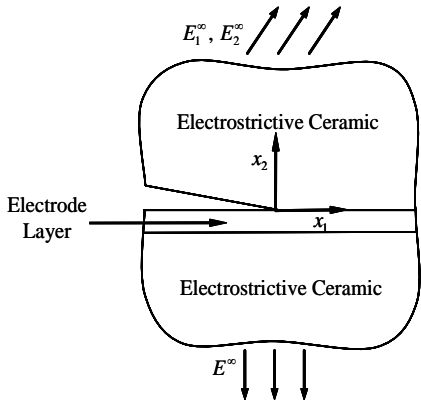


Fig. 1 A semi-infinite interface crack between an electrostrictive ceramic and an electrode layer under an electric field

$$D_R = \frac{\epsilon K^E}{\sqrt{2\pi R}} \sin \frac{1}{2} \Theta, \quad D_\Theta = \frac{\epsilon K^E}{\sqrt{2\pi R}} \cos \frac{1}{2} \Theta. \quad (8)$$

식 (6)과 식 (8)로부터 전왜재료의 절연균열 선단에서 전기변위장을 완벽하게 알 수 있다.

3. 전왜세라믹과 전극사이의 계면균열에 대한 응력확대계수

전왜액추에이터의 전왜세라믹과 전극층 사이의 반무한 계면 균열을 고려한다. Fig. 1에서 $x_2 < 0$ 인 영역은 전극층과 완전히 접합되어 있어서 인가된 전기장이 왜곡되지 않는다. 계면균열 면이 전기적으로 절연되어 있다고 가정하면 계면균열 선단의 전기변위장은 균질한 전왜세라믹내의 절연균열의 경우와 같다. 한편 점하중을 받는 균질한 탄성체내의 균열에 대한 응력확대계수는 다음과 같이 해석되었다⁴.

$$K = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}(1-\nu)} \times \left[\bar{P}\{(\bar{z})^{-1/2} - (3-4\nu)z^{-1/2}\} - \frac{1}{2}P(\bar{z}-z)z^{-3/2} \right]. \quad (9)$$

여기서 $K = K_1 + iK_2$, $P = P_1 + iP_2$ 이다. 복소수 $z = x_1 + ix_2$ 이고, 상첨자($\bar{}$)는 공액복소수를 나타낸다. 위 식으로부터 가중함수의 편미분 $h_{\alpha i, j}$ 를 구할 수 있다. $h_{\alpha i, j}$ 를 식 (4)에 대입하여 정리하면, 응력확대계수를 나타낼 수 있다.

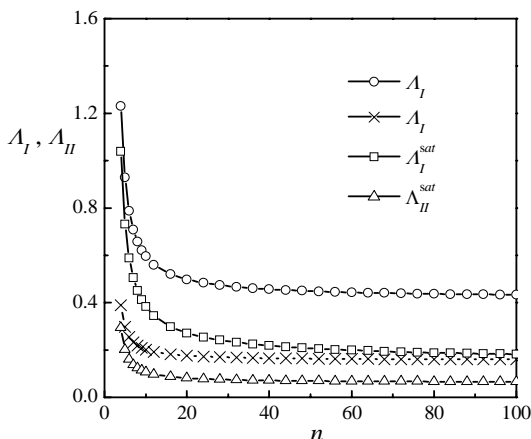


Fig. 2 Normalized stress intensity factors for an interface crack as a variation of n

$$K_\alpha = \Lambda_\alpha \sigma_0 \sqrt{\pi R_0},$$

$$\Lambda_\alpha = \frac{1}{16\sqrt{2}\pi(1-\nu^2)} \int_0^\pi \int_0^\infty \left| \frac{D}{D_0} \right|^2 f_\alpha \frac{drd\theta}{\sqrt{r/R_0}},$$

$$f_I = [3(1+q)\{\cos(2\phi-7\theta/2) - \cos(2\phi-3\theta/2)\} + 4\{1-q(1+2\nu)\}\cos 3\theta/2],$$

$$f_{II} = [(1+q)\{\sin(2\phi-3\theta/2) + 3\sin(2\phi-7\theta/2)\} - 4\{1-q(1+2\nu)\}\sin 3\theta/2]. \quad (10)$$

여기서 $\sigma_0 = YQD_0^2$ 이고, Λ_α 는 무차원화된 응력확대계수이다. Y 는 Young의 계수이다. $|D|$, ϕ 는 전기변위장 $D_1 + iD_2$ 의 크기와 편각을 나타낸다. 수치계산에서 전형적인 전왜세라믹의 재료상수인 $q = 0.38$, $\nu = 0.26$ 을 사용하였다. 식 (6)과 식 (8)을 식 (10)에 대입하여 수치적분하면 응력확대계수를 얻을 수 있다. n 에 대한 응력확대계수를 Fig. 2에 도시하였다. 여기서 Λ_α 는 전영역에 대하여 계산한 무차원 응력확대계수이고 Λ_α^{sat} 는 전기적 항복이 일어난 영역에 대해서만 계산한 무차원 응력확대계수이다. $n = 100$ 일 때, $\Lambda_I^{sat} = 0.182$, $\Lambda_{II}^{sat} = 0.066$ 이다. 이 값들은 전기적 포화영역에 대하여 Ru 등²이 계산한 무차원 응력확대계수 $\Lambda_I^{Ru} = 0.140$, $\Lambda_{II}^{Ru} = 0.061$ 와 거의 일치한다. 이는 $n \rightarrow \infty$ 일 때, 전왜재료가 전기적 소규모 포화모델(electrical small scale saturation model)의 거동을 보이기 때문이다. 계면균열선단의 응력장은 혼합모드 상태에 있다. 혼합매개변수(mixity parameter)는 다음과 같이 정의된다.

$$\Psi = \tan^{-1} \left[\frac{K_{II}}{K_I} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{\Lambda_{II}}{\Lambda_I} \right]. \quad (11)$$

$n = 100$ 일 때, $\Lambda_I = 0.433$, $\Lambda_{II} = 0.160$ 이므로 $\Psi = 20.3^\circ$ 이다. 한편 Λ_α 은 Λ_α^{sat} 보다 훨씬 큰 값을 갖는데 Ru 등²의 예상과는 다르게 균열선단의 전기적 선형 영역이 응력확대계수에 미치는 효과를 무시할 수 없음을 보여준다.

4. 결론

전기장을 받는 전왜세라믹과 전극층 사이의 계면균열에 대한 응력확대계수를 해석하였다. Duhammel-Neumann 유사성을 이용하여 응력확대계수를 면적분 형태로 수식화 하였다. 전기적 소규모 비선형 모델에 기초한 전기변위장을 응력확대계수 계산에 이용하였다. 기존의 예상과는 다르게 계면균열 선단의 전기적 선형영역에 대한 응력확대계수는 상당히 큰 값을 가지고, 균열의 거동에 중요한 영향을 미친다는 사실을 알 수 있다.

참고문헌

1. Aburatani, H., Harada, S., Uchino, K., and Furuta, A., "Destruction Mechanism of Ceramic Multilayer Actuator," Japanese Journal of Applied Physics, 33, 3091-3094, 1994.
2. Ru, C. Q., Mao, X. and Epstein, M., "Electric-Field Induced Interfacial Cracking in Multilayer Electrostrictive Actuators," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46, 1301-1318, 1998.
3. Beom, H. G., "Small Scale Nonlinear Analysis of Electrostrictive Crack Problems," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 47, 1379-1395, 1999.
4. Rice, J. R., "Three-Dimensional Elastic Crack Tip Interactions with Transformation Strains and Dislocations," International Journal of Solids and Structures, 21, 781-791, 1985.