

3-이웃 셀룰라 오토마타의 도달 가능/불가능 상태 분석

조성진* · 권숙희* · 황윤희* · 최연숙** · 김한두***

*부경대학교 · **동명대학교 · ***인제대학교

Analysis of Reachable/Nonreachable States of 3-neighborhood Cellular Automata

Sung-Jin Cho* · Suk-Hee Kwon** · Yoon-Hee Hwang*** · Un-Sook Choi**** · Han-Doo Kim*****

*Pukyong National Univ. · **Tongmyong Univ. · ***Inje Univ.

E-mail : sjcho@pknu.ac.kr

요 약

본 논문에서는 3-이웃 셀룰라 오토마타의 도달 가능/불가능한 상태를 분석하고 도달가능 상태의 직전자를 구하는 알고리즘을 제안한다.

ABSTRACT

In this paper, we analyze reachable/nonreachable state of 3-neighborhood cellular automata and propose give the algorithm finding the predecessor of a reachable state.

키워드

셀룰라 오토마타, 전이규칙, 직전자, 도달가능 상태 트리

I. 서 론

셀룰라 오토마타(Cellular Automata; 이하 CA)는 von Neumann에 의하여 자체 재생산 할 수 있는 모델로 처음 소개되었다. 이후 Wolfram은 다음 상태가 스스로 조직화되고 갱신되는 3-이웃 상호연결을 만족하는 간단한 구조를 소개하였다[1]. Cattell 등에 의해서 LFSR에 대응하는 CA에 대한 연구와 최대 길이를 갖는 CA를 찾는 연구가 수행되었다[2]. 또, Cho 등은 nongroup CA의 특성에 관한 연구를 하였다[3, 4]. CA는 이산 시간의 동적 시스템으로 셀의 기본 단위 메모리의 배열로 이루어진다. 즉, 각 셀들은 자기 자신과 이웃 셀들의 함수값에 의해 다음 상태가 동시에 갱신된다.

본 논문에서는 3-이웃 셀룰라 오토마타의 상태가 도달가능한지, 불가능한지를 판별하고 도달가능 상태의 직전자를 구하는 알고리즘을 제안한다.

II. 셀룰라 오토마타

본 논문에서 사용되는 3-이웃 CA 상태전이함수는 $s_i^{t+1} = f(s_{i-1}^t, s_i^t, s_{i+1}^t)$ 이다. s_i^t 는 시간 t 에서 i 번째 셀의 상태를 나타내고, f 는 결합논리를 가지는 함수이다. 예를 들면, 규칙 105는 다음과 같다.

현재상태	111	110	101	100	011	010	001	000
다음상태	0	1	1	0	1	0	0	1

* 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구지원 사업(R01-2006-000-10260-0)에 의해 수행되었음.

01101001(이진 표현) ⇒ 105(십진 표현)

규칙 105처럼 다음 상태의 8-비트 이진표현에서 0과 1의 개수가 같은 규칙을 균형이 잡힌 규칙(balanced rule)이라 하고, 그렇지 않은 경우 균형이 깨진 규칙(unbalanced rule)이라 한다. 시간 t 에서 셀들의 상태 $s^t = (s_1^t, s_2^t, \dots, s_n^t)$ 의 다음 상태는 다음과 같다.

$$s^{t+1} = (f_1(s_0^t, s_1^t, s_2^t), f_2(s_1^t, s_2^t, s_3^t), \dots, f_n(s_{n-1}^t, s_n^t, s_{n+1}^t))$$

여기서 사용되는 CA는 NBCA(Null Boundary CA)로서, $s_0^t = s_{n+1}^t = 0$ 이다.

CA는 상태전이그래프의 형태에 따라 모든 셀의 상태가 몇 개의 사이클을 이루며 반복되는 그룹 CA와 그렇지 않은 비그룹 CA로 나뉜다. 그룹 CA는 임의의 한 상태에 대한 직전자가 유일하므로 모든 상태가 도달가능하다. 이와 달리 비그룹 CA는 상태전이그래프가 트리 구조를 이루고 있으며, 상태전이 함수에 의해 얻어질 수 있는 상태인 도달가능 상태와 상태전이함수에 의해 나타날 수 없는 도달불가능 상태로 나누어진다.

III. 도달 가능/불가능 상태

이 장에서는 주어진 CA에 대하여 상태 x 가 도달가능 상태인지 도달불가능 상태인지를 판별한다. 그리고 직전자를 구하고 도달가능한 상태의 트리를 구성한다.

예를 들어, 규칙이 <83, 51, 105, 25>인 CA에서 상태 0011(3)가 도달가능 상태라고 가정하고, 표 1에서의 규칙들의 RMT(Rule Min Term; 현재상태의 십진표현)로부터 0011의 다음 상태를 구해보자. 본문에서 사용되는 CA는 null boundary CA이기 때문에 RMT들의 일부가 다음 생애에 영향을 주지 않으므로 'X'를 이용하여 표현한다.

표 1. 규칙 <83, 51, 105, 25>에 대한 진리표

현재 상태	111	110	101	100	011	010	001	000	규칙
첫 번째 셀	X	X	X	X	0	0	1	1	83
두 번째 셀	0	0	1	1	0	0	1	1	51
세 번째 셀	0	1	1	0	1	0	0	1	105
네 번째 셀	X	0	X	1	X	0	X	1	25

상태 0011의 첫 번째 비트 0을 얻기 위해서는 CA의 첫 번째 셀인 규칙 83의 2번째와 3번째 즉, RMT=2와 3에서 0으로 주어졌기 때문에, 2번째 또는 3번째 RMT에서 유도된다. 이러한 두 개의

RMT를 $x_1 = \{2, 3\}$ 이라 적는다. 다음으로, 규칙 51에서 두 번째 비트 0을 얻으려면, 가능한 RMT의 집합은

$$P_2 = \{100(4), 101(5), 110(6), 111(7)\}$$

이다. 또한 규칙 51에서 얻고자 하는 상태 0에 대응하는 RMT의 집합 R_2 는

$$R_2 = \{010(2), 011(3), 110(6), 111(7)\}$$

이다. 따라서 가능한 RMT의 집합 x_2 는 $P_2 \cap R_2 = \{6, 7\}$ 이다. 마찬가지로 규칙 105인 경우는 $P_3 = \{4, 5, 6, 7\}$ 이고 $R_3 = \{0, 3, 5, 6\}$ 이므로 $x_3 = \{5, 6\}$ 이다. 마지막으로 규칙 25인 경우는 $P_4 = \{2, 4\}$ 이고, $R_4 = \{0, 4\}$ 이므로 $x_4 = \{4\}$ 이다. 상태 0011(3)의 경우 $x_4 = \{4\}$ 는 x_3 의 6에서 유도되고, x_2 는 6에서 같은 방법으로 7에서 유도되고, x_1 은 3에서 유도되므로 직전자가 1110이고 따라서 0011은 도달가능 상태이다.

이제 도달가능 상태를 나타내는 트리를 구성하는 방법에 대해 알아보고, 이 트리를 이용하여 몇 가지 정리를 이끌어낸다. 도달가능 트리의 각 노드는 최대 2개의 자식 노드를 가질 수 있다. n 셀 CA에서의 레벨의 수는 $(n+1)$ 이다. 단말 노드의 수는 도달가능 상태의 개수를 나타낸다. n 비트 이진 문자열을 나타내는 근노드에서부터 단말 노드까지의 자식 노드들로 이루어진 수열은 도달가능 상태를 나타낸다. 즉, 규칙 <83, 51, 105, 25>인 CA의 도달가능 상태 트리를 만들면 그림 1과 같다.

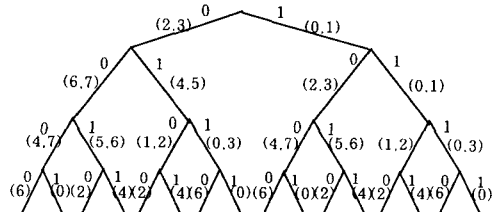


그림 4. 규칙이 <83,51,105,25>인 CA의 도달가능 상태 트리

<정리 1> n -셀 CA C 의 도달가능 상태 트리를 T 라 할 때, C 가 그룹 CA일 필요충분조건은 T 는 완전 이진트리인 것이다.

<따름정리 2> CA의 도달가능 상태 트리 T 의 단노드를 제외한 각 노드가 정확히 두 개의 RMT를 따르면, T 는 완전 이진트리이다.

<정의 1> CA의 도달가능 상태 트리 T 에 대하여 T 가 중앙을 지나는 수직선을 중심으로 좌측과 우측이 대칭을 이루면, T 를 대칭트리(symmetric tree)라고 한다.

<정의 2> 하나의 CA C가 다음과 같은 세 조건 중에서 적어도 하나를 만족할 때, C를 균형이 깨진 규칙을 갖는(having unbalanced rule) CA라고 정의한다.

(i) 첫 번째 셀의 RMT들 0, 1, 2와 3이 균형이 깨진 경우,

(ii) 마지막 셀의 RMT들 0, 2, 4와 6의 다음 상태의 0과 1의 개수가 다른 경우,

(iii) 첫 번째와 마지막을 제외한 셀 중에는 적어도 하나의 균형이 깨진 규칙이 있는 경우

이와는 반대로, 균형이 깨진 규칙을 갖지 않는 CA를 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA라고 정의한다.

규칙이 <83, 51, 105, 25>인 CA는 표 1에서와 같이 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA이다. 그러나 규칙이 <49, 105, 90, 73>인 CA는 표 2에서와 같이 균형이 깨진 규칙을 갖는 CA이다.

표 2. 규칙이 <49, 105, 90, 73>인 CA의 진리표

현재 상태	111	110	101	100	011	010	001	000	규칙
첫 번째 셀	X	X	X	X	0	0	0	1	49
두 번째 셀	0	1	1	0	1	0	0	1	105
세 번째 셀	0	1	0	1	1	0	1	0	90
네 번째 셀	X	1	X	0	X	0	X	1	73

규칙이 <25, 195, 85, 37>인 CA의 진리표는 표 3과 같이 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA이다. 이 CA의 도달가능 상태 트리를 그려보면 그림 2와 같이 CA의 도달가능 상태 트리가 대칭이지만 완전 이진트리는 아니다. 그림 2는 01과 10으로 시작하는 모든 상태는 직전자를 갖지 않음을 보여주고 있다.

표 3. 규칙이 <25, 195, 85, 37>인 CA의 진리표

현재 상태	111	110	101	100	011	010	001	000	규칙
첫 번째 셀	X	X	X	X	1	0	0	1	25
두 번째 셀	1	1	0	0	0	0	1	1	195
세 번째 셀	0	1	0	1	0	1	0	1	85
네 번째 셀	X	1	X	0	X	0	X	1	37

<정리 3> 균형이 깨진 규칙을 갖는 CA는 비그룹 CA이다.

정리 3의 역은 일반적으로 성립하지 않는다. 규칙 <25, 195, 85, 37>을 갖는 CA는 비그룹 CA이지만 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA이다.

<정리 4> 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA의 도달가능 상태 트리는 항상 대칭트리이다.

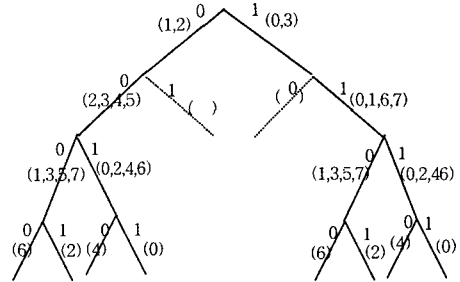


그림 2. 규칙이 <25,195,85,37>인 CA의 도달가능 트리

IV. 도달가능 상태의 직전자

이 장에서는 CA가 도달가능한지 불가능한지를 판정하고 도달가능한 경우 직전자를 구한다. 표 4에 따르면 i 번째 셀 규칙에서 선택된 RMT가 k 이면, $(i+1)$ 번째 셀은 다음과 같은 규칙을 가진다.

표 4. $(i+1)$ 번째 셀의 규칙

RMT	0	1	2	3	4	5	6	7	
$2k$	0	2	4	6	0	2	4	6	짝수
$2k+1$	1	3	5	7	1	3	5	7	홀수

표 4를 이용하여 CA 상태 x 가 도달 가능/불가능한지를 알아보고 x 가 도달가능한 상태일 때, x 의 직전자를 찾는 알고리즘은 표 5와 같다.

V. 결론

본 논문에서는 3-이웃 셀룰라 오토마타의 도달 가능/불가능한 상태를 판별하고 도달가능 상태에 대해서 직전자를 구하는 알고리즘을 제안하였다. 또한 도달가능 상태의 트리를 구성하여 CA가 그룹인지 비그룹인지를 판별하였다.

표 5. 도달가능 상태의 직전자를 찾는 알고리즘

INPUT : 규칙 [n] [8], 상태 [n], n.
 OUTPUT1 : 도달불가능이면 1, 나머지는 0
 OUTPUT2 : 도달가능한 상태의 직전자

Step1: 규칙 [1][j] = 상태 [1], $j = 0, 1, 2, 3$ 을 만족하는 x_1 을 구한다.
 If $x_1 = \emptyset$ then OUTPUT1=1 END.

Step2: $i = 2$ 에서 $n - 1$ 까지
 (a) $P_i = \{2k, 2k+1 \pmod{8} \mid k \in x_{i-1}\}$
 (b) $R_i = \{j\}$, j 는 다음을 만족한다.
 규칙 [i][j] = 상태 [j], $j = 0, 1, \dots, 7$
 (c) $x_i = P_i \cap R_i$
 (d) If $x_i = \emptyset$ then OUTPUT1=1 END.

Step 3: (a) $P_n = \{2k, 2k+1 \pmod{8} \mid k \in x_{n-1}\}$
 (b) $R_n = \{j\}$, j 는 다음을 만족한다.
 규칙 [i][j] = 상태 [j], $j = 0, 2, 4, 6$
 (c) $x_n = P_n \cap R_n$ 을 구한다.
 (d) If $x_n = \emptyset$ then OUTPUT1=1
 else OUTPUT1=0 END.

Step 4: x_n 에 대하여 다음을 구한다.
 (a) $S_n = \left\{ \frac{a}{2}, \frac{a+8}{2} \mid a \in x_n \right\}$
 (b) $y_{n-1} = S_n \cap x_{n-1}$
 (c) $\left\lfloor \frac{y_{n-1}}{2} \right\rfloor$ 를 이진수 $n-1$ 과 n 번째 셀에 채운다.

Step 5: $x_j, j = n-1$ 부터 2까지,
 (a) $S_j = \left\{ \frac{a}{2}, \frac{a+8}{2} \mid a \in y_{n-1} \right\}$
 (b) $y_{j-1} = S_j \cap x_{j-1}$
 (c) If $y > 4$
 then ($n-j+1$ 번째 셀에 1을 채운다)
 else ($n-j+1$ 번째 셀에 0을 채운다)

END.

참고문헌

- [1] S. Wolfram, O. Martin and A. M. Odlyzko, *Algebraic properties of cellular automata* Communications in Mathematical Physics, 3, pp. 219-258, 1984.
- [2] K. Cattell and J. Muzio, *Analysis of one-dimensional linear hybrid cellular automata over GF(q)*, IEEE Transactions of Computers, Vol. 45(7), pp. 782-792, 1996.
- [3] S. J. Cho, U. S. Choi, and H. D. Kim, *Analysis of complemented CA derived from a linear TPMACA*, Computers and Mathematics with Applications, Vol.45, pp. 689-698, 2003.
- [4] S. J. Cho, U. S. Choi, Y. H. Hwang, H. D. Kim and Y. S. Pyo, *Analysis of state-transition of SACA over GF(2^p)*, J. Kor. Info. Security and Cryptology, Vol.15, pp. 105-111, 2005.
- [5] S. Das, B. K. Sikdar and P. P. Chaudhuri, *Characterization of reachable/ nonreachable cellular automata states*, LNCS 3305, pp. 813-822, 2004.