韓國數學敎育學會 주최 제 11회
國際數學英才敎育세미나 프로시딩
2006. 2. 195-202

Proceedings of the 11th International Seminar on
Education of Gifted Students in Mathematics
February 2006. 195-202

전북대학교 과학영재교육원

- 중학수학분야 기초과정 교육 -

이 상 철 (전북대학교)

우선, 전북대학교 과학영재교육원에서 **중학수학분야 기초과정 교육**에 관하여 말씀드리겠습니다.

중학수학분야는 중학교 1학년 20명을 대상으로 기초과정 교육을 실시합니다.

교육시기는 기초과정은 1학기 중(별도 계획에 따라 4월-7월 5회), 여름방학 중(별도의 계획에 따라 8월 첫째 주), 2학기 중(9월-12월 동안 매월 1회 둘째주 토요일 오후 3:00-5:00), 겨울방학 중(별도의 계획에 따라 1월 첫째 주)에 집중교육을 실시합니다.

이제부터, **교재개발**은 예를 들어 다음 표에 준하여 하고 있습니다.

내용영역	개발자명	기초과정 (중1)							총 과제수
		1학기	여름방학	2학기				겨울방학	
		4월-7월	8월	9월	10월	11월	12월	1월	
기하 및 삼각함수	김연형		3주제					3주제	6주제
	방성원		1주제					2주제	3주제
대수 및 해석	조용환		2주제	1주제	1주제			2주제	6주제
	박연희		2주제					3주제	5주제
정수 및 조합	이상철	1주제	1주제					1주제	3주제
	위미앵		1주제			1주제	1주제		3주제
	김완중							3주제	3주제
합계		1주제	10주제	4주제				14주제	29주제

1학기 교육은 4월부터 시작됩니다. 기초과정은 4월-7월 동안에는 영재교육원에서 주관하여 별도의 계획에 따라 특별교육이 이루어집니다.

여름방학 중에는 8월 첫째 주에 일주일 동안 집중교육이 이루어지며 기초과정 학생들은 기숙사생활을 합니다.

2학기 교육은 매월 1회 기초과정은 매달 둘째주 토요일 오후 3:00-5:00에 이루어집니다.

겨울방학 중에는 2006년 1월 첫째 주에 일주일 동안 집중교육이 이루어지며 기초과정 학생들은 기숙사생활을 합니다.

1주제로 90분간 강의를 하며 원고는 1주제마다 **학생용**(증명이나 풀이 생략)과 **교사용**(증명과 풀이 포함)으로 구분하여 2부씩 작성하셔야 합니다.

겨울방학 중 집중교육프로그램과 교육내용을 예로 들면 다음과 같습니다.

학년도 겨울방학 [중학 수학반] 교육 프로그램

교육 일자 (요일)	교시	과제번호	학습과제명 (작성한 교재의 학습과제명)	담당 교수명	담당 교수소속	교실
1. 5 (월)	1-2	기숙사 입사				
	3-4	수학 11	피타고라스의 정리	김연형	전북대 수학교육과	사대본관 502
	5-6	수학 12	도형의 증명 1	방성원	전북과학고	사대본관 502
	7-8	수학 13	정수 I	이의출	우석고	사대본관 502
	9-10		과학도서 읽기			
1. 6 (화)	1-2	수학 14	도형의 증명 2	방성원	전북과학고	사대본관 502
	3-4	수학 15	원과 직선	김연형	전북대 수학교육과	사대본관 502
	5-6		컴퓨터특강			
	7-8	수학 16	정수 II	이의출	우석고	사대본관 502
	9-10		지도교수 상담 및 개별 지도	이상철	전북대 수학교육과	사대본관 502
1. 7 (수)	1-2	수학 17	수의 패턴 (I)	박연희	전북대 수학교육과	사대본관 502
	3-4	수학 18	원과 사각형 ·원과 비례	김연형	전북대 수학교육과	사대본관 502
	5-6		과학특강 3			
	7-8	수학 19	조합	이의출	우석고	사대본관 502
	9-10		특강			
1. 8 (목)	1-2	수학 20	수의 패턴 (II)	박연희	전북대 수학교육과	사대본관 502
	3-4	수학 21	다각형의 내각과 외각의 합	방성원	전북과학고	사대본관 502
	5-6		영상사업단 특별 실습 1C			
	7-8					
	9-10		특강			
1. 9 (금)	1-2	수학 22	수열에 대하여	박연희	전북대 수학교육과	사대본관 502
	3-4		특강 3			
	5-6	수학 23	Fermat정리, 소수와 합성수	이상철	전북대 수학교육과	사대본관 502
	7-8		과학특강 4			
	9-10		지도교수 상담 및 과학도서 감상문 발표	이상철	전북대 수학교육과	사대본관 502
1. 10 (토)	1-2	수학 24	Repunit, 삼각수, 완전수	이상철	전북대 수학교육과	사대본관 502
	3-4	총괄평가 및 제 6기 과학영재교육 기초과정 이수자 수료식				

-오전 1-2교시 9:20-10:50 3-4교시 11:00-12:30 -오후 5-6교시 14:00-15:30 7-8교시 15:40-17:10 -야간 9-10교시 19:00-20:30

교 육 과 정	기초과정	교 육 분 야	중학수학
교 육 시 간	2003년 1월 7일 (1-2교시)	과 제 번 호	수학14
교 육 장 소	전북대학교 사범대학 본관 106호		
학 습 과 제	Repunit, 삼각수, 완전제곱수		
학 습 목 표	1. Repunit와 삼각수를 정의하여 이에 관련된 문제를 해결한다. 2. 무한소수에 대하여 논한다. 3. 완전제곱수를 안다.		

교육방법	교육형태	교육수준	교육시수	담당교수명 (소속)
방학중 합숙	강의, 토론, 과제수행	중3수준	2시간	이상철 (전북대학교 수학교육과)

학 습 개 요

1. Repunit와 삼각수(triangular number)를 정의한다.

2. $11\cdots1_5$ (1은 짝수 개)는 두 연속된 양의 정수들의 곱임과 9진법의 임의의 repunit는 삼각수임을 증명한다.

3. $11\cdots1$(1은 $2n$개) $-$ $22\cdots2$(2는 n개)이 완전 제곱수임을 증명하고 $\sqrt{11\cdots1(1\text{은 } 2n\text{개}) - 22\cdots2(2\text{는 } n\text{개})}$을 구한다.

4. $0.999\cdots$ 가 1임을 증명한다.

7. $\sqrt{3}$을 연분수로 전개한다.

8. 다음 두 식을 간단히 한다.

(1) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{10^2})$.

(2) $\sum_{k=1}^{9} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{9}{10!}$

9. 자연수의 최대지수를 구하는 문제를 해결한다,

10. 소수를 요구하는 꼴로 전개하는 문제를 해결한다.

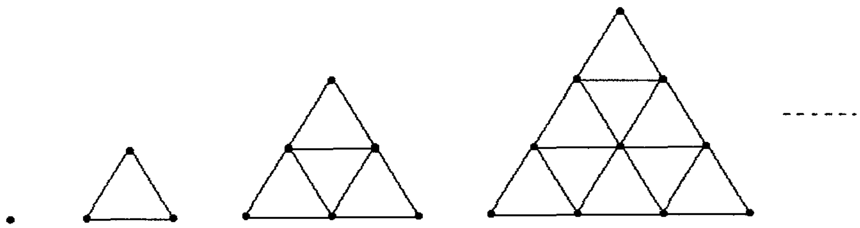
11. Fibonacci 수열의 항을 계수로 가지는 일차부정방정식의 정수해를 구하는 문제를 해결한다.

12. 이차행렬의 곱, Fibonacci 수열 및 Cantor의 전개식과 관련된 문제를 해결한다.

Repunit, 삼각수, 완전제곱수

정의 1. 모든 자리에 1만을 포함하는 수를 **Repunit**라고 한다. 예를 들면, 1, 11, 111, 1111, ⋯들은 repunit들이다.

'모든 것은 수'라고 믿었던 Greece의 수학자이며 철학자인 Pythagoras(582?-500? B.C.)는 수는 일정한 크기를 가진 것, 그러니까 모양을 가진다고 생각하였다. 그 예로 삼각수라는 것이 있다. 삼각수란 아래 그림과 같이 점을 정삼각형 꼴로 늘어서게 하여 나타낼 수 있는 수를 가리킨다.



정의 2. 어떤 양의 정수 n이 존재하여 $\frac{n(n+1)}{2}$인 꼴의 수를 **삼각수(triangular number)**라고 한다.

문제 3. (1) $11\cdots1_5$ (1은 짝수 개)는 두 연속된 양의 정수들의 곱임을 증명하여라.

(2) 9진법의 임의의 repunit는 삼각수임을 증명하여라.

풀이. (1)

$$\begin{aligned} 11\cdots1_5\,(1\text{은 } 2n\text{개}) &= 1+5+5+\cdots+5^{2n-1} \\ &= \frac{5^{2n}-1}{5-1} \\ &= \frac{5^n-1}{2}\cdot\frac{5^n+1}{2} \end{aligned}$$

이고 $\frac{5^n-1}{2}$, $\frac{5^n+1}{2}$는 두 연속된 정수이다.

(2) 9진법의 임의의 repunit는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} 11\cdots1_9\,(1\text{은 } n\text{개}) &= 1+9+9^2+\cdots+9^{n-1} \\ &= \frac{9^n-1}{9-1} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3^n-1}{2}\cdot\frac{3^n+1}{2} \end{aligned}$$

이고 $\frac{3^n-1}{2}$, $\frac{3^n+1}{2}$은 두 연속된 정수이다. 따라서, 9진법의 임의의 repunit는 삼각수이다. □

정의 4. $a \in Z$라고 하자. $a = b^2$인 정수 b가 존재할 때, a를 **완전 제곱수**(perfect square)라고 한다.

문제 5. $11\cdots1$(1은 $2n$개)$-22\cdots2$(2는 n개)이 완전 제곱수임을 증명하고 $\sqrt{11\cdots1(1\text{은 }2n\text{개})-22\cdots2(2\text{는 }n\text{개})}$을 구하여라.

풀이.

$$\begin{aligned} 11\cdots1(1\text{은 }2n\text{개})-22\cdots2(2\text{는 }n\text{개}) &= 11\cdots100\cdots0(1\text{은 }n\text{개이고 }0\text{도 }n\text{개})+11\cdots1(1\text{은 }n\text{개}) \\ &\quad -22\cdots2(2\text{는 }n\text{개}) \\ &= 11\cdots100\cdots0(1\text{은 }n\text{개이고 }0\text{도 }n\text{개})-11\cdots1(1\text{은 }n\text{개}) \\ &= 11\cdots1(1\text{은 }n\text{개})\times(10^n-1) \\ &= 11\cdots1(1\text{은 }n\text{개})\times 99\cdots9(9\text{은 }n\text{개}) \\ &= 33\cdots3(3\text{은 }n\text{개})\times 33\cdots3(3\text{은 }n\text{개}) \end{aligned}$$

이다. 따라서, 주어진 수는 완전제곱수이고

$\sqrt{11\cdots1(1\text{은 }2n\text{개})-22\cdots2(2\text{는 }n\text{개})} = 33\cdots3\,(3\text{은 }n\text{개})$. □

문제 6. $n^2 = 11111111 - 2222$인 자연수 n을 구하여라.

풀이.

$$\begin{aligned} n^2 &= 1111\cdot(10^4+1) - 2\cdot 1111 \\ &= 1111\cdot(10^4-1) \\ &= 1111\cdot 9999 \\ &= 3^2\cdot 1111^2 \\ &= 3333^2 \end{aligned}$$

따라서, $n = 3333$. □

우선, 다음과 같은 기본적인 문제부터 풀어 본다.

문제 7. $0.999\cdots$ 가 1임을 증명하여라.

풀이. $x = 0.999\cdots$ 라고 놓는다. 이 때, 양변에 10을 곱하면,

$$10x = 9.999\cdots = 9 + x$$

이고 따라서, $9x = 9$. 그러므로, $x = 1$이다. □

고등학교에서 수열의 극한의 개념을 배운다. 문제 6은 수열의 극한의 개념을 알면 다음과 같이 해결할 수 있다. $0.999\cdots$는 수열 $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \cdots$의 극한값이다. 그런데,

$$0.9=\frac{9}{10}=1-\frac{1}{10},$$
$$0.99=\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{10^2},$$
$$0.999=\frac{999}{1000}=1-\frac{1}{1000}=1-\frac{1}{10^3},$$
$$\vdots$$
$$0.99\cdots9(9\text{는 } n\text{개})=1-\frac{1}{10^n},$$
$$\vdots$$

이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$이다. 따라서, $0.999\cdots=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{10^n})=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=1.$

문제 8.

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

임을 증명하여라.

풀이. $x=1+\frac{1}{2+\cdots}$ 라고 하자. 그러면, $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}$ 이다. 이 식으로부터 $2x^2-2x-1=0$ 을 얻고 따라서, 이것을 풀어 $x>0$임에 주의하면, $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서, 구하는 수는 다음과 같다.

$$1+\frac{1}{x}=1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\cdots=\sqrt{3}.\ \square$$

문제 9. 다음을 간단히 하여라.

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{10^2})$$

풀이.

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{10^2})$$
$$=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\,\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\,\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdots\frac{(9-1)(9+1)}{9^2}\,\frac{(10-1)(10+1)}{10^2}$$
$$=\frac{11}{20}.\ \square$$

문제 10. $\sum_{k=1}^{9}\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{9}{10!}$ 을 간단히 하여라.

(단, $(k+1)\neq(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$)

풀이.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{9}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{9}\left(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}\right)\\ &= 1-\frac{1}{10!}.\ \square\end{aligned}$$

문제 11. $1000!\times 2000!$을 나누어 떨어뜨리는 7의 최대지수를 a라 하고 $\frac{2000!}{1000!}$을 나누어 떨어뜨리는 7의 최대지수를 b라 할 때, $a+b$를 구하여라.

풀이. $[\frac{1000}{7}]=142$, $[\frac{142}{7}]=20$, $[\frac{20}{7}]=2$이고, $[\frac{2000}{7}]=285$, $[\frac{285}{7}]=40$, $[\frac{40}{7}]=5$ 이므로 1000!을 나누어 떨어뜨리는 7의 최대지수는

$$\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{142}{7}\right]+\left[\frac{20}{7}\right]=142+20+2=164$$

이다. 2000!을 나누어 떨어뜨리는 7의 최대지수는

$$\left[\frac{2000}{7}\right]+\left[\frac{285}{7}\right]+\left[\frac{40}{7}\right]=285+40+5=330$$

이다. 따라서, $a=330+164$, $b=330-164$이다. 그러므로, $a+b=660$이다. $\square$

문제 12. 소수 0.25를 다음과 같은 꼴로 전개하여라:

$$\frac{a}{2!}+\frac{b}{3!}+\frac{c}{4!}+\cdots$$

여기서, $0\le a<2$, $0\le b<3$, $0\le c<4$, …인 정수이다.

풀이.

$$0.25=\frac{a}{2!}+\frac{b}{3!}+\frac{c}{4!}+\cdots$$

양변에 2을 곱하면,

$$0.5=a+\frac{b}{3}+\frac{c}{4\times3}+\frac{d}{5\times4\times3}+\cdots$$

이다. 따라서, $a=0$이다.

$$0.5=\frac{b}{3}+\frac{c}{4\times3}+\frac{d}{5\times4\times3}+\cdots$$

양변에 3을 곱하면,

$$1.5=b+\frac{c}{4}+\frac{d}{5\times4}+\cdots$$

이다. 따라서, $b=1$이다.

$$0.5=\frac{c}{4}+\frac{d}{5\times4}+\cdots$$

양변에 4를 곱하면,

$$2=c+\frac{d}{5}+\frac{e}{6\times5}+\cdots$$

이다. 따라서, $c=2$이다.

$$0=\frac{d}{5}+\frac{e}{6\times5}+\cdots$$

따라서, $d=e=\cdots=0$이다. 그러므로, $0.25=\frac{0}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{2}{4!}$이다. □

문제 13. $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 를 Fibonacci 수열이라고 하자. 이때, 일차부정방정식

$$(f_2+f_3+f_4)x+(f_3+f_6)y=f_3(f_3+f_6)$$

의 정수해를 구하여라.

풀이. $f_1=1,\ f_2=1,\ f_3=2,\ f_4=3,\ f_5=5,\ f_6=8$이므로, 주어진 식은 $6x+10y=20$이다.

이것을 풀면, $\begin{cases} x = 20 + 5k \\ y = -10 - 3k \end{cases}$ $(k\in Z)$. □

문제 14. 정수를 항으로 가지고 있는 두 행렬 A, B의 곱 $A\cdot B$은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

이제, $f_1, f_2, f_3, \cdots$를 Fibonacci 수열이라고 하자. 이 때,

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

라고 할 때,

(1) $c_1+c_2+c_3+c_4$를 구하여라.

(2) (1)에서 구한 양의 정수를 Cantor 식으로 전개하여라.

(3) (2)에서 구한 전개식에서 1!, 2!, 3!, 4!, …의 계수들의 총합을 구하여라.

풀이. $f_1=1,\ f_2=1,\ f_3=2,\ f_4=3,\ f_5=5,\ f_6=8,\ f_7=13,\ f_8=21$이므로

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 29 \\ 49 & 79 \end{pmatrix}.$$

(1) $c_1+c_2+c_3+c_4=175.$

(2) $175=1\cdot5!+2\cdot4!+1\cdot3!+0\cdot2!+1\cdot1!.$

(3) (2)에 의하여, 5이다. □