양방향 절삭과 그래프의 *s-t* 절단

***김태정** [1]
[1] 단국대학교 기계공학과

Two-Direction Cutting and s-t Cuts

*Taejung Kim[1]
[1] Dept. of Mech. Eng., Dankook Univ.

Key words : Maximum Flows, *s-t* Cuts, Direction-parallel Toolpaths

1. 서론

평면 상의 공구 경로 계획은 가공 대상 물체의 황삭(roughing) 계획을 위해 여러 번 시행되어야 한다. 각 단면 상의 공구 경로의 효율에 따라 전체 경로 계획의 효율이 결정되므로, 평면 경로 계획은 단순하지만 중요한 계획 단계이다. 평면 상의 경로로는 보통 경계선에 평행한 오프셋 곡선이나 서로 평행한 직선 경로가 채택된다.[1] 이 논문은 후자의 경우를 다룬다. 전통적인 절삭 공정뿐만 아니라 다양한 신속제작에도 단면에 대해 비슷한 계획이 요구된다.

각 직선 경로의 끝에서 공구가 감속한 후, 다음 경로로 이동하고 가속하느라 낭비하는 시간이 있으므로, 각 단면에서의 공구 경로의 질은 경로의 불연속 점의 개수에 역비례한다고 가정할 수 있다. 이는 또한 단면 상의 공구 경로의 개수를 줄이는 문제로 귀결된다. 예를 들어, Fig. 1의 왼편 그림은 주어진 지역이, 등 간격으로 배열된 14개의 서로 평행한 직선 경로에 의해 절삭될 수 있음을 보여준다. 오른편에는 특정지역에서의 절삭 방향을 바꾸어 전체 경로의 개수를 7(=3+4)개로 줄일 수 있음을 보여 주고 있다.

주어진 예와 같이 단순한 경우에는 직관적으로 올바른 경로를 선택할 수 있지만 일반적인 모양에 대해서는 그 의사 결정이 어려울 수 있다. 본 논문은 주어진 전체 절삭 지역에, 가장 적은 수의 공구 경로를 주어진 간격에 맞추어 배치하는 방법을 다룬다. 이 문제는 Sarma[2]에 의해 처음 제시되었으며, 본 저자의 조사 범위 안에서는, 효과적인 해가 알려져 있지 않다.

한편, 전 지역을 분할 없이 동일 방향으로 절삭할 때, 가장 적합한 절삭 방향을 찾는 문제는 조금 단순하며 몇몇 저자에 의해 다루어진 바 있다. Prabhu, et. al.[3]은 매우 직접적인 방법으로 절삭 시간을 계산하는 작업을 여러 경로에 대해 반복하여, 적합한 절삭방향을 결정하였다. 직접적 방법을 사용하였으므로, Prabhu, et. al.의 방법은 많은 계산 시간을 요구한다. Sarma[2]는 자신이 정의한 교차 함수(crossing function) 개념을 이용하여 $O(N\log N)$의 시간 복잡도를 가지는 방법을 소개하였다. Hon et. al.[4]은 신속시작 공정의 해칭 방향을 결정하는 데, 이 문제를 적용하였다.

연관된 문제로는 Fig. 2에 보여지는 Tarski의 널빤지 문제(plank problem, 1932)가 있다. Tarski는 볼록한 지역을 널빤지로 덮을 때, 여러 방향으로 나누어 덮음으로써 한 방향으로 덮는 것에 비해 더 적은 너비의 널빤지너비를 소비할 수 있는가 하는 (순수) 수학 문제를 제시한 바 있다. 이 질문에 대한 부정적인 결론이 Bang[5] (1951)에 의해 증명되었고 Bang의 정리로 알려져 있다. 우리의 경우 널빤지의 너비는 각 지역에 배치된 직선 경로의 개수라 할 수 있다. 즉, 볼록한 경우에 대해서는 지역을 나누어 각기 다른 방향으로 절삭하여 더 좋은 결과를 얻을 수는 없다. 다시 말해, 지금까지 알려진 최선의 결과는 Sarma의 방법이, 볼록한 지역에 대해서는 올바른 답을 제시한다는 사실뿐이다.

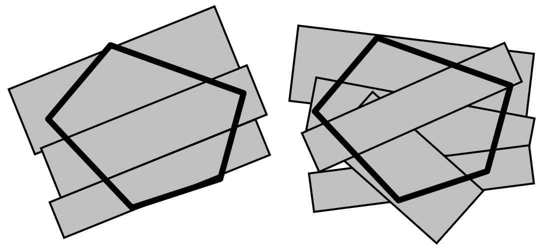

Fig. 2 Tarski's Problem: We want to cover a convex region completely with a number of planks. It is desirable to reduce the sum of the widths of planks that cover the region. Can we find an arrangement of planks, which is better than that of the mutually parallel ones?

볼록하지 않은 지역을 다루는 최적화문제로서는 이 문제가 어떤 복잡도 계층(complexity class)에 속하는지도 알려졌지 않다. 일단, 단순한 문제를 다루기 위해 본 논문에서는, 선택할 수 있는 절삭 방향이 서로 직교하는 두 방향뿐인 경우를 다룬다. 위와 같이 단순화된 문제를 양방향 절삭 문제라 하자. 양방향 절삭 문제는 다음에 간략히 설명되는 그래프의 *s-t* 절단 문제로 귀결됨을 본 논문에서 보이고자 한다.

2. 그래프의 최소 *s-t* 절단 문제

본 절에서는 그래프의 *s-t* 절단 문제를 간략히 소개한다. 각 선분(edge)에 양의 용량(capacity)이 지정된 그래프에

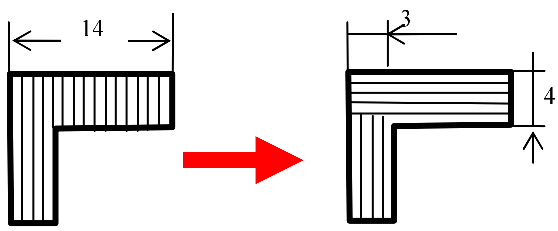

Fig. 1 Reducing the Number of Toolpaths

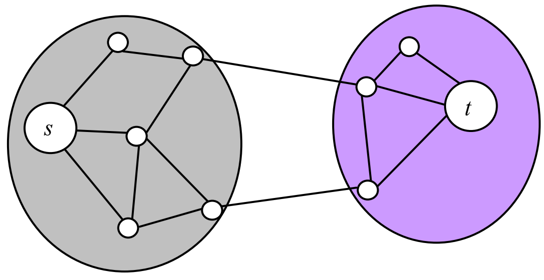

Fig. 3 A Minimum *s-t* Cut

서, 서로 다른 두 꼭지점(vertex)을 각기 *s*-꼭지점(source)과 *t*-꼭지점(sink)이라 하자. 그래프의 최소 *s-t* 절단 문제(the minimum *s-t* cut problem)는 *s*-꼭지점과 *t*-꼭지점이 동일한 집합에 속하지 않도록 하면서 그래프의 모든 꼭지점을 두 집합으로 분할할 때 두 집합을 연결하는 선분의 용량의 합이 최소가 되도록 하는 문제이다. Fig. 3은 각 선분이 단위 용량을 가지고 있는 경우를 보여 준다. 주어진 예에서, 최소 절단용량은 2임을 알 수 있다.

이 문제는 네트워크의 최대 흐름 문제(maximum flow)와 관련하여 널리 연구된 문제이다. 최대흐름-최소절단 정리(max-flow min-cut theorem)에 근거하여 최소 절단 문제를 최대 흐름 문제로 변환한 후, Ford-Fulkerson의 방법 등, 최대 흐름 문제를 위해 개발된 다수의 다항시간 해법들을 이용하여 원하는 절단을 얻을 수 있다.[6]

3. 양방향 절삭 문제를 s-t 절단 문제로

본 절은 양방향 절삭 문제가 어떻게 *s-t* 절단 문제로 변환되는지 보여 준다.

절삭 대상 도형이 주어지면 미리 결정된 두 개의 직교하는 방향에 맞추어 도형을 충분한 개수의 정사각형으로 나눈다. 일반성을 잃지 않고, 그 두 방향을 각기 수직 방향과 수평 방향이라 명명할 수 있으며, 사각형의 변의 길이를 단위 길이로 설정할 수 있다.

각 사각 지역에, 두 방향 중 특정 방향을 지정한다면 하나의 경로 계획이 완성된다고 볼 수 있다. 서로 인접하는 두 사각형에 같은 방향이 지정된다면 그에 따른 비용함수의 증가는 없다. 반대로, 서로 다른 방향이 지정된다면 비용함수는 사각형의 변의 길이, 즉 1 만큼 증가한다. 또한, 수평 경계선에 인접한 사각형에 수평 절삭 방향이 지정된다면 비용의 증가는 없고, 수직 절삭 방향이 지정된다면 비용은 증가한다. 수직 경계선에 대해서도 비슷하게 말할 수 있다.

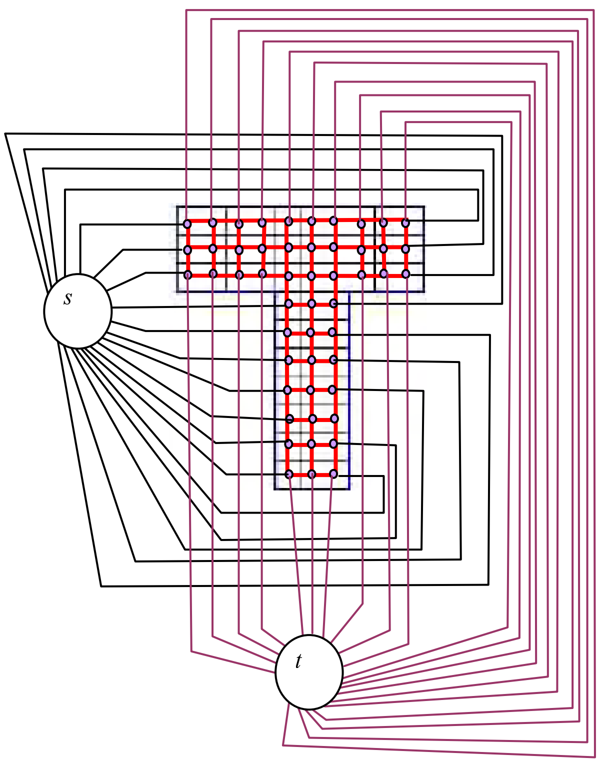

Fig. 4 An Adjacency Graph of the Region

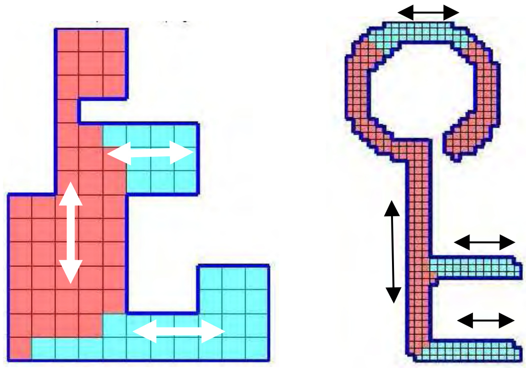

Fig. 4 Preliminary Results

우선, 각각의 사각형을 그래프의 꼭지점으로 선택한다. 두 꼭지점에 해당하는 사각형이 서로 인접하면 두 꼭지점을 잇는 그래프의 선분을 설정한다. 그 후, 각 수직 경계선에 인접한 꼭지점을 *s*-꼭지점에, 수평 경계선에 인접한 꼭지점을 *t*-꼭지점에 연결하여 그래프를 완성한다. Fig. 3은 간단한 T형 도형에 대해 이 과정을 따라 완성된 그래프를 보여준다.

이와 같이 설정된 그래프의 각 선분을 절단하는 것은 해당하는 두 꼭지점, 즉, 두 인접 사각형에 다른 방향을 설정함을 의미하므로 절단 선분의 개수는 공구 경로가 서로 불일치하는 경계선의 개수가 됨을 쉽게 관찰할 수 있다.

4. 결론

앞 절에 설명된 방법으로 최소 *s-t* 절단 문제를 구성하여 계산한 결과를 Fig. 4에 제시한다. 주어진 절단 문제를 선형계획 문제로 변환하여 내부점 방법(interior point method)으로 최적값을 찾는 표준화된 방법을 사용하였다. 향후 연구 과제는 절삭 방향의 개수를 증가시켜 가며 문제의 특성을 파악하는 것이다.

참고문헌

1. Kim, B.H., Choi, B.K., “Machining efficiency comparison direction-parallel tool path with contour-parallel tool path,” CAD, 34(2), pp. 89-95, 2002.
2. Sarma, S. E., “The crossing function and its application to zig-zag tool paths,” Computer-Aided Design 31(14), pp. 881-890, 1999.
3. Prabhu, P., Gramopadhye, A. K., Wang, H-P., “General mathematical model for optimizing NC tool path for face milling of flat convex polygonal surfaces,” International Journal of Production Research, 28 (1), pp. 101-130, 1990.
4. Hon, M.C., Janardan, R., Schwerdt, J., Smid, M., “Minimizing the total projection of a set of vectors, with applications to layered manufacturing,” CAD, Vol. 35, Issue 1, pp. 57-58, 2003.
5. Bang, T. "A Solution to the Plank Problem," Proc. Amer. Math. Soc. 2, pp. 990-993, 1951.
6. Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., Orlin, J. B., Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, 1993.