제어입력 제한을 고려한 외란 스케쥴 제어

*강민식[1]
[1]경원대학교 기계공학과

Gain Scheduled Control for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Control Input

*M. S. Kang[1]
[1] Dept. of Mech. Eng., Kyungwon Univ.

Key words : Input saturation, Disturbance, Gain schedule-control, Linear Matrix Inequality, L_2-gain

1. 서론

액튜에이터는 용량 제한을 고려한 제어기 설계방법은 오랫동안 제어공학의 연구 대상이 되어왔다[1,2]. 제어 현장에서는 주로 용량 제한 범위에서 선형제어를 하거나, 제한을 벗어나는 경우 Anti- windup을 사용하는 제어방법을 사용하고 있다[2].

최근에는 선형행렬부등식(LMI:Linear Matrix Inequality)을 이용하여 제한조건을 고려한 제어성능 최적화 제어기가 제시되고 있으며, 이득 스케쥴 제어가 제안되었다[11,12]. 제어이득 스케쥴 방법은 계의 상태가 원점에 가까울수록 더 큰 제어 이득을 사용함으로써 제어성능을 개선하는 제어방법이다. 이득 스케쥴 제어는 시변계(time varying system)이므로, 폐회로 안정성을 위해 H^{∞}-제어기 설계방법을 사용한다. 본 논문에서는 참고문헌 11과 12의 제어이득 스케쥴 방법에 비해 제어기 설계 자유도를 더 부여하여 기존 이득 스케쥴 제어방법에 비해 더 작은 L_2-이득을 갖도록 설계하는 방법을 제시하였다.

2. 제어기 이득 설계

다음 식으로 기술되는 불시변 선형계를 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \tag{1a}$$

$$z_{\infty} = C_1 x + D_{11} u \tag{1b}$$

여기서 $x \in R^n$은 계의 상태변수벡터, $w \in R^{m_w}$는 외란입력벡터, $u \in R^{m_u}$는 제어입력벡터, z_{∞}는 제어출력벡터이다. 행렬 A, B_u, B_w, C_1, D_{11}은 시스템 행렬이다.

이 계는 다음과 같이 상태 되먹임제어를 하며,

$$u = Kx \tag{2}$$

제어입력과 외란은 다음과 제한을 만족한다.

$$|u_i(t)| \le \bar{u}_i,\ i = 1,2,...,m_u,\ \ \forall t \ge 0 \tag{3a}$$

$$|w_i(t)| \le w_{\max},\ \ \forall t \ge 0 \tag{3b}$$

식(3a)은 액튜에이터의 포화를 나타낸다. 식(3b)에서 외란의 최대크기 $w_{\max}$는 적절히 큰 값으로 설정할 수 있다.

우선 다음과 같이 상태변수의 영역을 정의한다.

$$\epsilon_k = \left\{ x : x^T Q_k^{-1} x < \frac{w_{\max}^2}{\beta_k^2} \right\},\ \ \beta_1 = 1 \tag{4}$$

즉, ϵ_k는 $x^T Q_k^{-1} x = w_{\max}^2 / \beta_k^2$로 정의되는 타원체의 내부공간이다.

정리 1[8]: 식(1)의 계에서 다음의 선형행렬부등식을 만족하며 γ_1^2를 최소화하는 양한정(positive definite) 대칭 행렬 Q_1과 행렬 F_1가 존재하면,

$$\begin{bmatrix} Y + \alpha Q_1 & B_u \\ B_u^T & -\alpha I \end{bmatrix} < 0,\ \alpha > 0 \tag{4a}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & F_1^T \\ F_1 & \dfrac{\bar{U}_i}{w_{\max}^2} \end{bmatrix} > 0,\ i = 1,2,...,m_u \tag{4b}$$

$$\begin{bmatrix} Y & B_w & Q_1 C_1^T \\ \star & -\gamma_1^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4c}$$

여기서 $Y = AQ_1 + Q_1 A^T + B_u F_1 + F_1^T B_u^T$,
$\bar{U}_i = diag\{\lambda^2[\bar{u}_1^2, \bar{u}_2^2, ..., \bar{u}_i^2/\lambda^2 ..., \bar{u}_{m_u}^2]\}$, $\lambda \gg 0$ 이며, 행렬에서 $\star$는 대칭행렬 요소이다. λ는 임의의 충분히 큰 값이다.

제어기 $u = K_1 x, K_1 = F_1 Q_1^{-1}$를 적용한 경우

1) 폐회로는 안정, w로부터 z_{∞} 까지 L_2 -이득은 γ_1 미만.
2) 상태벡터의 초기조건이 $x^T Q_1^{-1} x < w_{\max}^2$을 만족하면, 폐회로 상태벡터는 타원체, $x^T Q_1^{-1} x = w_{\max}^2$, 내부에 존재한다.
3) $x^T Q_1^{-1} x < w_{\max}^2$이면 $u(t)$는 식(3a)의 제한조건을 만족한다.

정리 2. 정리 1을 만족하는 Q_1과 F_1이 존재하고, $k \ge 2$일 때 다음의 LMI식 (7a), (7b), (7c)을 만족하며 γ_k^2를 최소화하는 양한정 대칭행렬 Q_k와 행렬 F_k가 존재하면,

(i) $k = 1$ 일 때
정리 1에서 Q_1, F_1, K_1 및 γ_1을 구한다.

(ii) $k \ge 2$ 일 때

$$\begin{bmatrix} Q_k & F_k^T \\ \star & \beta_k^2 \dfrac{\bar{U}_i}{w_{\max}^2} \end{bmatrix} > 0,\ i = 1,2,...,m_u \tag{7a}$$

$$\begin{bmatrix} Y_k & B_w & Q_k C_1^T \\ \star & -\gamma_k^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{7b}$$

$$Q_k - \beta_k^2 Q_1 < 0,\ \beta_k > 1 \tag{7c}$$

여기서 $Y_k = AQ_k + Q_k A^T + B_u F_k + F_k^T B_u^T$이다.

계가 $x \in \epsilon_k$일 경우 제어이득 $K_k = F_k Q_k^{-1}$로 제어하면

1) 폐회로는 안정, w로부터 z_{∞}까지의 L_2-이득은 γ_k보다 작다.
2) 제어입력은 식(3a)의 제한조건을 만족하며, 폐회로 상태벡터는 항상 ϵ_1에 존재한다.

정리 3. 정리 1을 만족하는 Q_1과 F_1이 존재하고, $k \ge 2$일 때 다음의 LMI식 (7a), (7b), (7c)을 만족하며 γ_k^2를 최소화하는 양한정 대칭행렬 Q_k와 행렬 F_k가 존재하면,

(i) $k = 1$ 일 때
정리 1에서 Q_1, F_1, K_1 및 γ_1을 구한다.

(ii) $k \ge 2$ 일 때

$$\begin{bmatrix} Q_k & F_k^T \\ \star & \beta_k^2 \dfrac{\bar{U}_i}{w_{\max}^2} \end{bmatrix} > 0,\ i = 1,2,...,m_u \tag{7a}$$

$$\begin{bmatrix} Y_k & B_w & Q_k C_1^T \\ \star & -\gamma_k^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{7b}$$

$$Q_k - \beta_k^2 Q_1 < 0,\ \beta_k > 1 \tag{7c}$$

여기서 $Y_k = AQ_k + Q_kA^T + B_uF_k + F_k^TB_u^T$이다.

계가 $x \in \epsilon_k$일 경우 $K_k = F_kQ_k^{-1}$로 제어하면

1) 폐회로는 안정, w로부터 z_∞까지의 L_2-이득은 γ_k보다 작다.
2) 제어입력은 제한조건을 만족하며, 폐회는 항상 ϵ_1에 존재한다.

우선 정리 1에서 행렬 Q_1, F_1 및 K_1을 얻으며, 정리 3에서 $1 = \beta_1 < \beta_2 < \ldots\ldots < \beta_n$의 관계를 갖는 β_k를 선정한 다음 각 β_k에 대해 행렬 Q_k, F_k 및 K_k를 결정한다. 설계된 제어이득은 Fig. 1의 논리에 따라 선정한다. Fig. 1에서는 측정된 계의 상태벡터가 속한 상태벡터영역들 중 L_2-이득이 가장 작은 영역 ϵ_k를 찾아 제어이득 K_k를 선정하여 제어입력 제한조건을 만족하는 제어기 중 L_2-이득이 가장 작은 제어이득을 선정하는 개념이다.

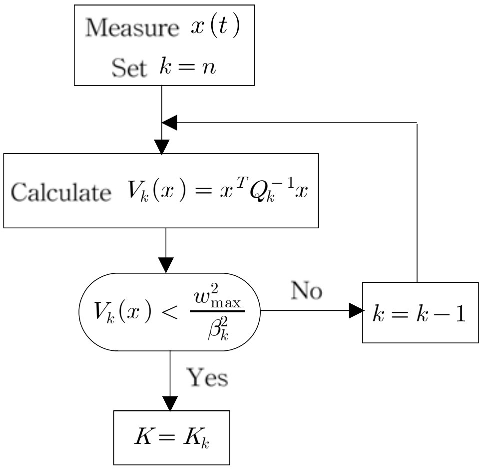

Fig. 1 Logic for scheduling gains

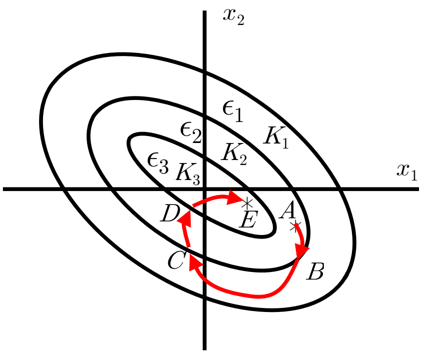

Fig. 2 Conceptual diagram of gain scheduling control

스케줄링 제어 개념을 상태공간변수 $x_1 - x_2$평면에서 보면 Fig. 2와 같다. 화살표는 계의 상태벡터의 궤적, A는 시작점, B, C, D는 궤적이 타원체와 만나는 점, E는 궤적이 끝나는 점이다. $\widehat{AB}$에서는 제어이득 K_2가 적용되며, 구간 $\widehat{BC}$에서는 K_1이, $\widehat{CD}$에서는 다시 K_2가, $\widehat{DE}$ 구간에서는 K_3가 적용된다. 구간 $\widehat{BC}$에서 궤적은 절대 ϵ_1 외부로 벗어나지 않는다.

이와 같이 제어이득 스케줄링 방법은 계의 응답이 작아지면 보다 작은 L_2-이득을 갖는 제어기가 적용되므로 고정이득 제어에 비해 좋은 제어 성능을 기대할 수 있다.

3. 결론

본 연구에서는 제어입력의 크기 제한을 갖는 시스템에서 외란응답을 최소화할 수 있는 제어이득 스케줄 제어 방법을 제시하였다. 기존 고정이득제어가 최악의 외란조건에서도 제어입력제한을 만족하도록 설계함에 따라 가용한 제어입력을 충분히 이용하지 못함에 비해, 스케줄 제어는 계의 상태벡터에 따라 제어입력의 제한을 만족하며 외란과 제어출력간의 L_2-이득을 최소화하는 고이득의 제어기를 적용함으로써 가용한 제어입력을 보다 효율적으로 사용하여 제어성능 향상을 기할 수 있다. 특히 제어기 설계 변수행렬 Q를 상수로 하는 기존의 설계방법에 비해 Q를 변수로 사용하는 제안된 방법은 제어기 설계에 있어 제한조건을 완화하는 효과가 있어 상대적으로 더 작은 L_2-이득을 얻을 수 있으므로, 더 우수한 제어성능을 기대할 수 있다. 제안된 방법의 안정성과 제어성능을 행렬 Q를 상수로하는 경우와 비교 증명하였다.

참고문헌

1. Bernstein, D. S. and Michel, A. N., “A Chronological Bibliography on Saturating Actuators," Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 5, pp. 375-380, 1995.
2. Stoorvogel, A. A. and Saberi, A. (Eds.), Special Issue on "Control Problems with Constraint," Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 5, 1999.
3. Lin, Z. and Saberi, A., "A Semi-global Low-and-High Gain Design Technique for Linear Systems with Input Saturation - Stabilization and Disturbance Rejection," Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 5, pp. 381-398, 1995.
4. Lin, Z., Saberi, A., and Teel, A.R., "Simultaneous L_p-stabilization and Internal Stabilization of Linear Systems Subject to Input Saturation - State Space Feedback Case," Systems and Control Letters, Vol. 25, pp. 219-226, 1995.
5. Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for LPV Systems with Bounded Inputs," Proc. of the American Control Conference, pp. 1543-1547, 1998.
6. Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for Systems with Input Saturation: An LMI Approach," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, No. 4, pp. 852-857, 1999.
7. Nagpal, K., Abedor, J. and Poolla, K, "An LMI Approach to Peak-Peak Gain Minimization: Filtering and Control," Proc. of the American Control Conference, 1994.
8. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM Books, Philadelphia, 1994.
9. Kim, Y. B. and Byeon, J. H., "Robust Decoupling Control of Ship Propulsion System with CPP," J. of KSPE, Vol. 15, No. 9, pp.33-42, 1998.
10. Keh, J. E. and Lee, M. H., "Robust Controller Design for a Stabilized Head Mirror," Int. J. of Precision and Manufacturing, Vol. 3, No. 4, pp.78-86, 2002.
11. Srivastava, S. and Jabbari, F., "Scheduled Controllers for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Inputs," Proc. of the American Control Conference, pp. 735-739, 2000.
12. Kose, I. E. and Jabbari, F., "Scheduled Controllers for Linear Systems with Bounded Actuators," Automatica, Vol. 39, No. 8, pp. 1377-1387, 2003.
13. Leith, D. J. and Leithead, W. E., "Survey of Gain-scheduling Analysis and Design," Int. J. of Control, Vol. 73, No. 11, pp.1001-1025, 2000.