

그래핑 계산기가 고등학교 학생의 탐구에 미치는 영향¹⁾

SHI Hongliang (Second Attached High Sc. of East China Normal Uni.)

LI Shiqi (East China Normal University)

이 글에서 우리는 탐구를 위해 그래핑 계산기를 사용할 때 탐구의 경험과 능력, 태도를 포함한 학생에 대한 영향을 조사하였다. 그래핑 계산기가 수학 탐구 과정의 기초를 형성한 이후에, 두 학생이 인터뷰되었고 당시 과정을 수료한 162명의 학생이 조사되었다. 결과는 그래핑 계산기가 학생의 탐구 능력을 개발하는데 유용한 도구라는 것을 보여준다. 대부분의 학생들은 그래핑 계산기에 대한 긍정적인 태도를 가졌고 그 사용에 흥미를 느꼈다.

서론

중국에서의 수학 교육은 지난 25년 동안 크게 변화했다. 많은 현대 교육 이론과 많은 교수학적 전략이 도입되었고 수학의 교수 학습에 크게 영향을 주었다. 그러나 교실에서의 상황은 여전히 전통적이고, 이것은 다음과 같이 요약될 수 있다: 지식-중심, 교사-중심, 시험-중심. 학생들의 생각은 다른 사람들에 의해 만들어진 지식을 담는 그릇으로 여겨진다. 교사는 교수의 모든 것을 통제하고 학생은 자신의 사고 기술을 개발시킬 충분한 기회를 제공받지 못한다. 시험-중심은 시험을 위한 교수-학습을 의미하고 시험에서 더 높은 점수를 얻은 학생이 좋은 학생으로 여겨지며 다른 것은 중요하지 않게 여긴다. 그런 전통이 많은 학생들에게 기계적인 학습으로 인해 국제 비교 연구에서 높은 점수를 가져다 줄지라도, 그 결과로 학생들은 자신의 창의성을 기를 기회를 잃을 것이고, 이것은 젊은 세대와 전체 국가의 발전 모두에 치명적이다. 학교에서의 가장 중요한 과목 중의 하나로서의 수학은 이제 교육 개혁을 위한 새로운 것을 시도하는 주요 영역이다.

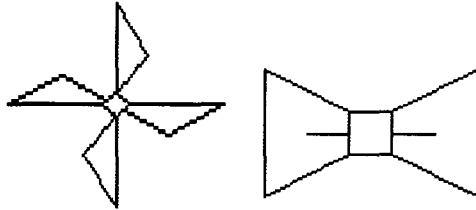
상해와 중국에서 전통적으로 최고의 수학 교육을 하는 학교 중 하나인 East China Normal University의 The Secondary Attached High School은 학생들의 창의성을 개발하기 위한 새로운 방법을 만들기 위해 노력해왔다. 이 학교의 교사는 '수학 탐구에 기반한 그래핑 계산기'라는 제목의 선택 과목에서 TI 그래핑 계산기를 도입했다. 과정의 내용과 수준은 공식적 교육과정의 제약을 받지 않았다. 약 20명의 학생들이 매 학기 이 과정에 등록한다. 그들은 18주 동안 매주 45분의 수업에 참석한다. 계산기의 사용에 관한 기본 기술 외에도, 교사는 주로 수학적 변환, 특수한 곡선, 수열, 급수

1) 이 논문은 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육연구> 제10권 1호(통권 25호)에 게재된 논문인 Graphing Calculator's Impact on Students' Exploration in Senior High School를 번역한 것입니다. (번역: 박재희·조경희(서울대학교 대학원))

등과 같은 4 또는 5개의 주제에 대해 소개한다. 학생들은 수학 개념을 탐구하기 위해 배웠던 것이나 스스로 흥미 있어 하는 방법을 사용하도록 요구되어지고, 그리고 나서 교사와 동료들과의 상호작용을 위한 많은 시간을 갖는다. 프로젝트-기반 평가가 적용된다. 학생들은 개별적으로 자신의 프로젝트를 수행하거나 동료들과 교환하고 전체 학급에서 발표할 기회를 갖는다. 따라서 이 과정은 위에서 언급했던 전통적인 수업과는 완전히 다르다.

예를 들어, 수업의 기본 주제의 하나인 평면 그래프의 행렬 변환은 그래프 변환의 개념과 좌표 변환의 개념 사이의 관계, 회전 변환 행렬의 개념과 선대칭 변환 행렬 사이의 관계 등을 포함한다. TI 83-plus 계산기로, 모든 주제는 다섯 가지 질문을 해결하는 것을 목표로 하였다:

1. 다음 그래프를 어떻게 그리는가?



<그림 1>

2. 점 $p'(x', y')$ 가 점 $p(x, y)$ 를 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전이동시킨 결과라면, p' 의 좌표를 p 의 좌표로 어떻게 나타내는가?
3. 점 $p(x, y)$ 가 y 축에 대해 선대칭 변환된다면, 대응되는 변환 행렬은 무엇인가?
4. 점 $p(x, y)$ 가 $y=kx$ 에 대해 선대칭 변환된다면, 대응되는 변환 행렬은 무엇인가?
5. 방과 후 탐구할 것:
 - $p(x, y)$ 가 직선 $y=kx+b$ 에 대해 선대칭 변환된다면 변환 행렬은 무엇인가?
 - 점의 그래프가 행렬에 의해 변환될 때 어떤 일이 발생하는가?

방법

이 연구는 주로 특정한 수업의 영향과 결과에 초점이 맞춰져 있다. 연구 문제는 다음과 같다:

- 학생들은 그래핑 계산기를 갖고 수학 탐구를 어떻게 경험하는가?
- 그래핑계산기의 사용이 고등학교 학생들의 수학적 탐구에 대한 흥미에 유의한가?
- 그래핑 계산기의 사용이 고등학교 학생들의 수학적 탐구의 능력에 도움이 되는가?

수업에 기반하여, 이 연구는 두 부분으로 나뉜다. 첫 번째 부분은 두 학생의 비 구조화된 면담의 사례연구인데, 이것은 학생들의 능력 개발 경험을 조사하는 것을 목표로 한다. 관찰은 이 학생들의

과제 보고서, 학급에서의 발표, 면담으로 진행되었다.

두 번째 부분은 더 탐구적인 문항을 가진 표준 수학 지식 시험 뒤의 조사이다. 이 부분에서 자료를 수집하기 위해 사용된 도구는 테크니컬 환경에서 탐구를 배울 때 학생들의 태도와 흥미를 알기 위한 6개의 문항으로 구성된 질문지이다. 참가자는 162명의 학생이고, 그들 대부분은 선택과목 수업에 참석했다.

연구 결과

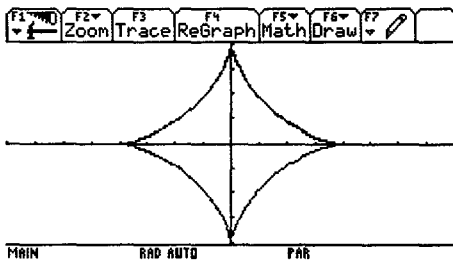
1. 관찰과 면담으로부터 우리는 그래핑 계산기의 도움으로 많은 학생들이 수학적 탐구에 적극적으로 참여하며 경험할 수 있고, 실제 상황과 수학적 상황에서 관찰, 실험, 유추, 귀납, 추측, 일반화, 증명, 해석, 평가와 같은 수학적 탐구의 주요 단계를 생각해 낼 수 있다는 것을 발견하였다. 새로운 테크놀로지 도구에 덕분에 학생들은 많은 직관적인 맥락에서 문제를 경험할 수 있었다.

면담에서, 학생 A는 학습 과정에서 기하학적 모양에 많은 관심을 가지는 여학생이다. A는 탐구의 주제로서 곡선을 선택했고 사이클로이드 족의 구조에 집중했다. 프로젝트 보고서에서, 그녀는 원의 중심이 각각 직선, 원, 사각형, 타원, 사이클로이드를 따라서 움직인다는 조건을 갖는 다섯 개의 사이클로이드의 구조를 탐구하기 위하여 계산기를 사용하였다.

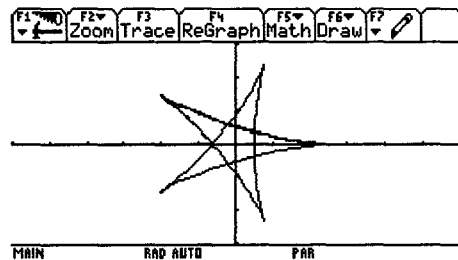
case 2에서 그녀는 방정식 :

$$\begin{cases} x = \frac{r}{k} \cos k\theta + r \cos \theta \\ y = \frac{r}{k} \sin k\theta - r \sin \theta \end{cases}$$

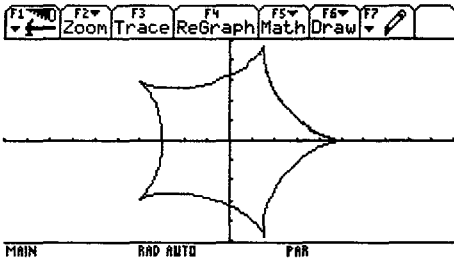
에 대하여 [GRAPH] 기능을 사용하였고 원을 시계방향으로 회전시키면서 여러 가지 k 값에 대하여 동시에 생각했다. 계산기에서 그녀는 원의 자취들을 얻었다. 그들 중 일부는 다음 (<그림 2>~<그림 11>)과 같다:



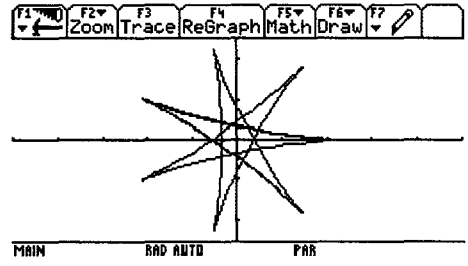
<그림 2> $k = \frac{1}{3}$



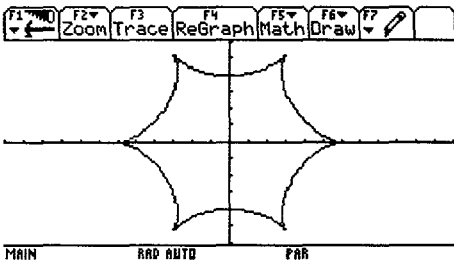
<그림 3> $k = \frac{2}{3}$



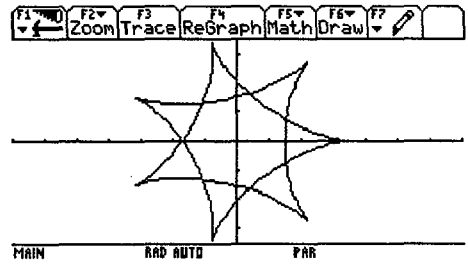
<그림 4> $k = \frac{1}{4}$



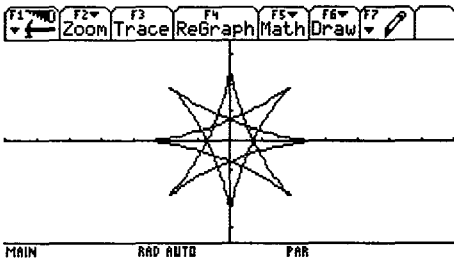
<그림 5> $k = \frac{2}{4}$



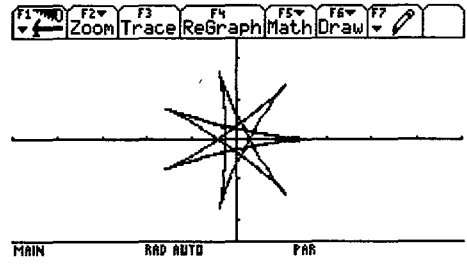
<그림 6> $k = \frac{1}{5}$



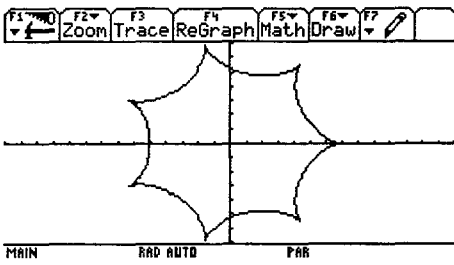
<그림 7> $k = \frac{2}{5}$



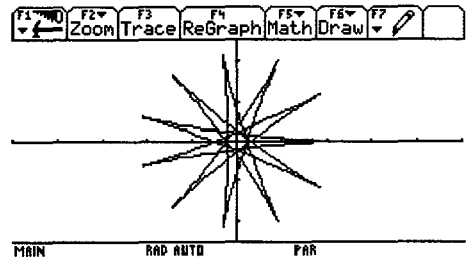
<그림 8> $k = \frac{3}{5}$



<그림 9> $k = \frac{4}{5}$



<그림 10> $k = \frac{1}{6}$



<그림 11> $k = \frac{5}{6}$

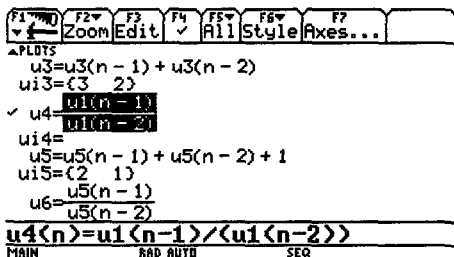
그리고나서 그녀는 예의 관찰로부터 다음과 같은 추측들을 하였다:

- $k = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{Z}$)이면 그래프는 $n+1$ 개의 꼭지점을 갖는다.
- $k = \frac{q}{n}$ ($(m, q) = 1, n, q \in \mathbb{Z}$)이면 그래프는 $n+q$ 개의 꼭지점과 $n+q$ 개의 교차점을 갖는다.
- $k = q$ 일 때의 그래프는 $k = \frac{1}{q}$ 일 때 그래프와 유사하다.

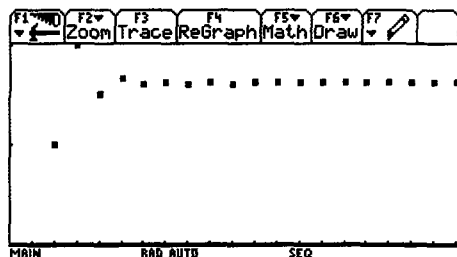
그녀는 보고서에서 추측한 것에 대한 증명까지 하였다.

그녀는 면담에서 자신의 경험을 다음과 같이 말하였다: 나는 원뿔을 배울 때 그래픽 계산기에 매력을 느꼈다. 종종 간단한 방정식은 나에게 예쁜 곡선을 소개할 수 있다. 그들은 어떻게 만들어졌고 어떤 성질이 있을까? 계산기는 나에게 방향을 제시해주었고 또한 탐구한 것을 신뢰하게 하였다. 가장 간단한 사이클로이드로 시작했을 때, 나는 상대적인 움직임 등과 같은 몇몇 요인들을 생각하였고, 관찰을 위하여 많은 그래프를 그렸다. 내가 손으로 그러한 그래프를 그리려고 했다면, 내 생각에는 하루 이상이 걸렸을 것이다. 나는 꽤 많은 그래프들을 분류하고 일반화하고 직관에 의해 얻어진 그래프들로부터 어떤 패턴을 추측하려고 노력했다. 물론, 추측은 아마도 계산기 없이 증명되어야 할 것이다. 이 과정은 나에게 놀이를 위한 게임 같았다.

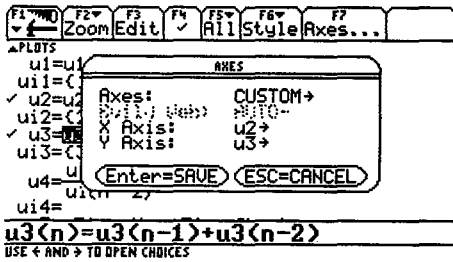
학생 B는 수에 관심을 갖고 있는 남학생으로, 계산기를 갖고 피보나치 수열의 성질을 탐구하였다. 그는 학습 과정에서 몇 단계를 거친 후에, 연속된 항들의 비를 구하는 것으로 방향을 전환하였고 화면에 새로운 수열을 쓰기 위하여 계산기의 몇 가지 기능을 응용하였다(<그림 12>, <그림 13>). 그는 화면에 나타난 비의 점들이 어떤 값에 접근하고 있는 것을 관찰하고 깜짝 놀랐다. 직관적인 현상은 그가 추측한 것을 체크해보도록 자극하였다. 다시 그는 이 점들을 계산기를 이용하여 대응하는 수로 바꾸었고 그 수가 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 의 근사값인 1.618에 접근하는 것을 보았다(<그림 14>, <그림 15>).



<그림 12>



<그림 13>



<그림 14>

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Del	Print	Print	Print	Print	Print
n	u4					
6.	1.6					
7.	1.625					
8.	1.6154					
9.	1.619					
10.	1.6176					
11.	1.6182					
12.	1.618					
13.	1.6181					
n=12.						
MAIN	RAD AUTO	SEQ				

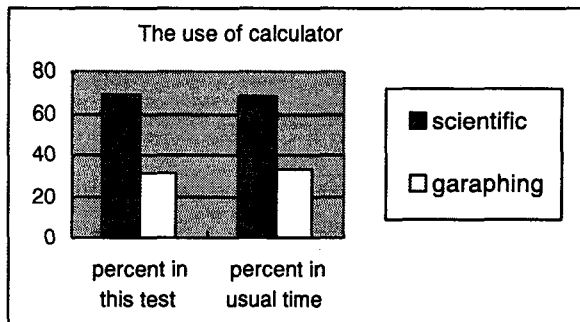
<그림 15>

그래서 그는 당연히 그것을 확신하고 싶어했다. 그의 경험은 또한 그가 설명과 이해를 위하여 더 많은 정보를 수집하는 것을 보여주었다. 그는 그의 탐구를 위하여 프로그램을 만들기까지 하였다. 그를 가르치는 교사의 생각에, 그는 내성적인 학생이고 수학 학습에 있어서는 더욱 수동적이었다. 그러나 그는 점점 더 활동적이 되어가는 것을 보여주었고 프로젝트를 수행할 때는 어떤 것을 조사하기 위하여 "용감하게" 보이기도 했다.

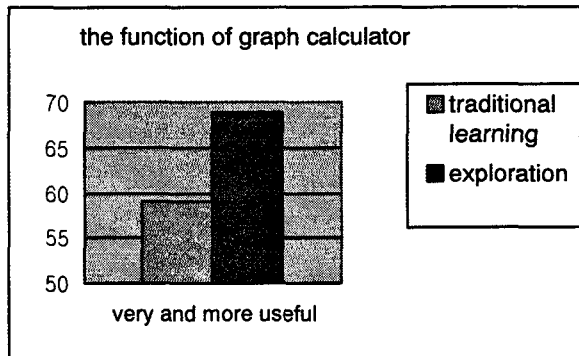
사실, 그래핑 계산기의 사용은 수학의 교수-학습 과정에 새로운 자극과 열정을 넣어줄 수 있는 하나의 수단이다 (Idris, 2005, Nor, 2005).

2. 계산기 사용을 경험한 대부분의 학생들이 보여준 자료는 학습과 탐구에 대하여 긍정적인 태도를 보여주었다.

설문지를 통해 수집된 자료는 약 68%의 학생들이 문제를 풀 때 종종 계산기를 사용한다는 것을 보여주었고(<그림 16>), 전혀 사용하지 않는 학생은 15%였다. 그러나 겨우 8%의 학생들만이 항상 그래핑 계산기를 사용하였고 43%는 덜 사용하였다. 그러나 대부분의 학생들은 그래핑 계산기가 전통적인 학습과 탐구적인 학습 모두에서 유용하다고 생각하였으며(<그림 17>), 탐구를 위해서도 유용하다고 생각하였다(69%).



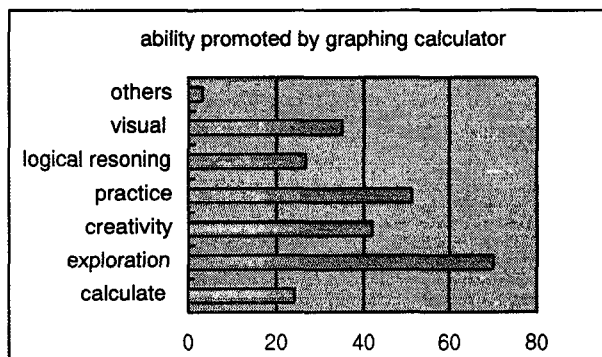
<그림 16>



<그림 17>

우리는 그래핑 계산기가 탐구에 유용하지 않다고 생각하는 학생들은 사용법을 전혀 배운 적이 없는 학생들이라는 것을 발견하였다. 그러나 시험에서 계산기를 사용한 학생들은 탐구를 위해서 매우 유용하다(46%) 또는 유용한 편이다(54%)라고 생각하였다. 그것은 학생들이 그래핑 계산기를 사용할 때 그래핑 계산기의 강력한 기능을 경험할 수 있다는 것을 의미한다. 결과는 학생들이 그래핑 계산기가 학생들의 수학적 탐구를 강력하게 지원했으며 수학의 학습과 탐구에 대한 그들의 흥미를 자극시켰다고 생각한다는 것을 보여준다.

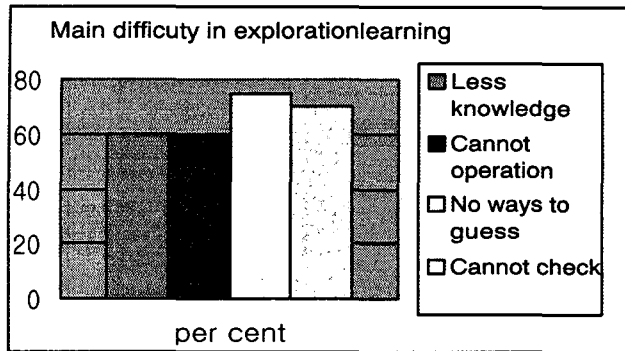
설문지의 특별한 항목은 학생들이 그래핑 계산기에 의해서 지원 받을 수 있는 능력이 무엇이라고 생각하고 있는지를 보여준다. 그 자료는 <그림 18>에 있다:



<그림 18>

탐구 능력은 70%의 학생들에 의하여 선택되었고 연습과 독창성 두 가지도 역시 많이 선택되었다.

그 과목을 공부할 때 자율적인 탐구를 경험한 학생들이 약 80%였지만, 단지 그들의 10%만이 프로젝트 보고서를 잘 끝냈음을 지적할 필요가 있다. 설문지에서 관련된 질문들의 답을 분석해보면, 학생의 탓으로 여겨지는 네 가지의 중요한 요인이 있었다: 학생들은 지식이 거의 없었다(60%), 조작이 계속되지 못했다(60%), 추측할 방법이 없었다(약 75%), 가설을 확인하지 못했다(약 70%).



<그림 19>

이 연구는 고등학교 최고학년 학생들의 탐구 능력 발달에 있어서 그래핑 계산기 사용의 영향을 연구한 것이다. 수학의 교수-학습에서 그래핑 계산기의 사용은 학생들에게 탐구 활동을 경험하도록 더 많은 기회를 제공하였고 학생들은 그것에 매우 흥미를 가졌다. 몇몇 학생들은 더 잘하게 되었다. 그러나 이것은 단지 시작하는 단계이다. 이러한 발견이 정책입안자들과 교사들에게 그러한 시도를 계속하도록 장려하고 미래에 더 많은 학생들을 위한 흥미롭고 중요한 수학적 주제를 점점 더 도입하도록 촉진함에도 불구하고, 우리는 또한 관련되어 있는 교육과정, 교수에 테크놀러지를 사용하는데 있어서의 교사의 능력과 전략, 그리고 학습에 있어서의 학생들의 연습 등과 같은 문제에 직면해 있다.

참 고 문 헌

- Acelajado, M. (2005). Use of Graphing Calculators in College Algebra: Cognitive and Non-cognitive Gains of Mathematics Students, <http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/SYM3.htm>.
- Huang, R. (2004). Cracking the Paradox of Chinese Learners: Looking into the Mathematics Classrooms in Hong Kong and Shanghai, in Fan et al. (Eds.) *How Chinese Learn Mathematics*, Singapore: World Scientific Publishers.
- Idris, N. (2005). A Graphing Calculator-based Instruction and Its Impact on the Teaching and Learning of Mathematics in Malaysia, <http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/SYM3.htm>.
- Li, J. (2004). A Chinese Cultural Model of Learning, in Fan et al. (Eds.) *How Chinese Learn Mathematics*, Singapore: World Scientific Publishers.
- Nor, N. (2005). Integrating the Graphic Calculator in the Problem-Solving Approach Used for Developing Students' Meaningful Understanding of the Concepts of Solving Two Simultaneous Linear Equations and Solving Linear Inequalities, <http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/SYM3.htm>.