

상판 위 질량의 순간적인 움직임에 의해 가진되는 6-자유도 공압제진대의 진동 응답에 대한 연구

A study on response analysis of 6-DOF pneumatic vibration isolation table loaded by transient movements of carriage on it

선종오* · 신윤호* · 김광준†
Jong-oh Sun, Yun-ho Shin and Kwang-joon Kim

Key Words : Pneumatic isolator(공압제진대), XY-stage(이송대), Moving mass(이동질량), Transient response(과도응답)

ABSTRACT

As environmental vibration requirements on precision equipments get more stringent, use of pneumatic vibration isolators becomes more crucial and, hence, their dynamic performance needs to be further improved. Dynamic behavior of those pneumatic vibration isolation tables is very important to both manufacturer and customer as performance specifications. Together with conventional transmissibility, transient response characteristics are another critical performance index especially when movements of components, e.g., x-y tables, of the precision equipments are very dynamic.

In this paper, analysis on transient response of a pneumatic vibration isolation table loaded by a mass moving on it is presented. This is a conventional dynamics problem on a rigid body with 6 degree of freedom and a mass with another degree of freedom. How to obtain transient responses of the isolation table is described when the movements of the mass are prescribed relative to the table.

1. 서 론

90년대 후반에 들어 반도체 및 광학 관련 산업 등의 중요성이 커지고 있는데, 이러한 산업에서 사용되는 정밀장비들의 성능은 지반진동(Ground vibration)에 민감한 특성을 가진다. 따라서, 정밀장비 구동 시 지반 진동에 대한 기준이 최근 들어 크게 강화되고 있으며^(1,2), 정밀장비에 전달되는 지반 진동 수준을 허용 기준 이하로 낮추기 위하여 별도의 제진 장치를 이용하기도 한다. 이러한 제진 장치로서 공기스프링(Pneumatic spring)을 이용한 공압제진대(Pneumatic vibration isolator)가 많이 사용되고 있으며, 지반 진동 절연을 위한 공기스프링의 설계연구 및 제어연구가 활발히 진행되고 있는 실정이다.^(3,4)

공기스프링은 압축 공기를 강성요소로서 이용하기 때문에 작은 강성을 가질 수 있다. 그 결과 공압제진대는 1-5Hz 정도의 낮은 공진 주파수 특성을 띠게 되어 저주파 영역에 존재하는 미세 지반 진동까지 절연할 수 있게 된다. 그러나, 공기스프링이 가지는 작은 강성은 낮은 공진 주파수를 가

진다는 장점과 더불어 공압제진대 정반에 직접적으로 가해지는 힘에는 취약하다는 단점을 가진다. 특히 LCD 표면검사기, 진공 합착기 등과 같이 장비의 일부분이 동적 움직임을 가지는 정밀장비의 구동에 의해 발생하는 힘은 제진대 정반에 큰 오버슈트(Overshoot)를 발생시킬 수 있으며, 이는 정밀장비의 성능 발현을 저해한다. 따라서, 이러한 과도응답을 줄일 수 있는 연구가 필요하나 아직 미비한 실정이다.

운전 중 장비의 일부분이 이동하는 공정의 경우 그 움직임이 멈춘 후 발생하는 잔류진동이 소멸될 때까지 다음 공정을 기다려야만 한다. 따라서, 장비운전에 의해 발생하는 제진대의 과도응답 또한 지반진동과 제진대 사이의 전달율과 함께 공압제진대의 중요한 성능지표로서 주목되어야 한다. 또한, 과도응답을 줄이기 위한 제진대 설계 연구가 필요하나, 그에 앞서 과도응답 예측을 위한 모델이 필요하다. 본 논문에서는 정밀장비의 이송부(XY-stage)에 의해 발생하는 공압제진대의 과도응답을 예측하기 위한 모델을 구성하고 그 응답을 예측해 보고자 한다. 이러한 예측을 통하여 제진대 공급자는 사용자의 정밀장비 운전조건과 목표 정착시간에 맞는 제진대, 다시 말해 알맞은 질량의 정반과 공기스프링을 선택할 수 있다. 또한, 사용자는 제진대의 구성정보로부터 목표 정착시간에 맞는 정밀장비의 운전조건, 즉 이송부의 속도와 가속도를 결정할 수 있다.

† 책임저자; 정회원, 한국과학기술원
E-mail : kjkim@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3024, Fax : (042) 869-8220

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

2. 이송부를 포함하는 공압제진대의

운동방정식 유도

이송부를 포함하는 공압제진대 전체 계의 실질적인 입력은 리니어 모터(Linear motor)와 같은 구동부에 의해 발생하는 힘이 되겠으나, 이송부의 움직임이 정해져 있을 때는 그 실질적인 입력힘이 얼마인가는 관심 대상이 되지 않는다. 이러한 상황 하에서 제진대에 가해지는 힘은 작용·반작용 법칙에 의해 이송부의 관성력으로 표현이 가능하며, 이송부가 제진대 위에서 가지는 움직임은 자유도가 아닌 입력으로서 생각해야 한다.

2.1 운동방정식 유도를 위한 가정

이송부를 포함하는 공압제진대 전체 계에 대한 운동방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

- Fig. 1 에 나타낸 바와 같이 4 개의 공기스프링과 정반으로서 구성되는 공압제진대의 정반 위에 움직임을 가지는 두 개의 질량이 있는 경우를 생각한다.

- 정반 위에 설치되는 장비의 이동질량을 제외한 부분은 정반에 고정되어 정반과 함께 하나의 강체로 간주하며, 이동질량은 집중질량으로 간주한다.

- Fig. 1 에 나타낸 바와 같이 정반 위에 위치하는 이동질량의 움직임은 정반에 고정된 좌표계에 대하여 첫 번째 질량은 x 방향으로만 움직임을 가지고, 두 번째 질량은 첫 번째 질량 위에 위치하면서 y 방향으로만 움직임을 가진다. 또한, 두 질량은 정반에 고정된 좌표계에서 알려진 변위와 속도, 가속도로 거동한다.

- 이동질량에 의해 발생하는 힘은 상호작용력으로서 공압제진대에 입력으로 작용한다. 실질적인 리니어 모터에 의한 입력은 이동질량의 움직임에 의해 묘사되는 관성력으로 근사화가 가능하다.

- 정반 운동의 각변위는 충분히 작아서(2° 이하) 정반에 고정된 좌표계에서 관성좌표계로의 좌표 변환 시 작은 각변위에 대한 변환행렬(Direction cosine for infinitesimal rotations) 사용이 가능하며, 수평·수직방향 변위 역시 충분히 작다.

- 회전강성요소는 무시하며, 수직·수평방향의 강성요소들에 의한 힘은 각 방향으로만 작용하고,

그 강성과 감쇠계수는 일정하다.

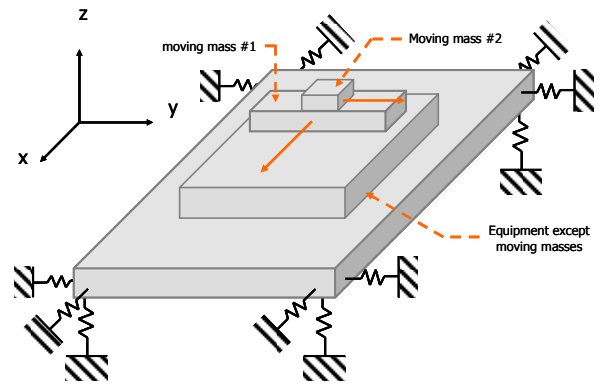


Fig. 1 Scheme of the whole system

2.2 이송부를 포함하는 공압제진대의 운동방정식 유도

본 절에서는 이해의 용이함을 위하여 Fig. 2 에 나타낸 바와 같이 3 자유도를 가지는 공압제진대 위에 하나의 이동질량이 움직이는 시스템에 대한 운동방정식 유도를 예시로서 보인다.

Fig. 2 에서 보는 바와 같이 관성좌표계를 A 프레임이라 하고 xy 축으로 표시하고, 정반의 무게 중심 G 에 원점이 위치하며 정반에 고정되어 있는 좌표계를 B 프레임이라 하며 $x'y'$ 축으로 표시한다. 또한, 각각 x, y 방향의 단위 벡터를 \hat{i}, \hat{j} 라 하고, x', y' 방향의 단위 벡터를 \hat{i}', \hat{j}' 이라 한다. \hat{i}, \hat{j} 와 \hat{i}', \hat{j}' 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서, \mathbf{C} 는 Direction cosine 행렬이며, 작은 각변위에 대해서 다음과 같이 근사화할 수 있다⁽⁵⁾.

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Fig. 2 를 참고하여 다음과 같은 벡터들을 정의한다.

- 무게중심의 위치 벡터

$$\underline{G} = X\hat{i} + Y\hat{j} \quad (3)$$

여기서, X, Y 는 A 프레임에서 무게중심의 좌표를 나타낸다.

- B 프레임에서의 이동 질량의 위치 벡터

$$\underline{d} = qi' + hj' \quad (4)$$

- A 프레임에서의 이동 질량의 위치 벡터

$$\underline{r} = \underline{G} + \underline{d} = \{X\hat{i} + Y\hat{j}\} + \{q\hat{i}' + h\hat{j}'\} \quad (5)$$

제진대에 가해지는 모든 힘은 Fig. 3 에 나타낸 바와 같이 관성 좌표계에서 관찰한 이송부의 가속도와 그 질량으로서 표현되는 관성력과 각 방향 공기스프링에 의한 힘들이다. A 프레임에서 관찰한 움직이는 질량의 위치 벡터 \underline{r} 을 미분하여 가속도를 구하면 다음과 같다⁽⁶⁾.

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{{}^A d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{{}^A d^2 \underline{G}}{dt^2} + \frac{{}^B d^2 \underline{d}}{dt^2} + 2 \cdot {}^A \omega^B \times \frac{{}^B d \underline{d}}{dt} + {}^A \alpha^B \times \underline{d} + {}^A \omega^B \times ({}^A \omega^B \times \underline{d}) \quad (6)$$

여기서, 미분 기호 $\frac{{}^A d}{dt}$ 와 $\frac{{}^B d}{dt}$ 는 각각 A 프레임과 B 프레임을 기준프레임으로 하는 미분을 나타내며, ${}^A \omega^B$ 와 ${}^A \alpha^B$ 는 정반의 각속도와 각가속도를 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$${}^A \omega^B = \dot{\theta} \hat{k}, \quad {}^A \alpha^B = \ddot{\theta} \hat{k} \quad (7)$$

Fig. 3 에 나타낸 움직이는 질량의 자유물체도로 부터 다음과 같은 수식을 유도할 수 있다.

$$N_x = ma_x = m(\ddot{X} + \ddot{q} - 2\dot{q}\dot{\theta} - q\ddot{\theta} - q\dot{\theta}^2 - h\ddot{\theta} + h\dot{\theta}^2) \quad (8)$$

$$N_y = ma_y + mg = m(\ddot{Y} + \ddot{q}\theta + 2\dot{q}\dot{\theta} + q\ddot{\theta} - q\theta\dot{\theta}^2 - h\theta\ddot{\theta} - h\theta^2 + g) \quad (9)$$

여기서 N_x , N_y 는 각각 이동질량과 정반 사이에서 발생하는 x , y 방향의 상호작용력이며, a_x ,

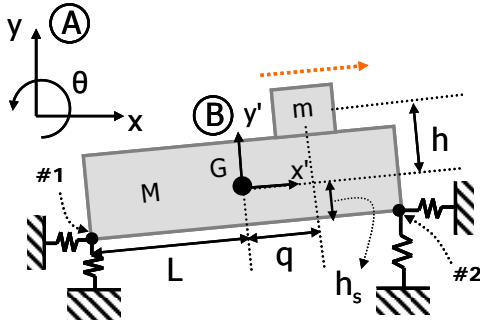


Fig. 2 3-DOF isolation table with a moving mass

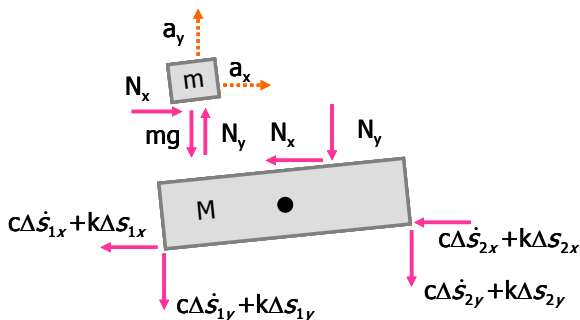


Fig. 3 Free body diagram of 3-DOF isolation table with a moving mass

a_y 는 각각 이동질량의 x , y 방향 가속도로서 다음과 같다.

$$a_x = \ddot{x} \cdot \hat{i}, \quad a_y = \ddot{y} \cdot \hat{j} \quad (10)$$

움직이는 질량이 가지는 가속도에 의해 정반에 가해지는 관성력은 작용·반작용의 법칙에 의해서 그 가속도의 반대방향으로 작용하게 된다. Fig. 3 에 나타낸 공압제진대 정반의 자유물체도에 뉴턴의 제 2 법칙(Newton's 2nd law)과 오일러(Euler) 법칙을 적용하여 제진대 정반의 운동방정식을 다음과 같이 유도해 낼 수 있다.

$$M\ddot{X} + 2c(\dot{X} + h_s\dot{\theta}) + 2k(X + h_s\theta) = -N_x \quad (11)$$

$$M\ddot{Y} + 2c\dot{Y} + 2kY = -N_y \quad (12)$$

$$I\ddot{\theta} + 2c(L\dot{\theta} + h_s^2\dot{\theta} + h_s\dot{X}) + 2k(L^2\theta + h_s^2\theta + h_sX) = -(q - h\theta)N_y + (h + q\theta)N_x \quad (13)$$

식(8), (9)를 식(11)~(13)에 대입한 후 작은 변위라고 가정한 X , Y , θ 의 2 차 항들을 소거하면 다음과 같이 행렬형태의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M+m & 0 & -mh \\ 0 & M+m & mq \\ -mh & mq & I+mh^2+mq^2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2c & 0 & 2ch_s \\ 0 & 2c & 2m\dot{q} \\ 2ch_s & 0 & 2c(L^2+h_s^2)+2mq\dot{q} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 2kh_s \\ 0 & 2k & m\dot{q} \\ 2kh_s & 0 & 2k(L^2+h_s^2)-mgh \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -m\ddot{q} \\ -mg \\ mh\ddot{q} - mgq \end{Bmatrix} \quad (14)$$

이와 같은 방법을 두 개의 이동질량을 포함하는 6 자유도 공압제진대에 확장 적용하여 운동방정식을 유도한다. 그 결과는 부록(Appendix)에 수록하도록 한다.

2.3 이송부를 포함하는 공압제진대 전체 시스템의 특성

6 자유도 운동방정식은 그 양이 상당히 방대하

며, 앞 절에서 유도된 3 자유도 운동방정식이 6 자유도 운동방정식의 특징을 모두 갖고 있으므로, 본 절에서는 3 자유도 운동방정식을 통해 시스템의 특성을 살펴본다.

식 (14)에서 각 행렬의 특성을 살펴보면 질량, 감쇠 및 강성 행렬은 모두 이동질량의 변위, 속도, 가속도항(q, \dot{q}, \ddot{q})들을 포함하는 시변(Time-variant) 행렬이다. 따라서, 시스템의 해석적인 응답을 얻는 것은 굉장히 어려우며, 본 논문의 3 장에서는 수치적인 접근방법을 통해서 시스템의 응답을 예측하고자 한다. 또한, 질량행렬은 언제나 대칭행렬(Symmetric)인 반면에 감쇠행렬과 강성행렬은 이동질량의 속도 및 가속도항(\dot{q}, \ddot{q})에 의하여 생기는 항들로 인하여 비대칭(Asymmetric) 행렬을 이룬다. 강성 및 감쇠 행렬이 비대칭을 이루는 이유는 질량이 이동하는 중에는 시스템의 정적 평형점이 정의될 수 없는 동역학 문제이기 때문이다. 일반적으로 감쇠 및 강성 행렬의 대칭성은 정적 평형점에서 미소 변위를 다루는 진동 문제에서 선형 시스템인 경우에 정의되는 특징이다. 체진대 위에서 질량이 이동하는 경우에는 그 정적 평형점이 정의될 수 없으며, 정반 위에서 이동질량의 움직임을 미소 변위라 할 수 없기 때문에 강성 및 감쇠 행렬이 비대칭성을 나타낸다.

반면에 이동질량이 정지한 후에는 이동질량의 속도와 가속도항(\dot{q}, \ddot{q})들은 모두 소거되며 모든 행렬은 대칭 및 시불변(Time-invariant)의 특성을 갖게 된다. 이러한 상황에서는 본 시스템은 초기치 진동 문제로 그 해석적인 응답을 구할 수 있다. 그러나, 그 초기 속도와 초기 변위를 계산하기 위해서는 수치적으로 질량이 정지하기 전까지 동역학 문제를 풀어야 하기 때문에 과도응답 예측에 있어서 큰 의미를 가진다고 할 수 없다. 반면에, 질량이 정지한 후에는 시스템의 모드해석이 가능하므로 과도응답을 줄이기 위한 체진대 설계에 있어서 유용한 정보가 될 것으로 사료된다.

3. 이송부를 포함하는 공압제진대의 과도응답 예측을 위한 모사실험

3.1 유도된 운동방정식의 검증

본 절에서는 4 계 룬제-쿠타(Runge-Kutta)법을 이용하여 2.3 절에서 유도된 운동방정식으로부터 얻은 응답을 다물체 동역학 프로그램인 ADAMS

에서의 모사실험 결과와 비교하여 유도된 운동방정식의 타당성을 검증한다.

Table 1 Conditions of simulation for comparison of the results from ADAMS and Matlab

Mass of the table	4400kg
Dimension of the table	Length : 2m Width : 1m Thickness : 0.3m
Stiffness of air spring	$5.7 \times 10^5 N/m$
Damping coefficient of air spring	$5.7 \times 10^3 N \cdot s/m$
Mass of a moving mass	400kg
Distance of a moving mass from the mass center in z' direction	0.17m
Input(displacement of a moving mass on the isolation table)	$x(t) = 0.7 \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$

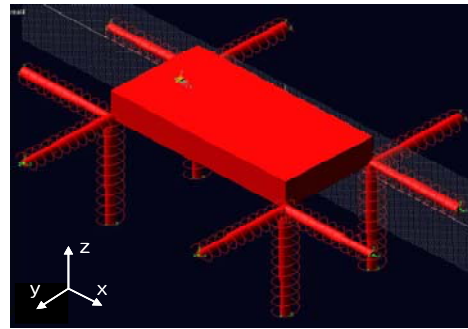


Fig. 4 A model for simulation in ADAMS

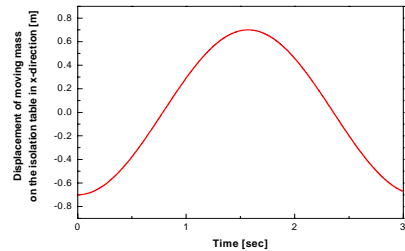


Fig. 5 Displacement of a moving mass on the isolation table in x -direction

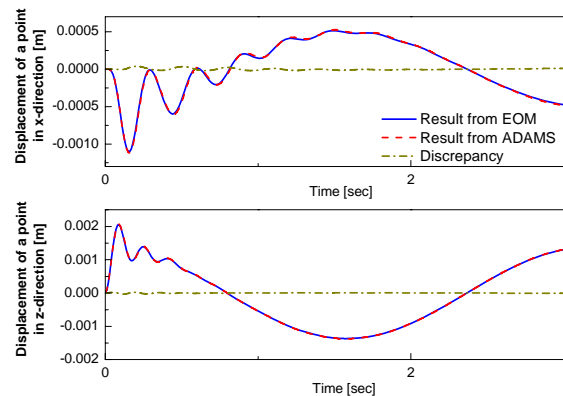


Fig. 6 Comparison of simulation results from the derived EOM and ADAMS

ADMAS 에서 Fig. 4 와 같이 공압제진대를 모델링한 후, 그 위에 움직이는 집중질량을 위치시킨다. 그 후, Fig. 5 와 같은 사인파형으로 집중질량을 공압제진대 위에서 x 방향으로 이동하게 하였다. 모사실험은 하나의 질량이 움직이는 경우로 가정하였으며 그 조건은 Table 1 과 같다. Fig. 6 에는 유도된 운동방정식으로부터 얻어진 공압제진대 한쪽 모서리 부의 응답을 실선으로, ADAMS 로부터 얻어진 응답을 점선으로 나타내었으며, 그 차이를 일점쇄선으로 나타내었다. 그래프에서 보는 바와 같이 두 응답은 일치하며, 그 차이는 응답수준에 비하여 작다는 것을 관찰할 수 있다. 따라서, 2 장에서 유도된 운동방정식의 타당성을 입증할 수 있다.

3.2 모사실험

Table 2 는 두 개의 질량이 움직이는 경우에 대한 모사실험 조건으로서 실제 산업현장에서 사용되는 LCD 표면 검사장비의 운전조건을 나타낸다. 입력에 해당하는 이동질량의 변위와 속도, 가속도는 일반적인 XY-스테이지의 움직임과 같이 초기 정지상태에서 가속도를 가지고 움직이기 시작하여 등속운동 구간을 거쳐 다시 목표 지점에서 감속하여 멈추는 움직임을 근사화하여 표현하였다. 첫 번째 질량이 x 방향으로 움직이고 그 위에서 y 방향으로 움직이는 두 번째 질량이 공압제진대를 대각선으로 이동하게 되는 상황을 입력으로 하였으며, 그에 해당하는 첫 번째 질량의 움직임은 Fig. 7(a)에, 두 번째 질량의 움직임은 Fig. 7(b)에 나타

Table 2 Conditions of simulation with two moving masses

Mass of the table	4400kg
Dimension of the table	Length : 2m Width : 1m Thickness : 0.3m
Stiffness of air spring	$5.7 \times 10^5 \text{ N/m}$
Damping coefficient of each air spring	$5.7 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
Mass of moving masses	First mass : 400kg Second mass : 40kg
Distance of moving masses from the mass center in z' direction	First mass : 0.35m Second mass : 0.5m
	First mass Stroke : 1.4m Velocity : 0.2m/s
Input (displacement of moving masses on the isolation table)	Acceleration : 0.5m/s^2 Second mass Stroke : 0.6m Velocity : 0.083m/s Acceleration : 0.5m/s^2

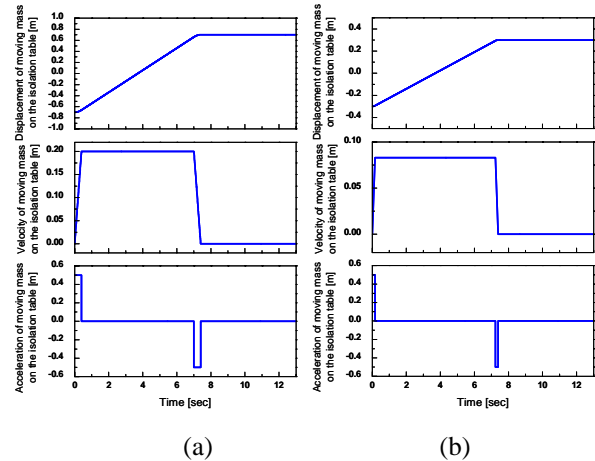


Fig 7 Input : Displacement, velocity and acceleration of two moving masses

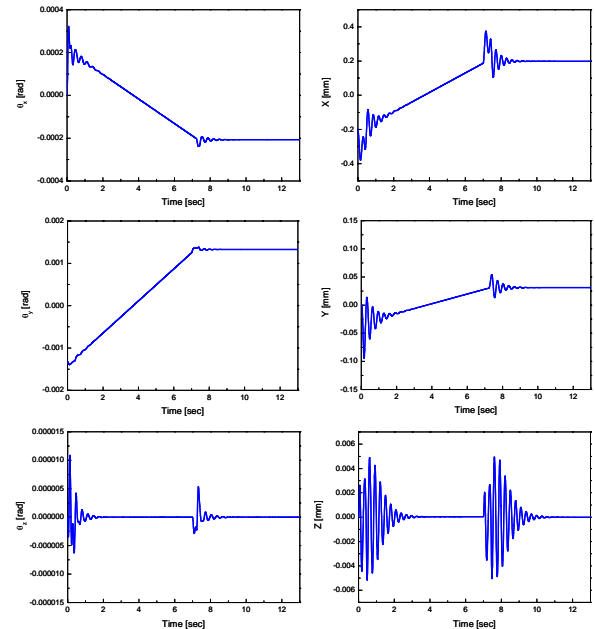


Fig. 8 Simulation results with two moving masses

내었다.

Fig. 8 은 모사실험의 결과로서 좌측 열에는 각 방향 회전운동 각변위를 나타내었고 우측 열에는 각 방향 병진운동의 변위를 나타내었다. 움직이는 질량이 가속도를 가지는 구간 즉, 질량이 출발하거나 멈추는 구간에서 공압제진대의 응답이 큰 변화를 가지며, 수평방향의 병진운동 응답수준이 수직방향의 응답수준보다 크다는 것이 관찰된다.

4. 결론

본 논문에서는 XY-스테이지 같이 움직이는 질량을 포함하는 정밀장비가 공압제진대에 설치되어

작동될 시, 움직이는 질량의 관성력에 의해 공압제진대에 상당한 과도응답이 야기될 수 있음을 지적하였다.

과도응답 예측을 위해 움직이는 질량을 포함한 공압제진대 전체 계에 대해 6 자유도 운동방정식을 수립하였으며, 그 특성을 살펴보았다. 운동방정식을 구성하는 질량, 감쇠, 강성 행렬은 이동질량이 정지해 있을 때는 시불변 행렬이 되나, 이동질량이 움직임을 가질 때는 모두 시변 행렬이 된다. 또한, 질량행렬은 항상 대칭행렬인 반면에 감쇠 및 강성 행렬은 이동질량이 움직임을 가질 때에는 비대칭행렬로 나타나며, 이동질량이 정지하였을 때는 대칭행렬로 나타난다. 이는 질량의 이동 중에는 전체 시스템이 정적 평형점이 정의되지 않는 동역학 문제가 되기 때문에 나타나는 특성이라는 점을 지적하였다.

마지막으로 유도된 운동방정식으로부터 공압제진대의 과도응답을 룬제-쿠타 법을 이용해 수치적으로 계산할 수 있었다.

향후에는 유도된 운동방정식에 적용될 공기스프링의 수직방향 및 수평방향 동강성계수를 추출하고, 동강성계수가 가지는 동적 변위 입력의 크기의존성을 시간영역에서 공압제진대의 과도응답 계산시 적용하는 방법을 개발하여 보다 정확한 과도응답을 계산해 내고자 한다.

후 기

본 연구는 ㈜대일시스템의 지원을 받아 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Colin G. Gordon "Generic Vibration Criteria for Vibration-Sensitive Equipment" Proceedings of SPIE, San Jose, CA.

(2) E. E. Ungar, D. H. Sturz, H. Amichk "Vibration Control Desing of High Technology Facilities" Sound and Vibration, July 1990

(3) Jeung-Hoon Lee, Kwang-Joon Kim "Modeling of nonlinear complex stiffness of dual-chamber pneumatic spring for precision vibration isolations" Journal of Sound and Vibration, 301(2007) 909-926

(4) 오기용 "시간지연 제어기법을 이용한 공압제진대 저주파 영역 진동 절연 성능 향상" 석사학위논문 KAIST 2006

(5) Donald T. Greenwood, "Advanced dynamics" Cambridge 2003

(6) Thomas R. Kane, David A. Levinson "Dynamics : theory and applications" McGraw-Hill 1985

부 록

2 개의 이동질량을 포함하는 6 자유도 공압제진대의 운동 방정식

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} I_x + m_1 h_1^2 & & & & & \\ +m_2 [q_2^2 + (h_1 + h_2)^2] & -m_2 q_1 q_2 & -q_1 (m_1 h_1) & 0 & -m_1 h_1 & m_2 q_2 \\ & I_y + m_1 (q_1^2 + h_1^2) & -m_2 (h_1 + h_2) q_2 & m_1 h_1 & 0 & -q_1 (m_1 + m_2) \\ -m_2 q_1 q_2 & +m_2 [q_1^2 + (h_1 + h_2)^2] & -m_2 (h_1 + h_2) q_2 & +m_2 (h_1 + h_2) & 0 & -q_1 (m_1 + m_2) \\ -q_1 (m_1 h_1) & -m_2 (h_1 + h_2) q_2 & I_z + m_1 q_1^2 & -m_2 q_2 & q_1 (m_1 + m_2) & 0 \\ +m_2 (h_1 + h_2) & & +m_2 [q_1^2 + q_2^2] & & & \\ 0 & m_1 h_1 & -m_2 q_2 & M + m_1 + m_2 & 0 & 0 \\ -m_1 h_1 & +m_2 (h_1 + h_2) & & & & \\ -m_2 (h_1 + h_2) & 0 & q_1 (m_1 + m_2) & 0 & M + m_1 + m_2 & 0 \\ m_2 q_2 & -q_1 (m_1 + m_2) & 0 & 0 & 0 & M + m_1 + m_2 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -m_2 g q_2 + m_2 (h_1 + h_2) \ddot{q}_2 \\ q_1 g (m_1 + m_2) - \ddot{q}_1 [m_1 h_1 + m_2 (h_1 + h_2)] \\ m_2 (q_2 - q_1) \ddot{q}_2 \\ -\ddot{q}_1 (m_1 + m_2) \\ -m_2 \ddot{q}_2 \\ -g (m_1 + m_2) \end{Bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 4W^2 c_v + 4h_1^2 c_h & & & & & \\ +2m_2 q_2 \dot{q}_2 & -2m_2 q_2 \dot{q}_1 & -2\dot{q}_1 [m_1 h_1 + m_2 (h_1 + h_2)] & 0 & 4h_1 c_h & 0 \\ -2m_2 q_1 \dot{q}_2 & 4L^2 c_v + 4h_1^2 c_h & -2m_2 (h_1 + h_2) \dot{q}_2 & -4h_1 c_h & 0 & 0 \\ 0 & +2q_1 \dot{q}_1 (m_1 + m_2) & & & & \\ 0 & 0 & 4c_h (W^2 + L^2) & & & \\ 0 & 0 & +2m_2 q_2 \dot{q}_2 + 2m_1 \dot{q}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4h_1 c_h & +2m_2 q_1 \dot{q}_1 & & & \\ 4h_1 c_h & 0 & -2m_2 \dot{q}_2 & 4c_h & 0 & 0 \\ 2m_2 \dot{q}_2 & -2\dot{q}_1 (m_1 + m_2) & 2\dot{q}_1 (m_1 + m_2) & 0 & 4c_h & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 4c_v \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 4W^2 k_v + 4h_1^2 k_h & & & & & \\ +m_2 q_2 \ddot{q}_2 & -m_2 q_2 \ddot{q}_1 & -\ddot{q}_1 [m_1 h_1 + m_2 (h_1 + h_2)] & 0 & 4h_1 k_h & 0 \\ -m_2 q_1 \ddot{q}_2 & 4L^2 k_v + 4h_1^2 k_h & -m_2 \ddot{q}_2 (h_1 + h_2) & -4h_1 k_h & 0 & 0 \\ 0 & +q_1 \ddot{q}_1 (m_1 + m_2) & & & & \\ 0 & 0 & 4k_h (W^2 + L^2) & & & \\ 0 & -4h_1 k_h & -m_2 \ddot{q}_2 & & & \\ 4h_1 k_h & 0 & +m_2 q_2 \ddot{q}_2 + q_1 \ddot{q}_1 (m_1 + m_2) & 0 & 0 & 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 & -\ddot{q}_1 (m_1 + m_2) & \ddot{q}_1 (m_1 + m_2) & 0 & 4k_h & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 4k_v \end{bmatrix}$$

k_v, c_v : 수직방향(vertical) 강성, 감쇠계수
 k_h, c_h : 수평방향(horizontal) 강성, 감쇠계수
 m_1, m_2 : 첫 번째, 두 번째 이송부의 질량
 q_1, q_2 : 첫 번째, 두 번째 이송부의 정반 위에서의 변위

h_1, h_2 : 무게중심으로부터 첫 번째, 두 번째 이송부까지의 높이
 W, L : 무게중심으로부터 공기 스프링까지의 x, y 방향 거리