분해능 한계로부터 기인하는 불확도에 대한 고찰

***강주식[1], 김재완[1], 김종안[1], 최종오[2]**
[1] 한국표준과학연구원 길이/시간그룹, [2]한국표준과학연구원 표준품질팀

Study on the uncertainty arising from the resolution limit in measurement

*C.-S. Kang,[1], J.W. Kim[1], J.-A. Kim[1], J.O. Choi[2]
[1] Length/time group, Korea Research Institute of Standards and Science,
[2] Standards and Quality Management Team, Korea Research Institute of Standards and Science

Key words : measurement, uncertainty, resolution, calibration

1. 서론

아무리 정밀한 측정기를 사용하여 측정을 하더라도 측정대상의 참값을 알아내는 것은 불가능하며, 측정 결과에는 항상 어느 정도의 불확실성이 존재한다. 이를 불확도(uncertainty)라고 하는데, 불확도가 발생하는 요인은 우연효과, 측정기의 분해능의 한계, 측정기 자체의 불확도, 측정환경의 영향 등 다양하다. 측정불확도를 산출하는 가이드가 1993년에 국제표준협회(ISO)에 의해 제시되었고, 이어 교정불확도 계산에 대한 지침서가 유럽에서 발행되었으며, 국내에서도 이들 지침에 기반한 국내의 불확도 지침서 및 사례집을 출간한 바 있다. 국내의 국가교정기관들은 KOLAS의 계량측정법에 의거하여 측정결과에는 항상 불확도를 함께 제시하고 있다. 그런데 교정을 받은 측정기로 측정을 수행하였을 때 측정값에 대한 불확도를 계산할 때 측정기의 분해능 한계에 의해 발생하는 불확도를 포함시켜야하는가에 대해서는 사람들마다 의견이 분분하며, 두 가지 주장이 팽팽히 맞서고 있다. 측정기 자체의 불확도에 이미 분해능 한계에 의한 불확도 성분이 고려되어 있음로, 측정불확도 계산시에는 또다시 분해능의 불확도를 포함시키는 것은 불필요하고 잘못된 행위라는 주장과, 측정기의 불확도에 분해능 불확도가 고려되어 있을지라도 이 측정기로 측정한 값에는 또다시 분해능에 의한 불확도가 존재하므로 분해능 불확도를 고려해야한다는 주장이 존재하는 것이다. 본 발표에서는 이 문제에 대한 연구 결과를 제시하고자 한다.

2. 분해능 한계에 의한 불확도

모든 측정기는 측정값을 지시할 수 있는 능력의 한계, 즉 분해능의 한계를 가지고 있다. 이것은 아날로그 기기의 경우, 무한히 좁은 눈금을 새기는 것이 불가능하고, 디지털 기기의 경우에는 무한히 많은 자리수를 가지는 지시 장치를 만들 수 없기 때문이다.

이 분해능의 한계에 의해 측정값은 불확도를 가지게 된다. 한 예를 들면, 분해능이 0.001 ㎜ 인 측정기로 어떤 물체의 길이를 측정한 결과가 10.123 ㎜ 였다면, 우리는 이 물체의 길이가 10.1225 ㎜ $\leq l <$ 10.1235 ㎜ 범위내에 있는 어떤 길이인지 더 이상 자세히 알 수가 없다. 즉 분해능 한계에 의해 측정값으로부터 양방향으로 0.5 ㎛의 폭을 가지는 불확실성이 존재하게 되는 것이다. 따라서 어떤 측정기를 교정(calibration) 할 때에는 지시값의 불확도를 산정할 때 이러한 분해능의 한계로 인해 발생하는 불확도 성분도 고려한다. 10.1225 ㎜ $\leq l <$ 10.1235 ㎜

의 구간내의 모든 길이는 동등하게 10.123 ㎜ 를 지시하게 되며, 어느 길이도 더 우선권을 가지지 않으므로, l은 직사각형 확률분포를 가지게 된다. 직사각형 확률분포를 가지는 양의 표준불확도는 이 확률분포의 표준편차를 구하면 되는데, 이것은 직사각형 확률분포의 반너비를 $\sqrt{3}$으로 나눈 값이 된다. 본 예의 경우, 확률분포의 반너비는 분해능인 1 ㎛ 의 절반에 해당하므로, 다음과 같이 계산된다.

$$u(l_{res}) = \frac{1\ \mu\text{m}}{2\sqrt{3}}$$

3. 계산 사례를 통한 두 방법의 검증

두 가지 주장에 대해 유효성을 검증하기 위하여 특정 상황을 가정하고 각 방법에 의해 계산된 결과를 비교해보았다. 설정된 상황은 교정이 된 디지털 마이크로미터로 길이가 9.999 3 ㎜ 인 막대를 측정하는 것이며, 설정한 가정은 마이크로미터의 10 ㎜ 눈금에 대한 보정값은 0이고, 교정불확도 0.5 ㎛ (신뢰수준 95 %, k=1.65) 에는 마이크로미터의 분해능 한계에 의한 불확도 성분이 포함되어 있으며, 실제로는 눈금 10 ㎜ 에서 마이크로미터가 +0.2 ㎛ 만큼 bias를 가진다는 것이다. 이 bias는 분해능이 1 ㎛ 이므로 겉으로는 드러나지 않게 된다. 편의상 앤빌과 스핀들의 평면도 및 평행도는 이상적이며, 온도 효과는 없는 것으로 가정하였다.

3.1 분해능을 추가로 고려한 경우의 계산 결과

마이크로미터는 +0.000 2 ㎛ 의 bias가 있으므로, 9.999 5 ㎜로 인식하여 반올림된 10.000 ㎜를 지시되며, 반복측정 한 결과가 모두 동일했다고 가정하고 측정결과를 계산해보면,

$$\begin{aligned} y &= l_x + b \\ &= 10.000\ \text{mm} + 0.000\ \text{mm} \\ &= 10.000\ \text{mm} \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 y는 측정결과이고, l_x는 마이크로미터의 눈금 읽음값이며, b는 교정성적서에 제시되어 있는 눈금의 보정값이다. 측정불확도를 계산해보면 합성표준불확도는

$$\begin{aligned} u_c(y) &= \sqrt{u^2(l_x) + u^2(b)} \\ &= \sqrt{u^2(l_{x.rep}) + u^2(l_{x.res}) + u^2(b)} \\ &= \sqrt{0 + \left(\frac{1\ \mu\text{m}}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.5\ \mu\text{m}}{1.65}\right)^2} \\ &= 0.4\ \mu\text{m} \end{aligned}$$

가 된다. y의 분포는 삼각형 확률분포가 되며, 이 때 포함인자 k는 신뢰수준 95 % (p=0.95)에서 1.90 이 되어, 확장불확도는

$$\begin{aligned} U &= k \cdot u_c(y) \\ &= 1.90 \times 0.4\ \mu\text{m} \\ &= 0.8\ \mu\text{m} \quad (k = 1.90, \text{삼각형확률분포}, \text{신뢰수준}\ \ 95\%) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 비록 9.999 3 ㎜ 짜리 막대를 10.000 ㎜ 로 읽었더라도 확장불확도를 고려하면 문제가 되지 않는다 (Fig. 1 참조).

3.2 분해능을 추가로 고려하지 않은 경우의 계산 결과

이 경우에는 합성표준불확도가

$$\begin{aligned} u_c(y) &= \sqrt{u^2(l_x) + u^2(b)} \\ &= \sqrt{u^2(l_{x.rep}) + u^2(b)} \\ &= u(b) \\ &= \frac{1\ \mu\text{m}}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

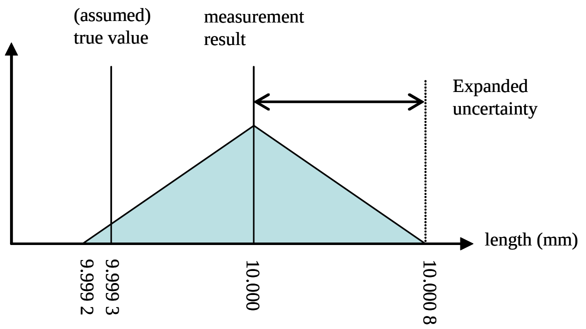


Fig. 1 Graphical plot of the measurement result, expanded uncertainty, and the true value (assumed) when the uncertainty due to the resolution of the micrometer is included in the measurement uncertainty evaluation.

이 되며, 직사각형 분포이므로 포함인자 k=1.65를 써서

$$U = k \cdot u_c(y)$$
$$= 1.65 \times 0.3\ \mu\text{m}$$
$$= 0.5\ \mu\text{m}\ (k = 1.65, \text{직사각형분포}, \text{신뢰수준}\ \ 95\ \%)$$

를 얻게 된다. 따라서 분해능에 의한 불확도를 배제시키면 9.999 3 ㎜ 의 길이를 가지는 막대를 10.000 ㎜ 로 측정한 불확도가 0.5 ㎛ 밖에 되지 않으며, 신뢰수준을 100 %로 키우더라도 불확도가 너무 작음을 알 수 있다. 이 상황을 Fig. 2에 나타내었다.

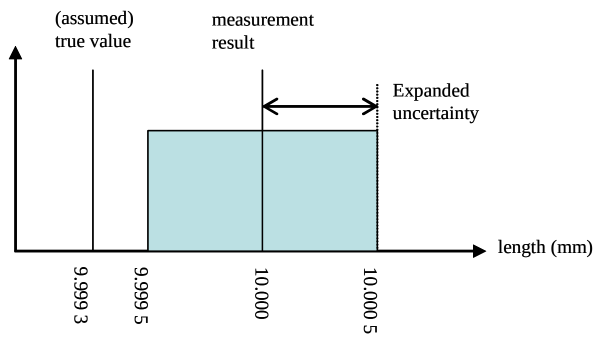
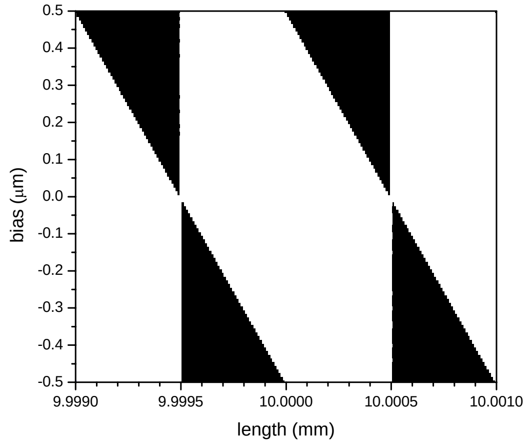


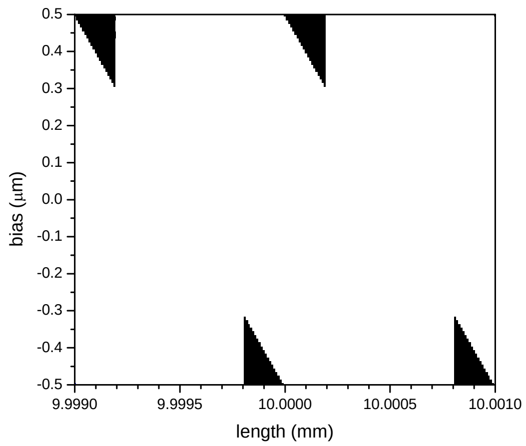
Fig. 2 Graphical plot of the measurement result, expanded uncertainty, and the true value (assumed) when the uncertainty due to the resolution of the micrometer is not included in the measurement uncertainty evaluation.

4. 불확도가 과소 평가될 확률의 계산

위의 예는 특수한 경우에 해당하는 하나의 예이다. 일반적인 경우에 대한 결론을 얻기 위하여, 위에서 제시한 두 방법에 대해 각각 분해능에 대한 불확도를 고려하지 않았을 때 불확도가 과소 평가되는 확률을 계산하였다. 계산한 방법은 다음과 같다. 분해능의 한계 때문에 측정기의 숨겨진 bias는 분해능의 1/2을 반너비로 하는 구간 사이에 존재 가능하다. 따라서 숨겨진 bias를 이 구간내에서 변화시키면서 실제 측정대상물의 길이에 따른 지시값의 변화를 계산하였다. 불확도 구간 내에 실제 측정대상물의 길이가 존재하지 않은 경우는 불확도가 과소평가된 것이다. 숨겨진 bias를 -0.5 ㎛ 에서 +0.5 ㎛ 까지 변화시키고, 측정대상의 길이가 9.9990 ㎜ 에서 10.0010 ㎜ 사이인 경우에 대해 지시값과 확장불확도를 구하고, 확장불확도가 과소평가되는 경우를 조사한 결과를 Fig. 3에 도시하였다. 계산 결과에 의하면 불확도가 과소평가된 경우는, 분해능 한계로 인한 불확도를 측정불확도에 고려한 경우는 약 4 % 발생한데 반해, 분해능 한계로 인한 불확도를 고려하지 않은 경우는 약 24 % 나 발생함을 알 수 있었다. 확장불확도가 신뢰수준 95 % 로 계산된 것을 감안한다면 분해능 불확도를 무시한 후자의 경우에는 얻어진 불확도가 신뢰수준 약 95 %에 대한 불확도로서 부적합하다는 사실을 알 수 있는 것이다.



(a) uncertainty on resolution limit not included



(b) uncertainty on resolution limit included

Fig. 3 Calculation results. The cases when the expanded uncertainty is under-estimated are shown in black color.

5. 결론

이상의 결과로부터, 측정기를 교정할 때 분해능 한계에 의한 불확도를 고려하여 교정불확도가 계산되었다 할지라도, 이 측정기를 사용하여 다른 대상을 측정한 값의 측정불확도에는 분해능에 의한 불확도 성분이 다시 포함되어야 하는 사실을 알 수 있다. 측정기를 교정할 때 분해능에 의한 불확도가 계산된 것은 측정기 눈금의 보정 값이 가지는 불확도의 요소로서 고려된 것이며, 이는 측정기를 사용하여 다른 대상물을 측정할 때 분해능에 의해 발생되는 추가적인 불확도 와는 별개인 것이기 때문이다.

참고문헌

1. Guide to the expression of uncertainty in measurement, ISO, 1993.
2. Expression of the uncertainty of measurement in calibration (EA 4/02), European co-operation for Accreditation, 1999.
3. 측정불확도 표현지침 (KRISS -99-070-SP), KRISS, 1999.
4. 불확도 평가 및 표현 사례집 (KRISS/SP--2005-028), KRISS, 2005.