일정 스켈롭 자유곡면 가공을 위한 커스프 메트릭의 계산

*김태정 [1]
[1] 단국대학교 기계공학과

Computing a Cusp Metric for Constant Scallop Height Free-form Surface Machining

*Taejung Kim
[1] Dept. of Mech. Eng., Dankook Univ.

Key words : Cusp Metric, Scallop Height, NC, Free-form Surface Ball-end Mill, CAD/CAM

1. 서론

자유 곡면을 가공할 때, 공구와 가공 대상 곡면의 모양이 일치하지 않아 Fig. 1에 보여지는 것과 같이 가공 대상 곡면 상에 제거되지 않고 남아 있게 되는 부분을 스켈롭(scallop) 또는 커스프(cusp)라 한다. 이웃한 공구 경로 사이의 간격을 조절하여 스켈롭의 높이를 조절할 수 있다.

Suresh and Yang[1]이 스켈롭 높이를 일정하게 유지하여 공구 경로를 '균일' 하게 배열할 것을 제안한 후, 그들의 방법에 대한 다수의 변형이 존재해 왔다. Suresh and Yang의 방법 중 측방 이동거리 계산 공식이, 모호한 유도 과정에 근거하고 있다는 비판이 최근에 제기되었으며 Feng and Li[2], Yoon[3], Kim[4]에 의해 개선안이 다루어졌다. Feng and Li는 3차원 기하학을 직접 다루었고 Yoon은 절삭지역에 대한 포락선(envelope curve) 개념에 근거한 방법을 제안하였다. Kim[4]에서는 높이 함수의 헤세행렬식(Hessian)을 리만메트릭으로 간주하여 생성한 리만 다양체 상의 측지평행선(geodesic parallels)이 일정 스켈롭 높이 공구 경로에 근사적으로 대응됨이 주장된 바 있다.

본 논문은 Kim[4]에서 사용되는 리만메트릭과 크리스토펠 기호의 계산과정을 볼엔드밀(ball-end mill)을 사용하는 경우에 대해 구체적으로 보여주는 것을 목적으로 한다.

2. 높이함수와 커스프 메트릭

본 절에서는 Kim[4]에서 정의된 커스프 메트릭을 간략히 소개한다.

대상 가공곡면은 주로 다음,

$$(u,v) \rightarrow \mathbf{p}(u,v)$$

꼴의 매개변수 형식으로 주어진다. 절삭 도중 한 순간에 공구는 가공곡면 상의 어떤 점에 접하고 있어야 한다. 이 접촉점을 $\mathbf{p}_o = \mathbf{p}(u_o,v_o)$ 라 하자. 이 때, 곡면 상의 점 $\mathbf{p}(u,v)$ 에서 곡면에 수직인 방향을 따라 측정된 공구까지의 직선거리를 $\mathbf{p}_o$ 에 위치한 공구의 $\mathbf{p}(u,v)$ 에서의 높이라 하고 $h(u,v\,;u_o,v_o)$ 로 표시하자. 공구의 위치 $\mathbf{p}_o = \mathbf{p}(u_o,v_o)$ 를 고정시킨 상태에서는 높이 $h(u,v\,;u_o,v_o)$ 를 매개변수

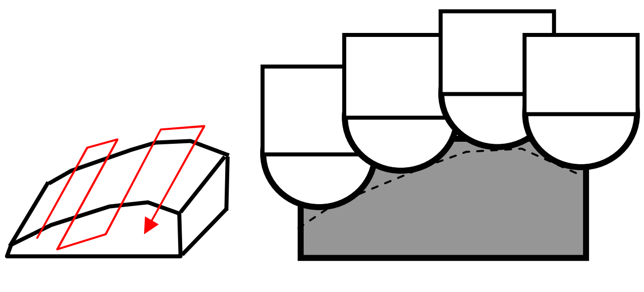

Figure 1 Cusps

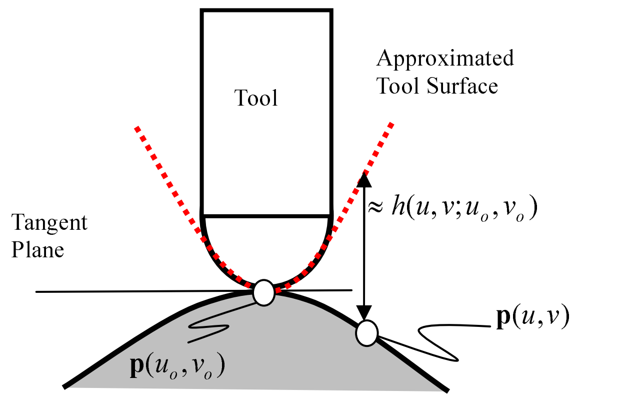

Fig. 2 An Approximate Height Function

(u,v) 에 대한 함수로 볼 수 있다. 이 함수를 다음과 같이 테일러 전개시켜 2차 근사식을 얻는다.

$$\begin{aligned} h(u,v\,;u_o,v_o) \approx\ & h_{11}(u_o,v_o)\cdot(u-u_o)^2 \\ & + 2h_{12}(u_o,v_o)\cdot(u-u_o)(v-v_o) \\ & + h_{22}(u_o,v_o)\cdot(v-v_o)^2 \end{aligned}$$

여기서,

$$h_{11} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2},\quad h_{12} = \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v},\quad h_{22} = \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}.$$

이들은 높이함수의 헤세행렬식의 계수들이다. Fig. 2는 이 근사식의 기하학적 의미를 보여준다. 가공 곡면과 공구 곡면을 각기 접촉점에 대칭축을 둔 포물면으로 근사시킬 때, 접촉점에서의 공통 법선 방향을 따라 측정한 두 포물면 사이의 거리가 앞에서 정의한 높이의 2차 근사값이 됨을 알 수 있다.

위의 계수 h_{ij} 들을 이용하여 다음과 같이 제 1 기본형(즉, 리만메트릭)을 설정하고 커스프 메트릭이라 한다.

$$ds^2 = h_{11}(u,v)\,du^2 + 2h_{12}(u,v)\,dudv + h_{22}(u,v)\,dv^2.$$

공구가 가공곡면을 과삭하지 않으면서 가공곡면 위를 움직인다면 커스프 메트릭을 제일기본형으로 하고 가공곡면과 위상동형인 리만 다양체가 정의된다.

3. 커스프 메트릭의 계산

곡면 상의 점 $\mathbf{p}(\bullet)$ 에 위치한 공구는 다음과 같이 매개변수 형식으로 표현될 수 있다.

$$(\alpha,\beta) \rightarrow \mathbf{q}(\alpha,\beta\,;\bullet)$$

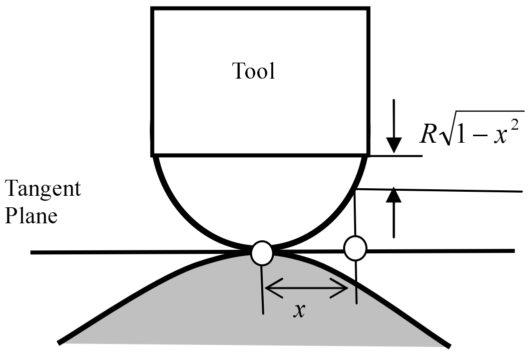

Fig. 3 Tool Surface Parameterization

식을 간단히 표현하기 위해, 이후로 접촉점, (u_o, v_o)을 경우에 따라 $\bullet$ 기호로 줄여 표현한다.

볼엔드밀의 외곽곡면을 다음과 같이 표현하는 것이 편리하다.

$$\mathbf{q}(\alpha,\beta;\bullet) = \mathbf{p}(\bullet) + R\cdot[\alpha\cdot\mathbf{p}_u(\bullet) + \beta\cdot\mathbf{p}_v(\bullet)] + R\left[1-\sqrt{1-\|\alpha\cdot\mathbf{p}_u(\bullet)+\beta\cdot\mathbf{p}_v(\bullet)\|^2}\right]\mathbf{N}(\bullet)$$

여기서, R은 공구의 반지름, $\mathbf{N}(u,v)$는 점 $\mathbf{p}(u,v)$에 위치한 곡면의 단위 법선 벡터이며, 아래첨자는 편미분을 나타낸다. Fig. 3은 이 표현의 원리를 보여준다. 즉, 접평면에 좌표축을 두고 구에 대한 Monge의 표현을 이용하였다. 이의 2차 근사식은 다음 형태,

$$\mathbf{q}(\alpha,\beta;\bullet) - \mathbf{p}(\bullet) \approx R\cdot(\alpha\cdot\mathbf{p}_u(\bullet)+\beta\cdot\mathbf{p}_v(\bullet)) + {}^{R}\!/_{2}\|\alpha\cdot\mathbf{p}_u(\bullet)+\beta\cdot\mathbf{p}_v(\bullet)\|^2\mathbf{N}(\bullet) \tag{1}$$

로 표현된다. 마찬가지로, 가공곡면은 점, $\mathbf{p}(\bullet) = \mathbf{p}(u_o, v_o)$ 근처에서 2차 근사식으로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{p}(u,v) - \mathbf{p}(\bullet) \approx \Delta u\cdot\mathbf{p}_u(\bullet) + \Delta v\cdot\mathbf{p}_v(\bullet) + {}^{1}\!/_{2}\left[\Delta u^2\mathbf{p}_{uu}(\bullet) + 2\Delta u\Delta v\mathbf{p}_{uv}(\bullet) + \Delta v^2\mathbf{p}_{vv}(\bullet)\right] \tag{2}$$

여기서, $\Delta u = u - u_o$, $\Delta v = v - v_o$.

한편, 높이 함수 h는 자신의 정의에 의해 다음 식,

$$\mathbf{p}(u,v) + h(u,v;\bullet)\cdot\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{q}(\alpha,\beta;\bullet)$$

을 만족하여야 한다. 여기에 식 (1)과 (2)를 대입하고 2차 근사 시키면, 다음의 근사 관계식,

$$R\alpha \approx \Delta u,\quad R\beta \approx \Delta v$$

$$2h(u,v;\bullet) \approx \|\Delta u\cdot\mathbf{p}_u(\bullet) + \Delta v\cdot\mathbf{p}_v(\bullet)\|^2/R - \left[\Delta u^2\mathbf{p}_{uu}(\bullet) + 2\Delta u\Delta v\mathbf{p}_{uv}(\bullet) + \Delta v^2\mathbf{p}_{vv}(\bullet)\right]\bullet\mathbf{N}(u,v)$$

을 얻는다. 이 식을 앞 절의 커스프 메트릭을 정의하는 식에 대입하여 다음의 결론에 도달한다.

$$h_{ij} = {}^{1}\!/_{2}(g_{ij}/R - d_{ij}). \tag{3}$$

여기서, R은 공구의 반지름, g_{ij}는 가공곡면의 제1기본형 계수이며 d_{ij}는 가공곡면의 제2기본형 계수이다. 구체적으로 기본형의 계수들은 다음과 같이 정의된다.

$$g_{11} = \mathbf{p}_u\bullet\mathbf{p}_u,\ g_{12} = \mathbf{p}_u\bullet\mathbf{p}_v,\ g_{22} = \mathbf{p}_v\bullet\mathbf{p}_v$$

$$d_{11} = \mathbf{p}_{uu}\bullet\mathbf{N},\ d_{12} = \mathbf{p}_{uv}\bullet\mathbf{N},\ d_{22} = \mathbf{p}_{vv}\bullet\mathbf{N}.$$

커스프 메트릭이 구해지면, 해당 제2종 크리스토펠 기호를 다음의 잘 알려진 공식으로부터 계산할 수 있다.[5]

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}h^{\lambda k}\left[\frac{\partial h_{j\lambda}}{\partial u^i} + \frac{\partial h_{\lambda i}}{\partial u^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^\lambda}\right]$$

여기서, $u^1 = u$, $u^2 = v$ 이고 합에 관한 아인쉬타인 규약이 적용되었다. 위의 기호는 주어진 가공곡면에 대한 크리스토펠 기호가 아니라 커스프 메트릭으로부터 계산되어야 함에 주의하여야 한다.

커스프 메트릭으로 정의되는 리만 다양체의 측지선은 다음의 연립 2차 상미분 방정식이 지배함이 잘 알려져 있다.[5, 6]

$$\frac{d^2u}{ds^2} = -\left[\Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{du}{ds}\right) + 2\Gamma^1_{12}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)\right]$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = -\left[\Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{du}{ds}\right) + 2\Gamma^2_{12}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)\right].$$

상기 미분방정식을 풀어 측지선을 구할 수 있고 하나의 원곡선(seed curve)으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합인 측지평행선을 구할 수 있다. 이 측지 평행선을 CC-경로로 활용하면 스켈롭 높이를 근사적으로 일정하게 유지할 수 있다. 스켈롭의 제한값을 h_o라 할 때, 이 근사법의 점근적 정밀도는 $O(h_o^{3/2})$임을 증명할 수 있다.[7]

4. 결론

볼엔드밀을 이용하여 일정 스켈롭 높이 공구 경로를 구현하기 위해 필요한 커스프 메트릭을 구하는 공식 (3)을 유도하였다. 공구 모양의 등방성으로 인해 해당 커스프 메트릭에 공구 반경 이외의 변인은 모두 가공곡면의 성질에서 기인하여야 함을 알 수 있다. 즉, 자유 곡면을 볼엔드밀로 가공할 때, 커스프 메트릭은 가공곡면의 제일, 제이 기본형과 공구반경으로 표현된다.

참고문헌

1. Suresh, K. and Yang DCH., ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 116, pp. 253-259, 1994.
2. Feng, H-Y and Li, H., CAD, 34, pp. 647-654, 2002.
3. Yoon, J-H, International Journal of Production Research, Vol. 43, No. 23, pp. 4989-4998, 2005.
4. 김태정, 본회 춘계학술대회, pp. 117-118, 2006.
5. Frankel, T., The Geometry of Physics, Cambridge University Press, Nov 2003.
6. Kreyszig, E., Differential Geometry, Dover Publications, June 1991.
7. Kim, T., "Constant Cusp Height Tool Paths as Geodesic Parallels on an Abstract Riemannian Manifold," CAD, under review, 2006.