

원통면에 배열된 1-3 압전 복합체의 진동 특성

Vibration Characteristics of a 1-3 Piezoelectric Composite Arrayed on a Cylindrical Surface

김 대 승* · 김 진 오†

Dae Seung Kim and Jin Oh Kim

Key Words : Piezoelectric Composite(압전 복합체), Resonance Frequency(공진 주파수), Characteristic Equation(특성 방정식)

ABSTRACT

This paper presents a theoretical approach to describe the vibration characteristics in the 1-3 piezoelectric composite arrayed on a cylindrical surface. By homogenizing the composite composed of a piezoelectric ceramic and a polymer the physically useful parameters were defined and then used to derive the governing equation of radial motion for the cylindrical 1-3 piezoelectric composite. Applying mechanical and electric boundary conditions has yielded a characteristic equation for radial vibration of the composite. Theoretical calculations of the resonance frequency have been compared with those obtained by the finite-element analysis and have shown a good agreement.

1. 서 론

초음파 전파를 계측에 이용하는 초음파 센서 기술은 산업용 계측기, 수중 탐지, 의료 영상 등 다양한 분야에 활용되고 있다. 이러한 용도로 역학적 에너지를 전기 에너지로 변환하거나 반대로 전기 에너지를 역학적 에너지로 변환하기 위해 압전 세라믹을 사용한 압전 변환기가 주로 사용된다.⁽¹⁾ 압전 특성이 우수한 압전 세라믹 재료와 음향 임피던스가 낮은 고분자 재료를 결합시킨 압전 복합체는 이들 재료의 체적 비율에 따라 고유 임피던스 값이 변화하므로 측정 매질의 고유 임피던스 값과 비슷한 고유 임피던스 값을 갖도록 할 수 있는 장점이 있다.⁽²⁾

압전 복합체는 압전 재료와 고분자 재료의 결합 방식에 따라 0-3, 1-3, 2-2, 3-3 등의 구조로 나뉜다.⁽³⁾ 이 중에서 1-3 압전 복합체는 높은 두께 방향 전기기계 결합 계수와 낮은 비유전율 및 고유음향 임피던스를 가지고 있으며, 유전 및 기계적 손실이 적고 광대역 주파수 특성을 갖고 있다.⁽²⁾ 또한 1-3 압전 복합체는 유연한 고분자 재료로 인해

변형을 가하기가 쉬어 곡면 형상으로 된 구조물에 부착하기가 용이하다. 그래서 기존의 센서를 적용하기엔 공간이 부족한 소형 무인 잠수정의 외부 곡면 상에 부착되어 수중 음향 통신 센서로서 활용된 바 있다.⁽⁴⁾

지금까지 보고된 연구들은 대개 평판형 1-3 복합체를 대상으로 압전 세라믹과 고분자 재료의 구성 비율에 따른 진동 특성을 파악하는 데 거의 초점이 맞춰져 있다. 본 논문은 Fig. 1에 보인 바와 같이 원통면에 배열된 1-3 압전 복합체를 대상으로 진동 특성을 설명할 수 있는 해석 모델을 세우는 것을 목적으로 한다. 원통면에 배열된 1-3 압전 복합체에 대해서 압전 세라믹의 비율에 따른 공진 주파수를 이론적으로 해석하고, 이를 유한 요소 해석과 비교하여 검증한다.

2. 원통형 1-3 압전 복합체의 파라미터

이방성을 고려한 압전 변환기의 구성 방정식은 다음과 같다.⁽¹⁾

$$\{T\} = [c^E]\{S\} - [e]^T\{E\} \quad \{D\} = [e]\{S\} - [\epsilon^S]\{E\} \quad (1a, b)$$

여기서 $\{T\}$, $\{S\}$, $\{D\}$, $\{E\}$ 는 각각 응력, 변형률, 전기적 변위, 전기장의 행렬들이다. 그리고 $[c^E]$, $[e]$, $[\epsilon^S]$ 는 각각 일정한 전기장에서의 강성, 압전 응력 상수, 변형률이 일정한 상태에서의 유전율로 구성된 계수 행렬들이다.

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

† 책임저자, 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr
Tel : (02) 812-0662, Fax : (02) 820-0668

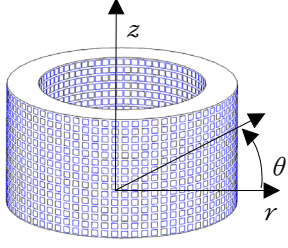


Fig. 1 Structure of a piezoelectric composite arrayed on a cylindrical surface

압전 복합체는 축대칭 원통형이고 두께는 종 방향의 길이에 비해 상당히 작다는 가정 하에 식 (1)로부터 수학적 모델을 세운다. 압전 세라믹의 반경 방향 응력 σ_r^c 과 원주 방향 응력 σ_θ^c 및 반경 방향 전기적 변위 D_r^c 을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_r^c = c_{33}^E \frac{\partial u^c}{\partial r} + c_{13}^E \frac{u^c}{r} + 2c_{13}^E \frac{1}{r} \frac{\partial v^c}{\partial \theta} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2a)$$

$$\sigma_\theta^c = c_{13}^E \frac{\partial u^c}{\partial r} + c_{11}^E \frac{u^c}{r} + (c_{11}^E + c_{12}^E) \frac{1}{r} \frac{\partial v^c}{\partial \theta} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2b)$$

$$D_r^c = e_{33} \frac{\partial u^c}{\partial r} + e_{31} \frac{u^c}{r} + 2e_{31} \frac{1}{r} \frac{\partial v^c}{\partial \theta} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2c)$$

여기서 u^c 와 v^c 는 각각 r 과 θ 방향으로의 변위이다.

고분자 재료는 등방성 매질이고 압전성이 없으므로 이에 대한 응력과 전기적 변위는 다음과 같다.

$$\sigma_r^p = c_{33}^p \frac{\partial u^p}{\partial r} + c_{13}^p \frac{u^p}{r} + 2c_{13}^p \frac{1}{r} \frac{\partial v^p}{\partial \theta} \quad (3a)$$

$$\sigma_\theta^p = c_{13}^p \frac{\partial u^p}{\partial r} + c_{11}^p \frac{u^p}{r} + (c_{11}^p + c_{12}^p) \frac{1}{r} \frac{\partial v^p}{\partial \theta} \quad (3b)$$

$$D_r^p = -\epsilon_{33}^p \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3c)$$

1-3 압전 복합체는 압전 세라믹과 고분자 재료로 구성된 복합 재료이지만 단일 재료로 구성되었다고 가정한다. 그러면 이 복합체에 대한 재료 물성치는 혼합법칙(rules of mixture)을 사용하여 근사적으로 구할 수 있다. 원통 좌표계에서 이 법칙을 정리하면 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\bar{u} = u^c = u^p, \quad \bar{v} = v^c + \tilde{v}^p = 0 \quad (4a,b)$$

$$\bar{\sigma}_r = \nu \sigma_r^c + \tilde{\nu} \sigma_r^p, \quad \bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta^c = \sigma_\theta^p \quad (4c,d)$$

여기서 ν 와 $\tilde{\nu} = 1 - \nu$ 는 1-3 압전 복합체의 체적에 대한 압전 세라믹과 폴리머의 체적 비율이다. 따라서 \bar{u} 과 \bar{v} 는 r 과 θ 방향으로의 평균 변위이고 $\bar{\sigma}_r$ 과 $\bar{\sigma}_\theta$ 는 평균 응력을 나타낸다.

압전 세라믹과 고분자 재료의 전체 전기적 변위에 대한 기여도는 각각의 체적 비율을 따른다고 가정하면 평균 전기적 변위는 다음과 같다.⁽²⁾

$$\bar{D}_r = \nu D_r^c + \tilde{\nu} D_r^p \quad (5)$$

압전 세라믹과 고분자 재료에서 반경 방향으로의 전기 퍼텐셜의 변화율은 같다.

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \frac{\partial \phi^c}{\partial r} = \frac{\partial \phi^p}{\partial r} \quad (6)$$

이들로부터 유도하면 원주 방향 응력 σ_θ 는 다음과 같다.

$$\bar{\sigma}_\theta = \widehat{c}_{13} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \widehat{c}_{11} \frac{\bar{u}}{r} + \widehat{e}_{31} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \quad (7)$$

$$\widehat{c}_{13} = \frac{\nu c_{13}^E (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} c_{13}^E (c_{11}^E + c_{12}^E)}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \quad (8a)$$

$$\widehat{c}_{11} = \frac{\nu c_{11}^E (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} c_{11}^E (c_{11}^E + c_{12}^E)}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \quad (8b)$$

$$\widehat{e}_{31} = \frac{\nu e_{31} (c_{11} + c_{12})}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \quad (8c)$$

또한 반경 방향 응력 $\bar{\sigma}_r$ 는 다음과 같다.

$$\bar{\sigma}_r = \widehat{c}_{33} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \widehat{c}_{13} \frac{\bar{u}}{r} + \widehat{e}_{33} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \quad (9)$$

$$\widehat{c}_{33} = \nu \left[c_{33}^E - \frac{2\tilde{\nu} (c_{13}^E - c_{13})^2}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + \tilde{\nu} c_{33} \quad (10a)$$

$$\widehat{c}_{13} = \nu \left[c_{13}^E - \frac{2\tilde{\nu} (c_{13}^E - c_{13})(c_{11}^E - c_{11})}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + \tilde{\nu} c_{13} \quad (10b)$$

$$\widehat{e}_{33} = \nu \left[e_{33} - \frac{2\tilde{\nu} (c_{13}^E - c_{13})}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (10c)$$

그리고 평균 전기적 변위는 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{D}_r = \widehat{e}_{33} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \widehat{e}_{31} \frac{\bar{u}}{r} - \widehat{\epsilon}_{33} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \quad (11)$$

$$\widehat{e}_{31} = \nu \left[e_{31} - \frac{2\tilde{\nu} (c_{11}^E - c_{11}) e_{31}}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (12a)$$

$$\widehat{\epsilon}_{33} = \nu \left[\epsilon_{33}^S + \frac{2\tilde{\nu} e_{31}^2}{\nu (c_{11} + c_{12}) + \tilde{\nu} (c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + \tilde{\nu} \epsilon_{33} \quad (12b)$$

이와같이 하여, 압전 복합체의 파라미터들을 정의하였다.

3. 원통형 1-3 압전 복합체의 공진특성 해석

3.1 지배 방정식

반경 방향 힘의 평형으로부터 얻은 식과 정전기적 방정식은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{r} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial r} + \frac{\bar{D}_r}{r} = 0 \quad (13a,b)$$

여기서 $\widehat{\rho} = \nu \rho^c + \tilde{\nu} \rho^p$ 로 평균 밀도이다. 식 (7)과 (9)를 (13a)에 대입하고 식 (11)를 식 (13b)에 대입하면 다음과 같은 지배식을 얻을 수 있다.

$$\widehat{c}_{33} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\widehat{c}_{33} + \widehat{c}_{13} - \widehat{c}_{13}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \widehat{c}_{11} \frac{\bar{u}}{r^2} + \widehat{e}_{33} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{\widehat{e}_{33} - \widehat{\epsilon}_{33}}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \widehat{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (14a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \widehat{e}_{33} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - r \widehat{\epsilon}_{33} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \right] + 2 \widehat{e}_{31} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 0 \quad (14b)$$

식 (14a,b)는 연립 미분 방정식으로서, 해를 구할 수 없는 형태이다. 해를 구할 수 있는 형태로 만들기 위하여 두 식에서 오차를 감수하면서 ($\widehat{e_{33}/r}$) $\partial/\partial r$ 항을 무시하면⁽⁶⁾ 다음과 같이 된다.

$$\widehat{c_{33}}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\widehat{c_{33}} + \widehat{c_{43}} - \widehat{c_{13}}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \widehat{c_{11}} \frac{\bar{u}}{r^2} + \widehat{e_{33}}\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{\widehat{e_{33}}}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \widehat{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (15a)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \frac{\widehat{e_{33}}}{\widehat{\epsilon_{33}}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{a_1}{\widehat{\epsilon_{33}}} \frac{1}{r} \quad (15b)$$

식 (15b)를 식 (15a)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{\widehat{c_{43}} - \widehat{c_{13}}}{E_L}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\widehat{c_{11}}}{E_L} \frac{\bar{u}}{r^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (16)$$

여기서 $c_L (= [E_L/\widehat{\rho}]^{1/2})$ 은 압전 복합체에서 종파의 전파속도이고, $E_L (= \widehat{c_{33}} + \widehat{e_{33}}/\widehat{\epsilon_{33}})$ 은 탄성 상수이다.

전극에 가해지는 전기신호가 진동수 ω 로 시간 t 에 따라 조화함수 형태로 변화하는 신호라면, 진동 변위들도 시간 t 에 대한 조화함수 형태로 간주할 수 있다. 따라서 $\bar{u}(r, t)$ 와 $\bar{\phi}(r, t)$ 는 다음과 같이 변수 분리한다.

$$\bar{u}(r, t) = U(r)e^{j\omega t}, \quad \bar{\phi}(r, t) = \Phi(r)e^{j\omega t} \quad (17a, b)$$

식 (17a)를 식 (16)에 대입하면 $U(r)$ 에 대한 지배 방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left(1 + \frac{\widehat{c_{43}} - \widehat{c_{13}}}{E_L}\right) \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \left(k^2 - \frac{\widehat{c_{11}}}{E_L} \frac{1}{r^2}\right) U = 0 \quad (18)$$

여기서 $k (= \omega/c_L)$ 는 파동수이다.

식 (18)을 풀기 위해 $U = r^p Z(r)$ 을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} (k^2 r^2 - q^2) Z = 0 \quad (19)$$

여기서 $p = -(\widehat{c_{13}} - \widehat{c_{11}})/(2E_L)$ 이고, q^2 는 다음과 같다.

$$q^2 = p^2 + \frac{\widehat{c_{11}}}{E_L} \quad (20)$$

따라서 식 (18)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$U(r) = r^p [A_1 J_q(kr) + A_4 J_{-q}(kr)] \quad (21)$$

식 (21)를 식 (15b)에 대입하여 변수분리한 후 공간에 대해 적분해서 $\Phi(r)$ 를 구하면, 다음 식을 얻는다.

$$\Phi(r) = \frac{\widehat{e_{33}}}{\widehat{\epsilon_{33}}} r^p [A_1 J_q(kr) + A_4 J_{-q}(kr)] + A_3 \ln r + A_4 \quad (22)$$

식 (21)과 (22)에서 결정되지 않은 상수 A_1 , A_2 , A_3 ($= a_1/\widehat{\epsilon_{33}}$), A_4 는 경계조건에 따라 결정된다.

3.2 진동 특성방정식

Fig. 1에 보인 원통형의 내부 반지름은 R_i 이고 외부 반지름은 R_o 이다. 변환기 내면과 외면 사이에 작용하는 전압

$V_r e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다. 이에 대한 경계 조건을 다음과 같이 설정한다.

$$r=R_i \text{ 에서 } \Sigma_r=0, \quad \Phi=0 \quad (23a)$$

$$r=R_o \text{ 에서 } \Sigma_r=0, \quad \Phi=V_o \quad (23b)$$

응력 $\sigma_r (= \Sigma_r(r) e^{j\omega t})$ 는 식 (9)의 관계를 가지므로, 식 (21)과 (22)에 경계조건 (23)를 적용하면 결정되지 않은 상수 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 에 대한 식 (24)을 얻는다.

$$f_1(kR_i)A_1 + f_2(kR_i)A_2 + \frac{\widehat{e_{33}}}{R_i} A_3 = 0 \quad (24a)$$

$$g_1(kR_i)A_1 + g_2(kR_i)A_2 + A_3 \ln R_i + A_4 = 0 \quad (24b)$$

$$f_1(kR_o)A_1 + f_2(kR_o)A_2 + \frac{\widehat{e_{33}}}{R_o} A_3 = 0 \quad (24c)$$

$$g_1(kR_o)A_1 + g_2(kR_o)A_2 + A_3 \ln R_o + A_4 = V_o \quad (24d)$$

여기서

$$f_1(kr) = E_L \frac{d[r^p J_q(kr)]}{dr} + \widehat{c_{43}} \frac{r^p J_q(kr)}{r} \quad (25a)$$

$$f_2(kr) = E_L \frac{d[r^p J_{-q}(kr)]}{dr} + \widehat{c_{43}} \frac{r^p J_{-q}(kr)}{r} \quad (25b)$$

$$g_1(kr) = \frac{\widehat{e_{33}}}{\widehat{\epsilon_{33}}} r^p J_q(kr), \quad g_2(kr) = -\frac{\widehat{e_{33}}}{\widehat{\epsilon_{33}}} r^p J_{-q}(kr) \quad (25c, d)$$

식 (24)의 해를 구하는 과정에서 특성 방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

$$D_{11} = R_o f_1(kR_o) - R_i f_1(kR_i) \quad (27a)$$

$$D_{12} = R_o f_2(kR_o) - R_i f_2(kR_i) \quad (27b)$$

$$D_{21} = g_1(kR_o) - g_1(kR_i) - \frac{R_o}{\widehat{e_{33}}} f_1(kR_o) \ln \frac{R_o}{R_i} \quad (27c)$$

$$D_{22} = g_2(kR_o) - g_2(kR_i) - \frac{R_o}{\widehat{e_{33}}} f_2(kR_o) \ln \frac{R_o}{R_i} \quad (27d)$$

4. 결과 및 토의

4.1 이론적 해석

실제 원통형 1-3 압전 복합체의 치수와 물성치들을 식 (26)에 대입하여 공진 주파수를 계산한다. 계산에 사용된 압전 세라믹과 폴리머는 각각 PZT 4D와 에폭시로서, 물성치들을 Table 1에 정리하였다. 1-3 압전 복합체의 외부 반지름 R_o , 내부 반지름 R_i 는 각각 40 mm, 55 mm 로 정하였고, 1-3 압전 복합체의 부피에 대한 압전 세라믹의 체적비 ν 에 따라서 공진 주파수를 계산하였다. 이를 위해 먼저 식 (9)와 (11), 그리고 식 (13)을 이용해 1-3 압전 복합 압전체의 물성치들을 계산하였다. 이들 결과와 치수를 식 (26)에 대입한 후, Mathematica⁽⁹⁾의 FindRoot 기능을 사용하여 공진 주파수를 계산하여 Fig. 2에 등그래미로 나타내었다.

Table 1 Material properties of a PZT 4D and epoxy

Properties		Material			
		PZT 4D		Epoxy	
Mechanical	Elastic Stiffness (10^9 N/m^2)	c_{11}^E	148	c_{33}	8.83
		c_{12}^E	76.2		
		c_{13}^E	74.1		
		c_{33}^E	131		
		c_{55}^E	25.3		
		c_{66}^E	35.9		
	Density (Kg/m^3)	ρ	7700	ρ	1200
Electro-mechanical	Piezoelectric stress constant (C^2/m^2)	e_{31}	-2.32		
		e_{33}	10.9		
		e_{31}	9.31		
Dielectric	Relative permittivity	k_{11}^S	450		
		k_{33}^S	235		

4.2 유한요소 해석

이론적 해석의 결과의 타당성을 확인하기 위하여 유한요소법에 의한 수치해석을 한 결과를 제시한다. 유한 요소 해석 용 상용 프로그램인 ANSYS를 이용하여 원통형 1-3 압전 복합체의 공진 주파수를 구하였다.

원통형 1-3 압전 복합체 전체를 해석하는 과정은 상당히 복잡하므로 압전 세라믹 막대를 포함하고 있는 단위 입방체 (unit cell)만으로 해석을 실시하였다. 이런 해석법은 평판형 1-3 압전 복합체의 두께 방향 진동을 해석하기 위해 적용된 바가 있다.⁽⁸⁾ 압전 현상을 포함하는 Couple-Field 요소인 Solid5와 구조 요소인 Solid45를 이용해 각각 압전 세라믹과 에폭시를 모델링하였다. 단위 입방체의 외부 경계를 이루는 $r\theta$ 평면에서 종방향 변위 w 를 구속하고, rz 평면에서 원주

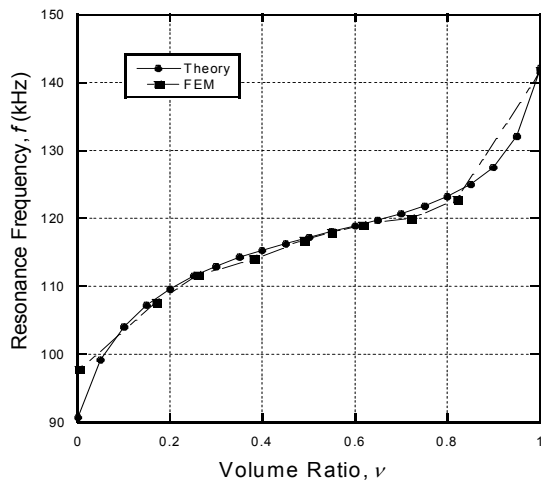


Fig. 2 Resonance frequencies of a cylindrical 1-3 piezoelectric composite

방향 변위 v 를 구속하였다. 그리고 두 개의 θz 평면에서는 전압을 0 volt 가한 후 Block Lanczos 법으로 모드 해석을 하였다. 이로부터 구한 공진 주파수를 Fig. 2에 사각형으로 표시하였다.

5. 결론

압전 세라믹과 고분자 폴리머로 이루어진 원통형 1-3 압전 복합체의 진동 파라미터들을 유도해 반경 방향 진동 특성을 해석하였고 유한요소법을 이용해 수치해석을 하였다.

이론 해석 결과 원통형 1-3 압전 복합체의 두께 진동은 거의 정확하게 예측되므로 센서 설계 시에 필요한 이론적 토대를 마련하였다.

참고 문헌

- (1) Bush-Vishniac, I. J., 1999, Electromechanical Sensors and Actuators, Springer-Verlag, New York, Chapter 5.
- (2) Smith, W. A., Alud, B. A., 1991, "Modeling 1-3 composite piezoelectrics: Thickness-Mode Oscillations", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 38, No. 1, pp. 40-47.
- (3) Gururaja, T. R., Schulze, W. A., Cross, L. E., Newnham, R. E., Alud, B. A., Wang, Y. J., 1985, "Piezoelectric composite materials for ultrasonic transducer applications. Part I: Resonant modes of vibration for PZT rod-polymer composites", IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-32, pp. 481-498.
- (4) Freitag, L., Grund M., Catipovic, J., Nagle, D., Pazol, B., Glynn, J., 2001, "Acoustic communication with small UUVs using a hull-mounted conformal array", Proceedings of Oceans MTS/IEEE Conference and Exhibition, Vol. 4, pp. 2270-2275.
- (5) Dowling, N. E., 1999, Mechanical Behavior of Materials, 2nd Edition, Prentice-Hall, New Jersey, Chapter 5.
- (6) Kim, J. O., Lee, J. G., 2007, "Dynamic characteristics of piezoelectric cylindrical transducers with radial polarization", Journal of Sound and Vibration, Vol. 300, pp. 241-247.
- (7) Wolfram, S. 1999, The Mathematica Book, 4th ed., Wolfram Media Inc., Cambridge University Press.
- (8) Hossack, J. A., Hayward, G., 1991, "Finite-element analysis of 1-3 composite transducers", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 38, No. 6, pp. 618-629.