

웨이브렛 평면에서 신호의 국부 필터링에 관한 연구

배 상 범* · 김 남 호*

*부경대학교 제어계측공학과

A Study on Local Filtering of Signal in Wavelet Plane

Sang-Bum Bae* · Nam-Ho Kim*

*Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : blueskybsb@pknu.ac.kr

요 약

현대사회의 발전을 이끌어 온 기초과학과 공학의 여러 분야에서는 신호와 시스템의 특징을 정확하게 표현하기 위해 많은 연구를 수행해왔다. 뿐만 아니라, 현재까지도 신호로부터 더욱 많은 정보를 획득하고, 고속으로 처리하기 위한 많은 방법과 변환에 대한 연구를 수행하고 있다. 이러한 방법들 중에서, 푸리에 변환은 현재까지 공학의 여러 응용분야에서 가장 광범위하게 적용되고 있으나 신호의 시간정보를 제공하지 않으며, 분석 신호에 대한 전체적인 특징만을 나타낸다. 푸리에 변환에서 발생하는 이러한 시간적 국부성의 단점을 해결하기 위해 제시되어, 근래에 급속도로 그 응용범위가 확장되고 있는 웨이브렛 변환은 시간-주파수 국부성을 나타내며, 응용환경에 따라 다양한 종류의 웨이브렛을 적용할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 웨이브렛으로 고려될 수 있는 함수를 사용하여, 웨이브렛 평면에서 신호의 특징을 검출하고 국부적으로 필터링하기 위한 연구를 수행하였다.

ABSTRACT

To represent the accurate feature of signal and system, many researches have been done in many fields of basic and engineering science which led a great development of modern society. Even until currently, in order to acquire useful information from signals at high speed, many methods and transforms have been processed. In these methods, the Fourier transform which represents signal as the combination of the frequency component has been applied to the most fields. But as transform not to consider time information, the Fourier transform does not provide time information of the time and presents only overall features of signals. The wavelet transform, which is proposed to overcome this problem and recently expands the range of the application, presents time-frequency localization and many kinds of the wavelet can be applied according to the environment of application. In this paper, we detect the features of signals using the function which is considered as the wavelet and do research for filtering locally in the wavelet plane.

키워드

wavelet, filtering, time-frequency localization

1. 서 론

우리 생활의 주변에서는 끊임없이 어떠한 물리량에 대응하여 새로운 정보들이 발생하고 있으며, 이러한 정보를 획득, 전송, 저장 그리고 변환하기 위한 다양한 형태의 시스템들이 개발되어 사용되고 있다. 이와 같이 멀티미디어를 비롯한 디지털 정보화 사회로의 눈부신 발전을 가능하게 했던 많은 기초과학과 공학 분야에서, 신호와 시스템의 특징을 정확하게 추출하여 표현하기 위한 다양한 연구가 진행되어 왔으며,

현재에는 고속으로 좀 더 많은 종류의 유용한 정보를 이끌어 내기 위한 연구가 활발히 진행 중이다.

지금까지 제안되었던 많은 방법들 중에서, 푸리에 변환은 신호 및 시스템에 대한 분석과 필터링을 위한 중요한 도구로서 가장 광범위하게 사용되고 있다. 그러나 푸리에 변환은 시간 해상도를 고려하지 않은 변환으로써, 신호내의 특정 주파수 성분에 대한 시간 정보를 제공하지 않음에 따라 주파수 영역의 각 성분들은 신호의 전체적인 동작에만 의존한다.

따라서 이러한 푸리에 변환의 한계성을 극복하기

위해, STFT(short time fourier transform)와 Wigner-Ville 변환 등이 제안되었으며, 이때 Gabor에 의해 제시된 STFT는 시간 전이와 주파수 스케일링을 갖는 기저함수를 사용하였다[1],[2]. 즉, 일정한 간격으로 시간축을 따라 이동하는 윈도우를 사용하고, 각 위치에서 푸리에 변환을 적용하여 시간과 주파수 특성을 동시에 표현하였다. 그러나 STFT가 모든 주파수 영역에 대해서 고정된 길이의 윈도우를 사용함에 따라, 시간-주파수 국부성이 상충관계를 가지게 되며, 해상도는 창함수의 크기에 의존한다. 또한 Wigner-Ville 변환은 변환의 비선형성으로 인해 신호에 대한 정확한 분석이 용이하지 않다.

따라서 기존의 변환 방법에 대한 단점을 해결하기 위해 웨이브렛 변환이 제시되었으며, 최근 그 응용범위가 급속도로 확장되고 있다. 이러한 웨이브렛 변환은 광대역(wideband), 비정재적(non-stationary), 멀티스케일(multi-scale) 신호를 분석하기 위해 사용될 수 있으며, 신호의 시간 정보와 스케일 정보 사이의 상관관계를 표현하는 시간-스케일 공간을 제시한다 [3],[4].

본 논문에서는 웨이브렛으로 고려될 수 있는 푸리에 변환의 기저함수를 사용하여, 신호의 특징을 검출하였으며, 변환의 국부성을 이용하여 신호를 필터링하기 위한 방법을 제시하였다.

II. 웨이브렛 변환

어떤 함수 $\psi(t)$ 의 푸리에 변환을 다음의 식 (1)과 같이 정의하며, 이때 $\Psi(\omega)$ 가 식 (2)의 허용조건을 만족하면, 함수 $\psi(t)$ 를 mother 웨이브렛으로 정의한다.

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2)$$

그리고 $\psi(t)$ 의 이동과 확장에 의해 식 (3)의 baby 웨이브렛을 얻을 수 있으며, 식으로부터 a 는 scale 변수이고 b 는 translation 변수이다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3)$$

이때, 신호 $f(t) \in L^2(R)$ 이면, 연속 웨이브렛 변환(CWT)은 식 (4)와 같이 정의되며, *는 켈레 복소를 의미한다.

$$Wf(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (4)$$

식으로부터, scale 변수 a 가 변화함에 따라 연산을 위한 웨이브렛 윈도우의 넓이가 확대 또는 축소되어, 주파수 영역에 따른 다중 해상도 분석을 가능하게 한다.

그리고 다음의 식 (5)는 mother 웨이브렛이 실험수인 대표적인 2차 미분 가우스 웨이브렛을 나타내고 있으며, 그 형상으로 인해 Mexican Hat 함수로 알려져 있다.

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (5)$$

III. 주파수-시간 평면 분석

푸리에 변환은 시간 해상도를 고려하지 않은 변환이지만, 다음의 식들과 같은 한 주기 함수를 정의하는 것에 의해 신호에 대한 시간 국부성을 획득할 수 있다.

$$\psi^c(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \in [0, 2\pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

$$\psi^s(t) = \begin{cases} \sin(t), & t \in [0, 2\pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

또한, 위의 두 식은 각주파수 ω 에서 시간 스케일과 이동에 의해, 각각 $\psi_{\omega,b_n}^c(t)$ 와 $\psi_{\omega,b_n}^s(t)$ 로 표현될 수 있다.

$$\begin{cases} \psi_{\omega,b_n}^c(t) = \psi^c(\omega[t-b_n]) \\ \psi_{\omega,b_n}^s(t) = \psi^s(\omega[t-b_n]) \end{cases} \quad (8)$$

임의의 신호 $f(t)$ 에 대한 푸리에 변환은 식 (9)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \} dt \end{aligned} \quad (9)$$

그리고 연속되는 정현파는 각각 $2\pi/\omega$ 의 간격으로 시간축 상에서 I_0, I_1, I_2, \dots 와 같이 분할할 수 있으며, 이때 I_n 은 다음과 같다.

$$I_n = \left[\frac{2\pi n}{\omega}, \frac{2\pi(n+1)}{\omega} \right) \quad (10)$$

따라서 식 (9)로서 표현된 푸리에 변환은 다음의 식 (11)과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{I_n} f(t) \cos(\omega t) dt \\
 &\quad - j \sum_{n=0}^{\infty} \int_{I_n} f(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^c \left(\omega \left[t - \frac{2\pi n}{\omega} \right] \right) dt \\
 &\quad - j \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^s \left(\omega \left[t - \frac{2\pi n}{\omega} \right] \right) dt
 \end{aligned} \tag{11}$$

위의 식으로부터, 실수부와 허수부의 적분 항을 다음의 두 식과 같이 나타낸다.

$$W_c(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\omega, b_n}^c(t) dt \tag{12}$$

$$W_s(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\omega, b_n}^s(t) dt \tag{13}$$

식으로부터 $b_n = (2\pi/\omega) n$ 이며, 각주파수 ω 에 의존하고 시간축을 따라 이동한다. 그리고 주파수-시간 평면에서 전이될 수 있는 지점들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 S &= \left\{ (\omega, b_n); \omega \in (0, \infty), \right. \\
 &\quad \left. b_n = \frac{2\pi n}{\omega}, n = 0, 1, \dots, N(\omega) \right\} \tag{14}
 \end{aligned}$$

여기서 $N(\omega)$ 는 구간 $[0, 2\pi k]$ 에서 분석되는 신호에 대해서 식 (15)와 같다.

$$N(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega < \frac{1}{k} \\ \lfloor k\omega \rfloor - 1, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{15}$$

따라서 위의 과정으로부터 웨이브렛 쌍에 의한 modulus와 angle은 다음 식들로부터 구해진다.

$$Mf(\omega, b_n) = \sqrt{W_c(\omega, b_n)^2 + W_s(\omega, b_n)^2} \tag{16}$$

$$Af(\omega, b_n) = \arctan \left(\frac{W_s(\omega, b_n)}{W_c(\omega, b_n)} \right) \tag{17}$$

만약, 분석 시간 t 가 $[0, 2)$ 으로 주어지는 구간에서 신호가 정의될 경우, 신호 $f(t) = \cos(6\pi t)$ 에 대한 웨이브렛 변환 $W_c(\omega, b_n)$ 은 그림 1과 같이 표현된다.

이와 같은 cosine과 sine 웨이브렛은 주파수에 의존하는 유한개의 이산 전이 레격만을 사용하지만, 주

파수 영역의 모든 지점에 대해서 변환이 수행되므로 다중해상도 해석이 가능하다. 따라서 푸리에 변환과의 연관성을 얻기 위해, 등간격의 모든 주파수를 선택할 수 있다.

그리고 웨이브렛쌍에 의해 얻어지는 주파수-시간 평면으로부터 특정 주파수 성분을 제거하기 위해 식 (18)과 같은 주파수-시간 필터를 적용할 수 있다.

$$g(t, f) = \begin{cases} A, & \text{if } t_1 \leq t \leq t_2, f_1 \leq f \leq f_2 \\ \bar{A}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18}$$

식으로부터 A 는 어떠한 함수 또는 값이 될 수 있으며, \bar{A} 는 선택되지 않은 영역의 값으로서 0 또는 1이 될 수 있다.

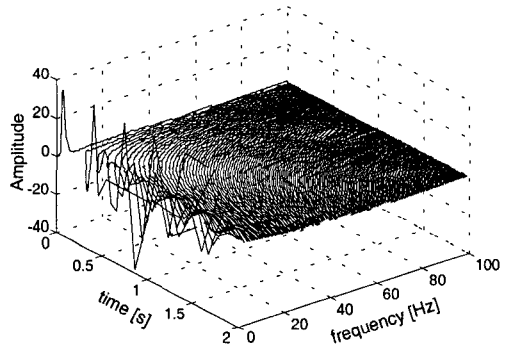


Fig. 1. $W_c(\omega, b_n)$ for $f(t)$.

IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 신호의 특징을 분석하고 국부적으로 필터링하기 위해, 푸리에 변환의 기저함수를 분석 웨이브렛으로 사용하였다. 그리고 주파수-시간 평면 상에서, 이러한 웨이브렛의 특성을 살펴보기 위해, 테스트 신호로서 국부적으로 잡음이 중첩된 doppler 신호를 사용하였으며, 이때 sampling frequency는 200[Hz]를 적용하였다.

그림 2는 테스트 신호에 대한 시뮬레이션 결과이다. 그림으로부터 (a)는 시간 영역에서의 테스트 신호를 나타내고 있으며, (b)와 (c)는 이산 전이 레격에서의 cosine과 sine 웨이브렛 변환 결과이다. 그리고 (d)는 웨이브렛 modulus와 $g(t, f)$ 의 영역을 보이고 있으며, 이때 필터 영역 내의 값을 0으로 하여, 국부적인 대역저지 필터가 되도록 하였다.

그림 (e)는 테스트 신호와 필터링된 신호에 대한 푸리에 계수의 실수부를 나타내고 있으며, 실선은 필터링된 신호의 계수이고, 점선은 테스트 신호의 계수이다. 그리고 그림 (f)는 필터링 과정에 의해 복원된 신호를 나타내고 있다.

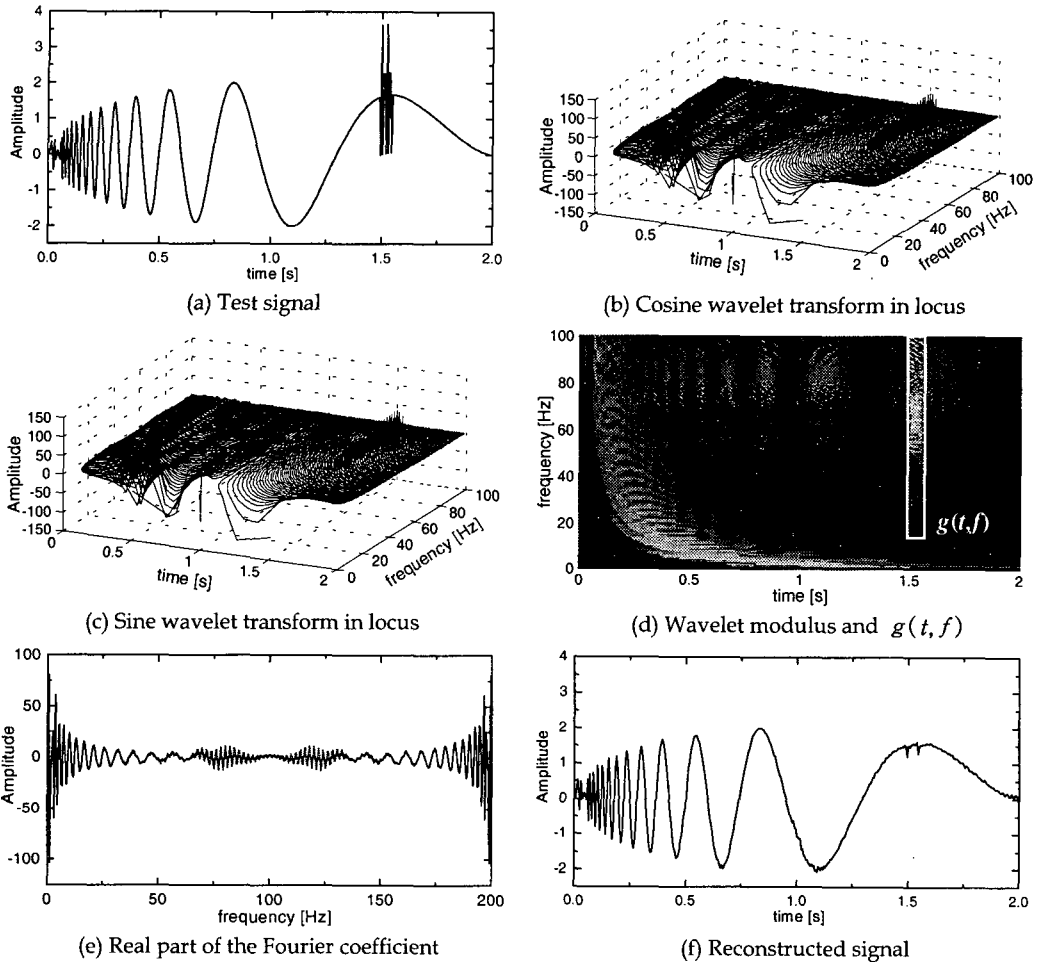


Fig. 2. Wavelet transform for test signal.

V. 결론

본 논문에서는 신호의 특징을 분석하고, 국부적으로 필터링하기 위해, 푸리에 변환의 기저함수를 웨이브렛으로 사용하였다.

이때, 연산을 위해 사용되는 윈도우는 STFT에서 사용되는 고정된 길이의 윈도우와 달리, 주파수에 따라 그 크기가 변화함에 따라 특정 시간 영역에서 신호의 모든 주파수 성분을 정확하게 나타낼 수 있다. 그리고 각주파수에 의존하여 유한개의 전이 계적 상에서만 신호를 분석함에 따라, 웨이브렛 변환 후 최소의 정보만으로 신호를 표현한다.

잡음이 중첩된 테스트 신호에 대한 시뮬레이션 결과로부터, 최소 정보로서 신호의 특징을 정확하게 표현할 수 있었으며, 주파수-시간 필터를 적용하는 것에 의해 국부적으로 특정 주파수 성분을 제거할 수 있었다.

참고 문헌

- [1] J. G. Daugman, "Complete discrete 2-D Gabor transforms by neural networks for image analysis and compression", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., vol. 36, no. 7, pp. 1169-1179, July 1988.
- [2] O. Ersoy, Fourier-Related Transform, Fast Algorithms and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [3] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989.
- [4] I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets", in Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, 1992.