

Semi Lagrangian 방법과 Objective Time Integration 을 이용한 점탄성 유동 해석

강성용^{1#} · 김승모² · 이우일³

Semi-Lagrangian flow analysis of Viscoelastic fluid using Objective Time Integration

S. Y. Kang, S.M.Kim, W. I. Lee

Abstract

A semi-Lagrangian finite element scheme with objective time stepping algorithm for solving viscoelastic flow problem is presented. The convection terms in the momentum and constitutive equations are treated using a quasi-monotone semi-Lagrangian scheme, in which characteristic feet on a regular grid are traced backwards over a single time-step. Concerned with the generalized midpoint rule type of algorithms formulated to exactly preserve objectivity, we use the geometric transformation such as pull-back, push-forward operation.

The method is applied to the 4:1 planar contraction problem for an Oldroyd B fluid for both creeping and inertial flow conditions.

Key Words : Semi Lagrangian, Objective time stepping algorithm, Viscoelastic fluid, Pull-back, Push-forward, Weissenberg number

1. 서론

최근 점탄성 유동에 관한 효과적이고 안정적인 수치해석 기법들이 많이 개발되었다.

그러나 여전히 복잡한 형상에서의 점탄성 유동문제를 해결하는 데에는 많은 노력이 요구되는 것 또한 사실이다. 안정적으로 수렴해를 얻을 수 있는 Weissenberg 수는 아직도 한계가 있으며 High Weissenberg number problem(HWNP)에 관한 연구는 앞으로도 개척해야 할 일이 많은 분야이다.

본 논문은 유동 해석에서 매우 안정적이고 효과적인 semi-Lagrangian 방법과 주로 소성변형 분야, 특히 대변형 해석에 응용되는 objective time stepping algorithm을 이용하여 구성방정식에서 나타나는 objective stress rate과 objective rate of deformation tensor를 효과적으로 처리할 수 있는 새로운 수치 기법을 제안하였다.

점탄성 유동 해석에서 표준 문제로 알려진 4:1 수축 형상에 대한 Oldroyd 유체의 2차원 유동을 관성이 있는 경우와 없는 경우 모두 해석해 보았고 기존의 연구 결과와 비교하였다.

2. 수치 방법

2.1 Semi Lagrangian 방법

전산기하학에서 많이 사용되는 개념 중 하나인 point search algorithm 중 A. Allievia[1]가 제안한 particle search-locate algorithm에 기반한 semi-Lagrangian 방법[2]을 이용하여 유동의 지배방정식에 나타나는 대류항을 처리하였다.

즉, t_{n+1} 시간에 x 에 위치하는 입자가 t 시간에 X 라는 위치에 있다면 $X(x, t_{n+1}; t)$ 와 같이 쓸 수 있다. 그리고, 속도 u 와 X 간에는 다음의 관계가 존재한다.

$$\frac{dX(x, t_{n+1}; t)}{dt} = u(X(x, t_{n+1}; t), t) \quad (1)$$

$$X(x, t_{n+1}; t_{n+1}) = x$$

식 (1)을 적분하면 아래와 같다.

$$X_i(x_i, t_{n+1}; t_n) = x_i - \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_i(X_i(x_i, t_{n+1}; t), t) dt$$

그리고 다음과 같이 α_i 을 정의한다.

$$\alpha_i \equiv \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_i(X_i(x_i, t_{n+1}; t), t) dt \quad (2)$$

위의 적분식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X_i(x_i, t_{n+1}; t_{n+1/2}) = x_i - \frac{\alpha_i}{2} \quad (3)$$

이를 정리하면 아래와 같다.

$$\alpha_i = x_i - X_i(x_i, t_{n+1}; t_n) \quad (4)$$

$$\alpha_i = \Delta t \cdot u_i(X_i(x_i, t_{n+1}; t_{n+1/2}), t_{n+1/2}) \quad (5)$$

$$X_i(x_i, t_{n+1}; t_{n+1/2}) = x_i - \frac{\alpha_i}{2} \quad (6)$$

$$u_i(X_i(x_i, t_{n+1}; t_{n+1/2}), t_{n+1/2}) = u_i\left(x_i - \frac{1}{2}\alpha_i, t_{n+1/2}\right)$$

t_n 과 t_{n+1} 간의 중간속도는 위와 같이 표현될 수 있다. 따라서, 식 (5)는 아래와 같이 된다.

$$\alpha_i = \Delta t \cdot u_i\left(x_i - \frac{1}{2}\alpha_i, t_{n+1/2}\right) \quad (7)$$

Adams-Bashforth 방법을 이용하면

$$u_i(x_i, t_{n+1/2}) = \frac{3}{2}u_i(x_i, t_n) - \frac{1}{2}u_i(x_i, t_{n-1})$$

$t_{n+1/2}$ 에서의 속도를 표현하면 위와 같다.

다음과 같이 반복대입법을 통해서 수립된 α_i 을 찾을 수 있다.

$$\alpha_i^0 = \Delta t \cdot \left(\frac{3}{2}u_i(x_i, t_n) - \frac{1}{2}u_i(x_i, t_{n-1}) \right)$$

$$\alpha_i^{(k+1)} = \Delta t \cdot \left(\frac{3}{2}u_i\left(x_i - \frac{1}{2}\alpha_i^{(k)}, t_n\right) - \frac{1}{2}u_i\left(x_i - \frac{1}{2}\alpha_i^{(k)}, t_{n-1}\right) \right)$$

$$e_i^{(k)} = \alpha_i - \alpha_i^{(k)}$$

즉, 위와 같은 과정을 통해 식 (1)과 같이 주어지는 대류항을 처리할 수 있고, 일반적으로 많이 쓰이는 다른 upwinding 방법에 비해 매우 안정적인 해를 얻을 수 있다[2].

2.2 Objective Time Stepping 방법

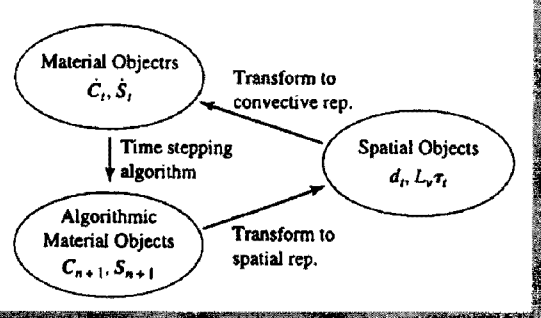


Fig. 1 General algorithmic scheme for developing incrementally objective algorithm

일반적으로 공간상에 정의된 어떤 대상에 대한 적분을 수행할 때 관측자의 좌표계에 상관없이 객관성(Objectivity)을 유지하기 위해 위의 Fig. 1 과 같이 pull-back, push-forward 과정을 통해 적분을 한다[3].

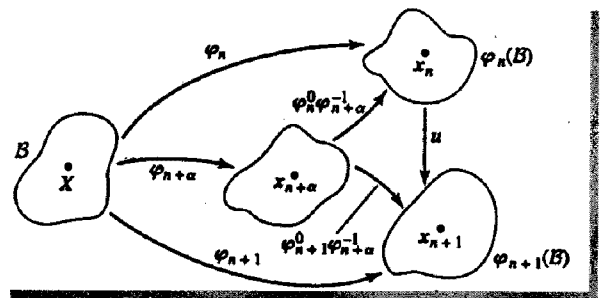


Fig. 2 Geometric setup for integrating spatial rate-like quantities

Fig. 2 와 같이 일반적으로 변형을 다음과 같이 기술한다.

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(X) &= \phi_n(X) + U(X) \\ &= \phi_n(X) + u[\phi_n(X)]\end{aligned}$$

여기서, X 는 기준 구성(reference configuration)이고, u 는 현재 구성(current configuration)에서 측정된 변형량, U 는 기준 구성(reference configuration)에서 측정된 변형량을 나타낸다.

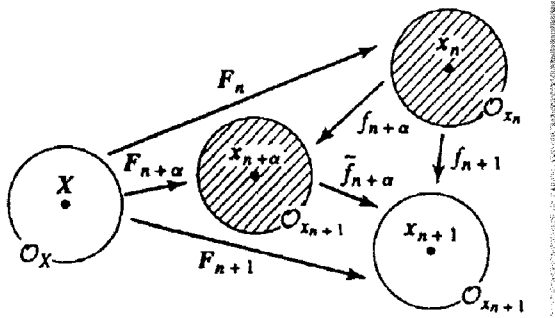


Fig. 3 Deformation gradients and relative deformation gradients

Fig. 3 과 같이 변형량을 나타내는 척도로서 변형 도함수와 상대 변형 도함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$F_{n+1} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial X} \quad (8)$$

$$f_{n+1} \equiv F_{n+1} F_n^{-1} = \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} \quad (9)$$

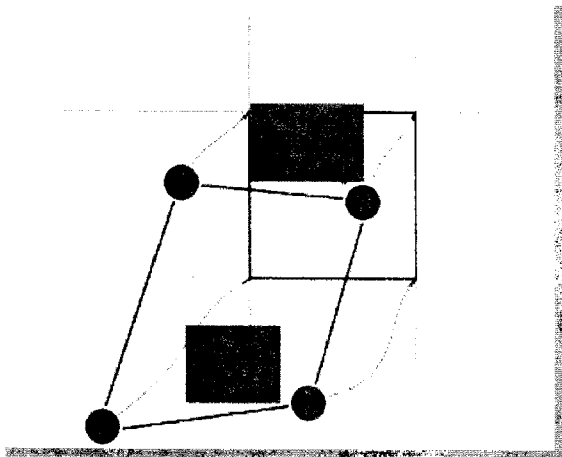


Fig. 4 Mapping between X_n configuration and X_{n+1} configuration

앞서 설명한 semi-Lagrangian 방법을 통하여 격자계의 좌표 X_{n+1} 을 현재 구성으로 정하면 X_n 을 쉽게 구할 수 있다.

Fig. 4 에서의 원형 꼭지점은 semi Lagrangian 방법으로 구한 특성 위치를 의미한다.

$$f_{n+1}^{-1} = \frac{\partial X_n}{\partial X_{n+1}}, f_{n+1}^{-1}(t_{n+1}) = \mathbf{I} \quad (10)$$

즉, semi-Lagrangian 방법을 이용하면 식 (10) 의 상대 변형 텐서를 손쉽게 구할 수 있다.

식 (10)의 값이 알려지면 objective rate of deformation tensor 와 objective stress rate 을 다음의 식을 통해 정할 수 있다[3].

즉, fully implicit 한 시간 적분 방법을 사용하면, objective rate of deformation tensor 는

$$\begin{aligned}d_{n+1} &= \frac{1}{2\Delta t} f_{n+1}^{-T} (f_{n+1}^T f_{n+1} - \mathbf{1}) f_{n+1}^{-1} \quad (11) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} (1 - f_{n+1}^{-T} f_{n+1}^{-1})\end{aligned}$$

위와 같이 주어지게 된다.

또한 objective stress rate 중 Kirchhoff stress $L_v \tau$ 는 $[t_n, t_{n+1}]$ 구간에서 fully implicit 한 시간 적분을 수행할 경우 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}L_v \tau_{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} f_{n+1} (f_{n+1}^{-1} \tau_{n+1} f_{n+1}^{-T} - \tau_n) f_{n+1}^T \quad (12) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (\tau_{n+1} - f_{n+1} \tau_n f_{n+1}^T)\end{aligned}$$

여기서 τ_n 은 X_n 에서 정의된 값이므로 semi-Lagrangian 방법으로 구한 특성 위치에서 구한 값을 사용한다.

위에서 정리한 식(11)-(12)의 objective stress rate 와 objective rate of deformation tensor 를 Oldroyd B 유체의 구성방정식 적분에 적용하면 다음과 같은 간결한 식을 얻을 수 있다.

$$We \nabla \tau + \tau = 2(1 - \beta)d \quad (13)$$

즉, 식 (13)을 fully implicit 한 시간 적분을 적용하면 다음과 같이 차분화되고,

$$We \frac{1}{\Delta t} (\tau_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1} \tau_n \mathbf{f}_{n+1}^T) + \tau_{n+1} = \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} (1 - \beta) (1 - \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{f}_{n+1}^{-1})$$

정리하면, 아래 식 (15)와 같다.

$$(We + \Delta t) \tau_{n+1} = We \mathbf{f}_{n+1} \tau_n \mathbf{f}_{n+1}^T + \quad (15)$$

$$(1 - \beta) (1 - \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{f}_{n+1}^{-1})$$

위와 같은 접근법은 단지 Oldroyd B 유체에만 적용할 수 있는 것이 아니고 objective stress rate 과 objective rate of deformation tensor 가 존재하는 어떤 구성방정식에도 적용이 가능하다.

위와 같은 구성방정식을 갖는 점탄성 유체의 해석은 P. Singh et al[4] 등이 사용한 Marchuk-Yanenko operator splitting 방법을 이용하면 대류항의 처리 및 비압축성의 처리 등 비선형과 관련된 수치적 어려움을 피할 수 있다.

Semi-Lagrangian 방법을 이용하여 다음과 같이 특성 위치를 구한 뒤 그 점에서의 속도(u^*) 및 응력(τ^*) 값을 구해 대류항을 먼저 처리하고,

$$\frac{Du}{Dt} = 0 \Rightarrow u^* \quad \frac{D\tau}{Dt} = 0 \Rightarrow \tau^* \quad (16)$$

유체의 비압축성 처리는 다음과 같은 constraint 가 존재하는 문제를 풀 수 있는 saddle point solver 를 이용하여 푼다.

$$\int_{\Omega_{n+1}} \rho \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} \cdot v dx - \int_{\Omega_{n+1}} p^{n+1} \nabla \cdot v dx +$$

$$\int_{\Omega_{n+1}} 2\beta D[u^{n+1}] : D[v] dx = \int_{\Omega_n} v \cdot \nabla \cdot \tau^* dx$$

$$\int_{\Omega_{n+1}} q \nabla \cdot u^{n+1} dx = 0 \quad (17)$$

그리고 식 (15)는 일반적인 표준 Galerkin 방법으로 해결할 수 있다.

3. 응용

3.1 Oldroyd B 유체의 4:1 수축 형상 문제

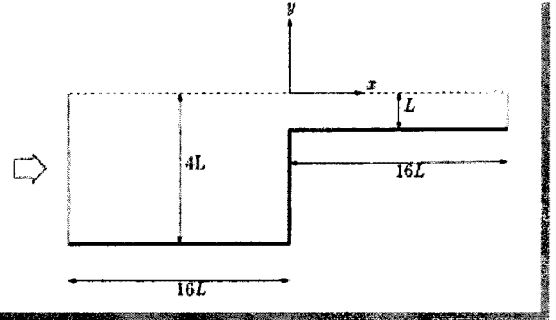


Fig. 5 Contraction flow geometry

Oldroyd B 모델은 여러 단점이 있지만 본 논문에서 새롭게 제안된 방법의 특징을 보여주는 데는 적합하다 하겠다.

Fig. 5 에서 보인 바와 같이 inlet 에서는 parabolic 속도 분포를 주고, $y=0$ 에서는 대칭 조건을 부여하였다[5]. 즉,

$$u = \frac{3}{128} (16 - y^2) \quad , \quad v = 0$$

운동방정식과 연속방정식은 다음과 같다.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau \quad (18)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (19)$$

Oldroyd B model 은 다음과 같이 정의된다.

$$\tau + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tau} = 2\eta \left(\mathbf{d} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{d}} \right) \quad (20)$$

여기서 λ_1 와 λ_2 는 특성 완화 시간과 지연 시간이다.

또한 upper convected stress derivative 는 다음과 같이 정의되고 앞서 살펴본 $L_v \tau$ 와 같다.

$$\overset{\nabla}{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + u \cdot \nabla \tau - \nabla u \cdot \tau - \tau \cdot (\nabla u)^T \quad (21)$$

계산의 용이함을 위해 다음과 같이 무차원화 변수를 정한다.

$$u^* = \frac{u}{U}, \quad p^* = \frac{Lp}{\eta U}, \quad \tau^* = \frac{L\tau}{\eta U}$$

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad t^* = \frac{Ut}{L}$$

위의 식 (18)-(20)은 다음과 같이 정리된다.

$$\text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau_1 + \beta \nabla^2 u$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$\tau_1 + \text{We} \tau_1^{\nabla} = 2(1 - \beta) \mathbf{d}$$

$$\text{여기서, } \beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \text{Re} = \frac{\rho UL}{\eta}, \quad \text{We} = \frac{\lambda_1 U}{L}$$

이다. 그리고 $\beta = 1/9$ 을 사용하였다.

3.2 수치 결과

3.1.1 $\text{Re} \approx 0$ (Creeping)인 경우

일반적으로 corner 안쪽의 salient vortex 는 We 수가 커짐에 따라 크기가 작아졌다가 다시 커지는 경향이 있고, $We > 2.0$ 인 경우 lip vortex 를 관찰할 수 있다고 알려져 있다[5]. 본 논문에서 제안한 방법을 통해 다음과 같은 결과를 얻었다.

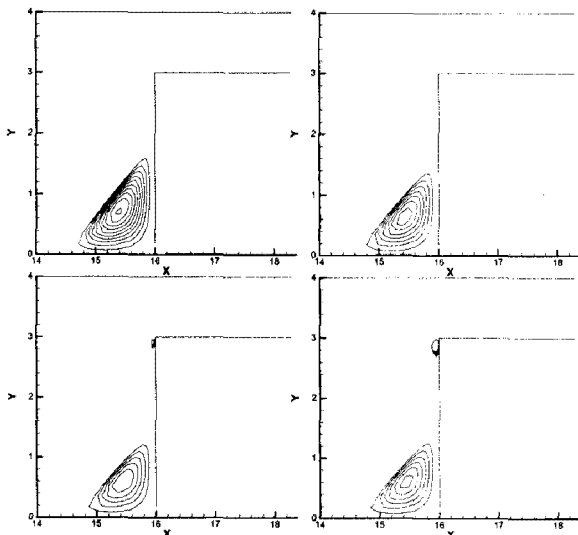


Fig. 6 Streamline for $We=2.5$ when $\text{Re}=0$

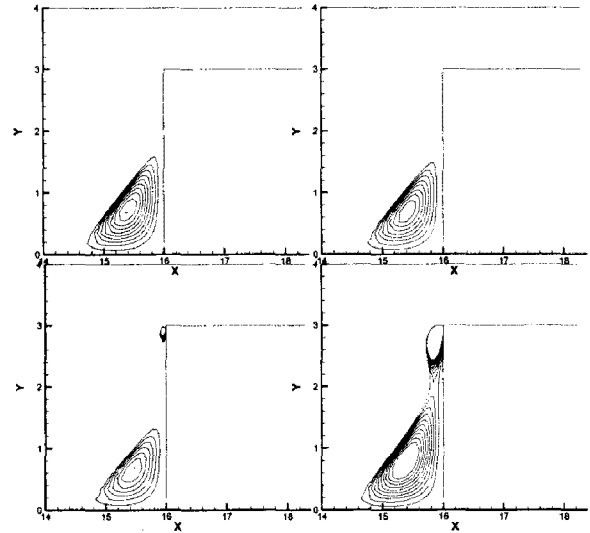


Fig. 7 Streamline for $We=5.0$ when $\text{Re}=0$

3.1.2 관성이 있는 경우

관성이 있는 경우는 We 수가 증가함에 따라 크기가 작아지는 경향이 있고 그 크기는 $\text{Re} \approx 0$ (Creeping)인 경우의 20% 정도 작다고 알려져 있다[5].

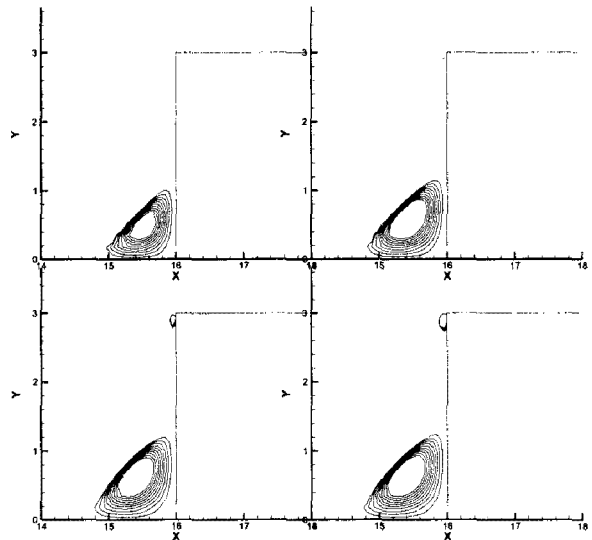


Fig. 8 Streamline for $We=2.5$ when $\text{Re}=1$

Fig. 8 의 처음 그림은 Fig. 6 의 처음 그림에 대응되는 시간의 결과로서 시간이 점차 지남에 따라 vortex 가 커짐을 확인할 수 있다.

Fig. 10 과 Fig. 11 은 $\text{Re} \approx 0$ (creeping)인 경우의 응력 분포선을 나타내었다. 두 경우 모두 특이점에서 매우 큰 응력 값을 나타낸다.

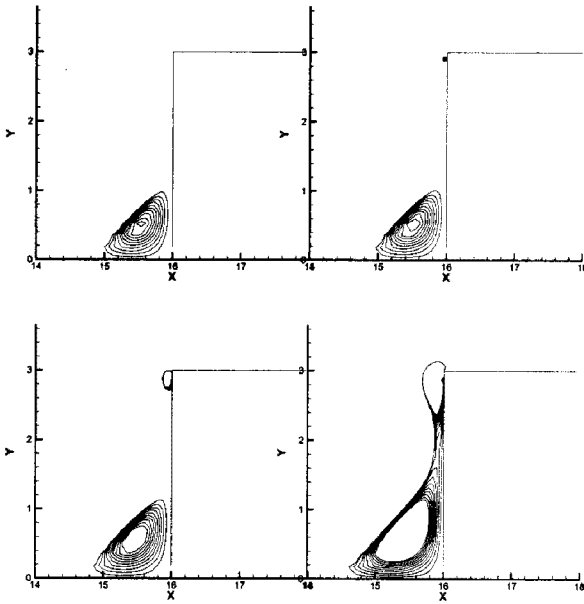


Fig. 9 Streamline for We=5.0 when Re=1

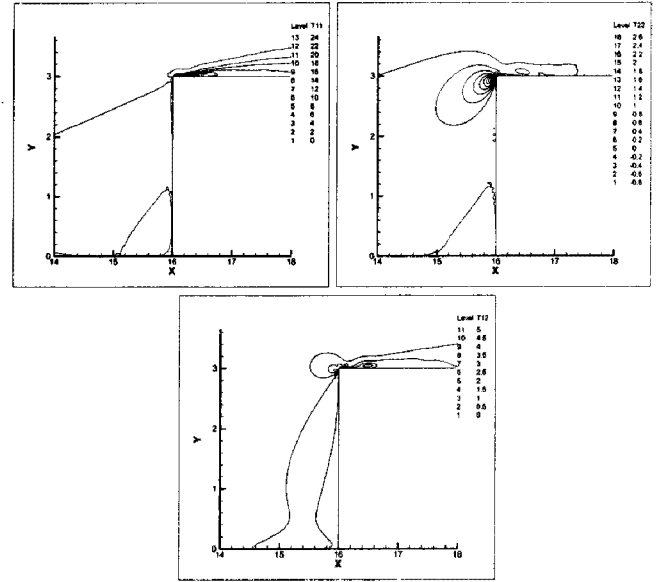


Fig. 11 Stress contour for We=5.0 when Re=0

$$\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$$

stress rate 과 rate of deformation tensor 를 적 분할 수 있는 objective time stepping 방법을 이 용하여 매우 효과적으로 점탄성 유동을 해석할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다.

참 고 문 헌

- [1] J. A. Allievi and R. Bermejo, 'A generalized particle search-locate algorithm for arbitrary grids', J. Comput. Phys., 132, 1997, 157
- [2] A. Allievi, Rodolfo Bermejo, 'Finite element modified method of characteristics for the Navier-Stokes equations', International Journal for Numerical Methods in Fluids, 32, 2000, 439-463
- [3] J.C. Simo, T.J.R. Hughes, 'Computational Inelasticity', Springer, 1997, chap 7-8
- [4] P. Singh, D.D. Joseph, 'Sedimentation of a sphere near a vertical wall in an Oldroyd B fluid', J. Non-Newtonian fluid mech. 94, 2000, 179-203
- [5] T.N. Philips, A.J. Williams, 'Viscoelastic flow through a planar contraction using a semi-Lagrangian finite volume method', J. Non-Newtonian Fluid mech. 87, 1999, 215-246

Fig. 10 Stress contour for We=2.5 when Re=0

$$\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$$

4. 결 론

유동에서 대류항이 우세할 경우 매우 안정적인 해를 얻을 수 있는 semi-Lagrangian 방법과 대 변형 문제에서 객관성(objectivity)를 유지하며