

재귀적 방법을 이용한 NURBS 보간기의 성능평가

*백대균¹, 고태조¹, 이재원¹, 김희술¹
¹ 영남대학교 기계공학부

Performance Evaluation of NURBS Interpolator Using Recursive Method

*D. K. Baek¹, T. J. Ko, J. W. Lee¹, H. S. Kim¹,
¹ School of Mechanical Engineering, Yeungnam University

Key words : CNC Controller, NURBS Interpolator, Recursive Method

1. 서론

자동차, 항공 및 기계부품을 모델링하는 CAD 와 기계제작 및 제어의 CAM 간에는 차이가 발생한다. CAD 에서는 매개변수를 이용하여 자유곡면을 모델링하지만 CAM 에서는 수많은 선형화된 선분으로 나누어 CNC 시스템을 이용하여 제작, 또는 제어를 수행한다. 이것은 기존의 CNC 시스템은 단지 직선보간과 원호보간을 주로 지원하고 있기 때문이다. 최근 1 개의 블록으로 다양한 종류의 직선 및 곡선을 표현하고, 또한 정의된 1 개의 블록을 각각 한 번씩의 가속과 감속으로 연속적으로 이동할 수 있는 방식에 관해서 많은 연구가 이루어지고 있다. CAD 에서 정의된 매개변수 곡선의 정보를 CNC 시스템에 입력하고, 수치제어 장치는 내부적으로 매개변수 곡선을 보간하여 정확한 운동경로를 생성하는 방법이다. 여러 가지 매개변수형 자유곡선에서 가장 많이 사용되고 있는 것이 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)이다.

이제까지의 보간방법을 살펴보면 1 차 또는 2 차 Taylor정리를 이용하여 일정한 선분길이로 보간하는 방법을 채택하고 있다. 가장 대표적인 방법은 1 차 Taylor 정리와 자유곡선의 미분함수를 구하여 매개변수 증분치를 결정하여 일정한 이송속도로 제어하는 방법이다¹. 그러나 1 차 Taylor 정리를 이용하면 절단오차(Truncation error)로 인하여 보간오차가 많이 발생하므로 이러한 연구에 더하여 2 차 Taylor정리를 이용하여 이송속도를 변화하여 자유곡선의 곡면부위에서 정확한 보간을 하는 방법에 대해 연구하였다²⁻³. 자유곡선을 보간하기 위해 1 차 Taylor 정리를 이용하면 오차가 발생하게 되고, 2 차 Taylor 정리를 이용하면 계산이 복잡해지고 정확하게 가변 이송속도를 얻기가 어렵다⁴. 이러한 Taylor 정리를 이용한 보간의 문제점을 극복하고 정확하고 빠른 보간을 위해 NURBS의 회귀적 성질을 이용한 보간방법에 대해 연구하였다⁵.

본 연구에서는 NURBS 의 회귀적 성질을 이용한 재귀적 방법을 이용한 NURBS 보간기의 성능을 살펴보고, 또한 기존의 Taylor 정리를 이용한 보간기와 비교해보고자 한다. 즉, 재귀적 방법을 이용한 보간기에서 계산시간과 보간의 정확도를 결정하는 변수를 변화시켜 보간의 성능을 살펴보고, 1 차, 2 차 Taylor 정리의 보간기와 비교하여 재귀적 방법을 이용한 NURBS 보간기의 성능을 평가하고자 한다.

2. NURBS 곡선의 정의

NURBS 는 곡선이 부드럽고, 국부적으로 곡선을 변형하기 쉬운 등 많은 장점이 있어 CAD/CAM 에서 자유곡면(Free-formed surface)의 모델링에 많이 이용되고 있다.

NURBS는 다음과 같이 매개변수형으로 표시된다⁶.

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i B_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u)w_i} \quad (1)$$

여기서 $N_{i,k}(u)$ 는 재귀적(Recursive) 성질을 가지고 있는 기저함수로서 다음과 같이 정의한다.

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

그리고,

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - u_i)}{(u_{i+k-1} - u_i)} N_{i,k-1}(u) + \frac{(u_{i+1} - u)}{(u_{i+k} - u_{i+1})} N_{i+1,k-1}(u) \quad (3)$$

여기서 절점벡터는 $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ 과 같고, u_i 는 절점이며, $u_i \leq u_{i+1}$, $i = 0, \dots, m-1$ 의 성질을 갖는다.

3. NURBS 보간기

NURBS 곡선의 보간은 매개변수의 증분치 Δu_i 적절히 찾아서 NURBS 방정식으로부터 연속적으로 곡선을 보간하는 방법이다.

$$u_{j+1} = u_j + \Delta u_j \quad (4)$$

여기서 u_j 는 현재 매개변수이고, u_{j+1} 은 갱신된 매개변수이다. 1, 2 차 Taylor정리를 이용한 근사법은 NURBS의 미분방정식을 이용하여 매개변수의 증분치를 근사적으로 구한다. 그러나 재귀적 방법에 의한 NURBS보간은 식 (2)와 (3)의 재귀적 성질을 이용하여 매개변수 증분치를 구한다⁵. 매개변수의 증분치 Δu_j 를 구하기 위한 첫 번째 임시 증분치 Δu_{j_1} 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta u_{j_1} = \frac{d \cdot \Delta u_{j-1}}{s_{j-1}}, j > 1 \quad (5)$$

여기서 d 는 보간길이, $s_{j-1} = |P(u_j) - P(u_{j-1})|$ 이다. 임시 증분치 Δu_{j_1} 으로 구한 곡선의 선분길이는 구하고자 하는 길이 d 와 오차가 발생하므로 식 (6)과 마찬가지로 개선된 증분치 Δu_{j_k} 를 연속적으로 구할 수 있다.

$$\Delta u_{j_k} = \frac{d \cdot \Delta u_{j(k-1)}}{s_{j(k-1)}}, j > 1, k=2 \dots m \quad (6)$$

여기서

$$s_{j(k-1)} = \left| \mathbf{P}\{u_{j(k-1)}\} - \mathbf{P}(u_j) \right|, \quad u_{j(k-1)} = u_j + \Delta u_{j(k-1)}$$

최초 증분치 Δu_0 의 결정 및 재귀적 방법에 의한 보간에 대한 자세한 내용은 참고문헌 [5]에 나타나 있다.

4. NURBS 보간기의 성능평가

재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기와 Taylor 정리를 이용한 NURBS 보간기를 서로 비교하기 위하여 Fig. 1의 NURBS 곡선에 대해 시뮬레이션을 수행하였다. 기준 워드 방식으로 보간 선분길이를 $1 \mu\text{m}$, 이송속도는 $10 \mu\text{m}/\text{sec}$ 로 설정하였다.

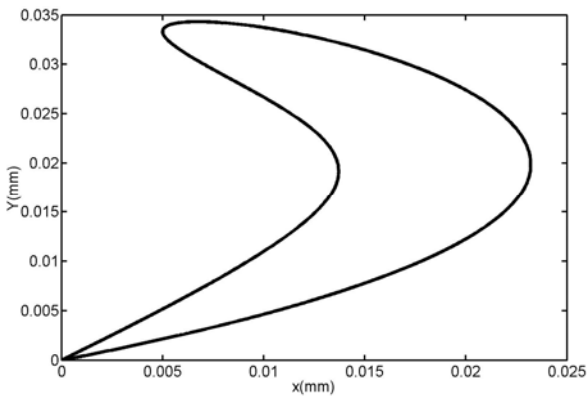


Fig. 1 NURBS curve.

식 (5)는 앞선 선분의 길이와 매개변수 증분치를 이용하므로 NURBS 방정식을 이용하지 않는다. 식 (6)에서 재귀적 방법을 이용한 보간에서 NURBS 방정식을 이용한 회수 n 은 $m-1$ 이 된다. 먼저 재귀적 방법에서 $n=1$ 일 때 NURBS 곡선을 보간하여 1차 Taylor 정리의 보간 결과와 비교하여 매개변수 u_j 에 대한 선분의 길이를 Fig. 2에 나타내었다. 그림에서 보는 것과 같이 NURBS 곡선의 최소 곡률반경부근에서 1차 Taylor 정리에 의한 보간에서는 약 27%의 오차가 발생하고, $n=1$ 의 재귀적 방법에 의한 보간에서는 약 11%의 오차가 발생하였다.

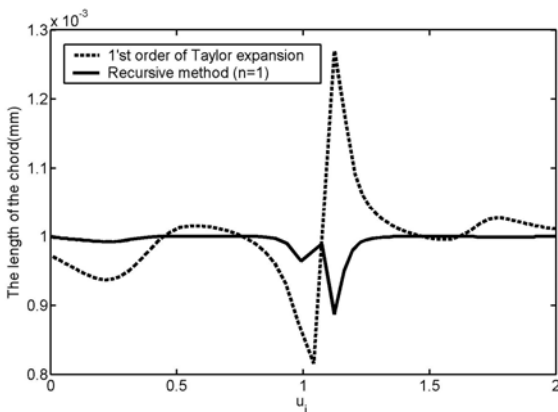


Fig. 2 Recursive method ($n=1$) and the first order approximation of Taylor's expansion.

다음으로 재귀적 방법에서 $n=2$ 일 때 NURBS 곡선을 보간하여 2차 Taylor 정리의 보간 결과와 비교하여 매개변수 u_j 에 대한 선분의 길이를 Fig. 3에 나타내었다. 그림에서 보는 것과 같이 NURBS 곡선의 최소

곡률반경부근에서 2차 Taylor 정리에 의한 보간에서는 약 10%의 오차가 발생하고, $n=2$ 의 재귀적 방법에 의한 보간에서는 약 2%의 오차가 발생하였다.

재귀적 방법을 이용한 NURBS 보간에서 $n=1$ 에서는 NURBS 방정식을 한 번 이용하였고, $n=2$ 에서는 두 번 이용하였다. Taylor 정리를 이용한 보간에서는 1차 정리에서는 NURBS 방정식을 1차 미분하고, 2차 Taylor 정리에서는 NURBS 방정식을 2차 미분한다. 따라서 재귀적 방법을 이용한 NURBS 보간은 계산속도도 훨씬 빠르고, 아주 우수한 정밀도로 NURBS 곡선을 보간함을 알 수 있다.

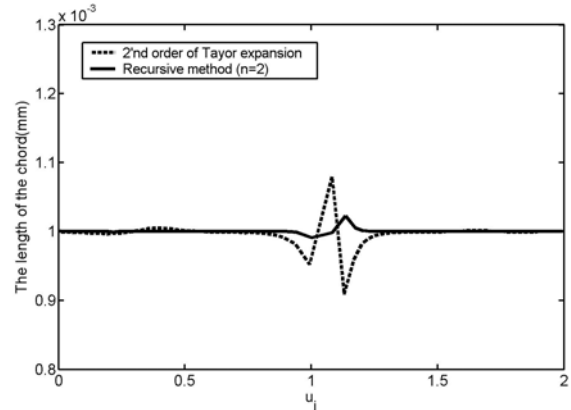


Fig. 3 Recursive method ($n=2$) and the second order approximation of Taylor's expansion.

4. 결론

본 연구에서는 재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기의 성능을 평가하여 보았다. NURBS 기저함수의 재귀적 성질을 이용하여 매개변수 증분치를 구한 재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기와 가장 많이 이용되고 있는 Taylor 정리를 이용한 NURBS 보간기의 성능을 시뮬레이션을 통하여 평가하여 보았다. 재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기는 보간 정밀도뿐만 아니라 계산속도도 Taylor 정리에 의한 방법보다 우수하였다. 따라서 새롭게 제안한 재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기는 로봇, CNC 공작기계 등에서 자유곡선을 고정도, 고속도로 제어할 수 있다.

참고문헌

1. Zhang, Q. G., and Greenway, R. B., "Development and Implementation of a NURBS Curve Motion Interpolator," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **14**(1), 27-36, 1998.
2. Yang, D. C. H., and Kong, T., "Parametric interpolator Verses Linear Interpolator for Precision CNC Machining," *Computer-Aided Design*, **26**(3), 225-234, 1994.
3. Yeh, S. S., and Hsu, P. L., "The Speed-Controlled Interpolator for Machining Parametric Curves," *Computer-Aided Design*, **31**(5), 349-357, 1999.
4. Farouki, R. T., and Tsai, Y. F., "Exact Taylor Series Coefficients for Variable-Feedrate CNC Curve Interpolators," *Computer-Aided Design*, **33**(2), 155-165, 2001.
5. 백대균, 고태조, 이재원, 김희술, "재귀적 방법에 의한 NURBS 보간기," *한국정밀공학회*, **22**(5), 45-54, 2005.
6. Piegl, L., and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer, 1997.