다물체계의 자려진동 구현을 위한 마찰 모델링
Friction Model to Realize Self-Excited Vibration of Multi-body Systems

노현영*·유홍희†
Hyun Young Roh and Hong Hee Yoo

Key Words: Friction force(마찰력), Static friction coefficient(정적 마찰계수), Kinetic friction coefficient(동적 마찰계수), Self-excited vibration(자려진동)

ABSTRACT

This paper presents a friction model to realize self-excited vibration of multi-body systems. The friction coefficient is modeled with a spline function in most commercial codes. Even if such a function resolves the problem of discontinuity in friction force, it cannot realize self-excited vibration phenomena. Furthermore, as the relative velocity approaches zero, the friction coefficient approaches zero with the conventional model. So, slip occurs when small force is applied to the system. To avoid these problems a new friction model is proposed in this study. With the new friction model, the self-excited vibration can be realized since the friction coefficient changes with the relative velocity. Furthermore, the slip phenomena could be reduced significantly with the proposed model.

기호설명

μ_s : 정적 마찰계수
μ_k : 동적 마찰계수
v_s : 정적 천이속도 (m/s)
v_d : 동적 천이속도 (m/s)

1. 서 론

오늘날 다물체 동역학에 관한 연구에서는 물체 사이에 일어나는 접촉 현상을 효과적으로 구현하고자 하는 많은 노력이[1, 2] 있었다. 임의의 두 강체 사이에 접촉이 일어날 경우 그 접촉 점에서는 수직항력과 접선방향 마찰력이 발생한다. 그런데 접선방향 마찰력에 대해 쿨롱의 마찰모델을 적용하면 힘의 불연속으로 인해 수치적분 시 문제가 종종 발생한다. 따라서 힘의 불연속을 해결하기 위해 종종 마찰계수를 Spline 함수로 모델링 하여 사용한다. 현재 대부분의 다물체동역학 해석 프로그램들은 접촉현상을 모델링할 때 특정한 형태의 Spline함수를[3, 4] 마찰계수로 사용하고 있다.

대부분의 상용프로그램에 사용하고 있는 마찰모델은 그러나 자려진동 현상을 구현하지 못하며 두 강체가 점착 조건으로 접촉하고 있을 때 저속 미끄럼 현상이 발생하는 문제점들을 갖고 있다. 즉, 프로그램에서 마찰계수의 함수가 사용될 때 두 강체 간 상대속도가 0 에 가까워 짐에 따라서 마찰계수 역시 0 에 가까워지기 때문에 작은 힘이 가해져도 점착이 되지 못하고 미끄럼이 일어나게 된다. 즉, 마찰력이[5] 접촉 하는 지점에 제대로 작용하지 않는 것이다.

본 연구에서는 자려진동 현상을 구현하기 위해 두 강체 사이의 접촉 모델로 새로운 형태의 마찰계수 함수를 제시하려고 한다. 이 모델링 방법은 우선 기존의 상용 프로그램을 그대로 이용하고, 그 프로그램에서 사용하고 있는 특정한 형태의 마찰계수 함수대신, 제안된 마찰계수 함수를 쉽게 사용할 수 있다는 장점을 갖고 있다. 본 연구에서는 제안된 마찰계수 함수에 나타나는 변수들의 변화에 따라 자려진동 현상이 어떻게 구현되는지에 대한 조사 연구를 수행하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어서 2 장에서는 본 연구에서 제안된 마찰계수를 위한 함수모델에 대한 설명과 함께 현재 상용해석 프로그램들에 사용되는 함수모델을 비교 분석하였고 3 장에서는 제안된 마찰계수 함수모델을 적용하여 함수에 나타나는 각종 변수들의 변화에 따른 자려진동 현상을 비교하고, 그 영향들을 논의하였다. 마지막으로 4 장에는 본 논문의 결론을 요약하여 수록하였다.

† 책임저자; 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070

* 한양대학교 대학원 기계공학과

2. 접촉모델링

2.1 제안된 마찰계수 함수

Fig. 1 은 본 논문에서 제안하고 있는 마찰계수 함수의 모습을 보여준다. 최대한 쿨롱 마찰력에 가깝게 모델링 하되 힘의 불연속이 일어나지 않게 하였다.

Fig. 1 은 아래와 같은 형태의 함수를 사용하여 얻은 그림이다.

$$\begin{aligned} \mu &= -a^{(v-b)} - \mu_k & v &< -v_s \\ \mu &= \frac{\mu_s}{(v_s)^{\beta}} v^{\beta} & -v_s &\le x \le v_s \\ \mu &= a^{-(x+b)} + \mu_k & v &> v_s \end{aligned} \qquad (1)$$

여기서 μ_k 는 동적 마찰계수로 함수의 점근선이 된다. β 와 a 의 값은 사용자가 결정하는 상수 값이고 b 는 동적 마찰계수, 정적 마찰계수, β 그리고 a 가 정해지면 계산되어지는 상수 값이다. 현재 대부분의 상용 프로그램에서 사용되고 있는 마찰계수 함수는 v_s , v_d 두 가지 천이속도 (Transition velocity)라는 경계 값과 정적· 동적 마찰계수를 이용하여 정의하고 있다. 하지만, 제안된 마찰계수 함수에서는 v_s 와 정적· 동적 마찰계수 만을 이용하였다. 이 과정에서 정적· 동적 마찰계수와 정적 천이속도는 각각 $\mu_s = 0.35$, $\mu_k = 0.3$, $v_s = 0.01$으로 하였다.

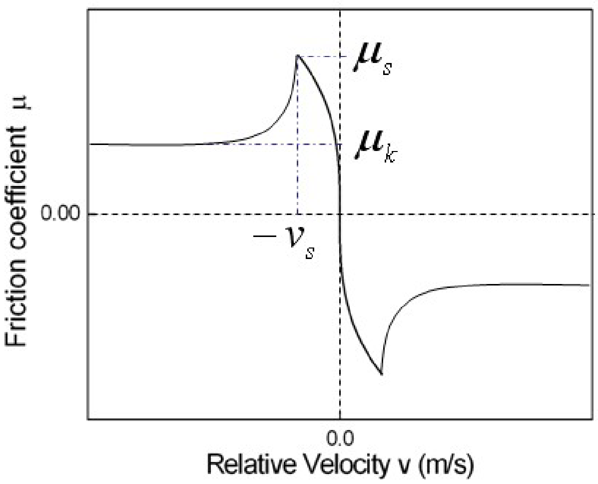


Fig. 1 Proposed friction coefficient function model.

2.2 상용 프로그램과의 차이점

Fig. 2 에서 알 수 있듯이 대부분의 다물체 동역학 해석 프로그램에서는 마찰계수를 정의하는데 4 가지 변수를 사용하고 있다. 그것은 앞에서 언급한 것과 마찬가지로 μ_s , μ_k , v_s , v_d 이다. 이때 상대속도가 v_s 값보다 작을 경우 다음과 같이 정의된 마찰계수가 사용되고,

$$\mu = hav\sin(v, 0, 0, v_s, \mu_s) \qquad (2)$$

상대속도가 $v_s < v < v_d$ 일 경우

$$\mu = hav\sin(v, v_s, \mu_s, v_d, \mu_k) \qquad (3)$$

와 같이 정의 된다. 상대속도가 v_d 보다 큰 경우는 동적 마찰계수가 사용된다.

이렇게 마찰계수가 상대 속도에 대해 정의 되면 다음 식에 의해 접촉 모델의 마찰력이 결정된다.

$$F_f = \mu(v)|F_n| \qquad (4)$$

이와 같은 접촉 모델을 사용하는 대부분의 다물체 동역학 해석 프로그램은 상대속도가 $-v_d < v < -v_s$, $-v_s < v < v_s$ 그리고 $v_s < v < v_d$ 구간일 때 정확한 결과를 얻지 못하고 있다.

좀 더 세부적으로 설명하면, 임의의 물체가 아주 작은 속도를 가질 때 힘의 불연속으로 인한 수치적분 상의 에러를 방지하기 위해 사용되는 특정 마찰계수 함수에서 속도가 0 에 가까워짐에 따라 마찰력 또한 0 에 가까워진다. 그래서 저속의 접

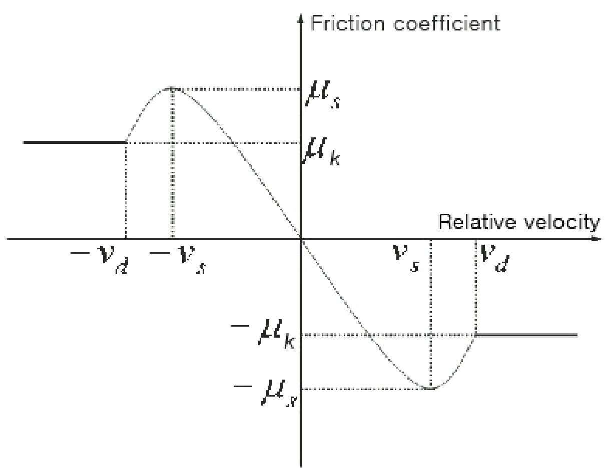


Fig. 2 Relations between relative velocity and friction coefficient employed in most commercial codes

촉 모델에서 제대로 된 접촉력이 작용하지 않게 된다는 것이다. 또한 $-v_d < v < -v_s$, $v_s < v < v_d$ 구간에서도 볼록한 형태의 함수를 사용함으로써 불연속으로 인한 수치적분 상의 문제점은 발생하지 않지만 자려진동 현상은 나타낼 수 없다.

그러나 제안한 방법은 이러한 문제점을 극복하기위해 임의의 두 물체가 접촉이 일어날 때 힘의 불연속이 없고, 접촉 시 힘의 방향 변화가 급격하게 일어나는 쿨롱 마찰을 잘 표현하기 위해 새로운 마찰계수 함수를 정의하고, 사용하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 각각의 데이터들을 직접 받는 것이 아니라 몇 가지 변수를 제안한 마찰계수 함수에 적용시켜 함수 자체를 사용하게 된다. 이렇게 제안된 마찰계수 함수는 기존의 프로그램과는 달리 v_d 값이 사용되지 않으며, v_s 값과 근접한 왼쪽과 오른쪽 구간에서 형태도 달라지게 된다.

3. 모델링 예제

3.1 제안된 마찰 모델과 자려진동과의 관계

Fig. 3 은 일정 속도 v 로 움직이는 벨트 위에 스프링 k 가 연결된 질량 m 이 놓여져 있는 시스템[6] 이다. 이 때 질량 m 의 x 방향 변위를 보고자 한다.

이 시스템에서 질량 m 이 왼쪽과 오른쪽으로 움직일 때 벨트와의 상대속도가 변하게 된다. 그리고, Fig. 1 의 상대속도에 대한 마찰계수 함수를 보았을 때 $v < -v_s$, $v > v_s$ 구간에서 상대속도에 따라 마찰계수 값이 급격하게 변화하는 것을 알 수 있다.

따라서, 이 시스템에서 질량 m 의 벨트와의 상대속도가 질량 m 이 왼쪽으로 움직일 때보다 오른쪽으로 움직일 때 더 작기 때문에 Fig. 1 의 마찰계수 함수 그래프에서 확인할 수 있듯이 이 때의 상대속도가 $v < -v_s$ 구간에 있다면, 마찰계수 값이 더 커지게 된다. 이 때, 벨트와 질량 m 사이의 상대속도가 마찰계수 값이 급격하게 변하는 구간에 있게 되면, 마찰계수 값이 더 커진다는 것은 마찰력이 더 커진다는 것과 같으므로 질량 m 이 오른쪽으로 움직일 때 더 큰 힘을 받아 자려진동 현상이 발생하게 된다. 하지만, Fig. 2 의 상용 프로램에서 사용하고 있는 마찰계수 함수는 이런 점을 고려하지 않았고, $-v_d < v < -v_s$, $v_s < v < v_d$ 구간의 형태도 자려진동의 현상을 구현하는데 적합하지 않는 것을 알 수 있다.

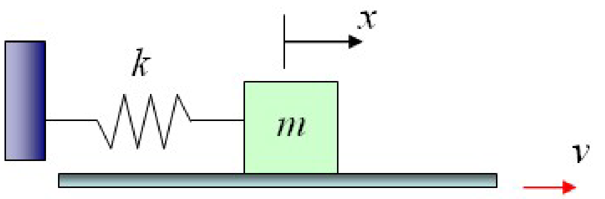


Fig. 3 Spring-mass system on moving belt $(k = 200(N/m),\ m = 10(kg))$

Fig. 4 는 Table 1 의 데이터를 이용하여 상용 프로그램과 본 논문에서 제안하고 있는 마찰계수 함수를 이용하여 비교해 본 결과이다. 여기서 제안하고 있는 마찰계수 함수를 사용하였을 경우 진폭이 증가하는 자려진동 현상이 나타나는 것을 확인할 수 있다.

3.2 마찰계수 함수의 a 값에 따른 경향

앞장에서 설명하였듯이 상대속도에 따라 질량 m 이 받는 마찰력이 다르다. 이는 같은 상대속도 차이라 하더라도 마찰계수 함수의 형태에 따라 받는 마찰력의 차이가 생길 수 있다는 것이다.

제안된 마찰계수 함수에서 자려진동 현상이 일어날 수 있는 $v < -v_s$, $v > v_s$ 구간에서 함수 형태에 변화를 주기 위해서는 변수 a 의 값을 변화시켜야 한다. Fig. 5 는 변수 a 값의 변화에 따라 $v < -v_s$ 구간에서 어떻게 변하는지를 확대해서 나타낸 그래프이다. 이 마찰계수 함수는 대칭이므로

Table 1 Input parameters

$\mu_s = 0.35,\ \ \mu_k = 0.3,\ \ v_s = 0.01,\ \ v = 1(m/s)$	
RecurDyn	$v_d = 0.15(m/s)$
Proposed	$\beta = 1/3,\ \ a = 1.5$

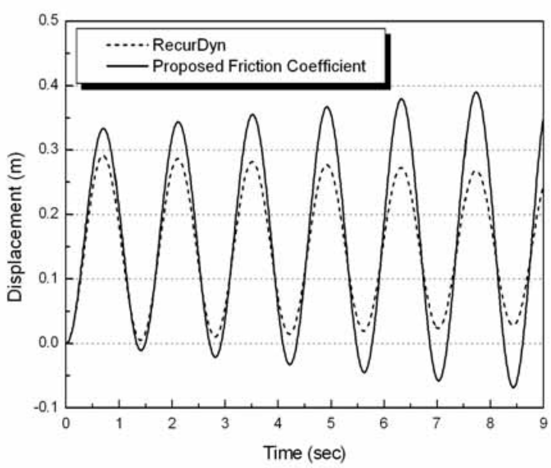


Fig. 4 Comparison of RecurDyn and proposed friction coefficient.

$v > v_s$ 의 구간에서도 같은 형태가 나타난다. 마찰계수 함수의 변수들은 Table 1 의 Proposed 값을 사용하였다. 이 그래프에서 a 값이 커지면서 상대속도가 0 에 가까운 부분에서 마찰계수의 차이가 커지는 것을 확인할 수 있다. 이렇게 차이가 큰 구간에서 동일한 상대속도 구간이라도 마찰계수의 차이가 더 커지므로 자려진동 발생 가능성이 더 커진다. Fig. 6 은 세가지 임의의 a 값을 사용한 마찰계수 함수를 이용하여 시뮬레이션 한 결과이다. 여기서, Fig. 5 를 참고하여 $a = 1.1, 1.5$를 비교해볼 때는 동일한 상대속도 구간이더라도 상대속도에 따른 마찰계수 값의 차이가 작아서 자려진동 현상이 발생하지 않는 것을 알 수 있고, $a = 1.5,\ 4.5$를 비교해볼 때는 동일한 상대속도 구간에서 상대속도의 차이가 크더라도 마찰력의 크기가 작기 때문에 일정 시간이 지난 후에는 진폭이 더 이상 증가하지 않는 것을 확인할 수 있다.

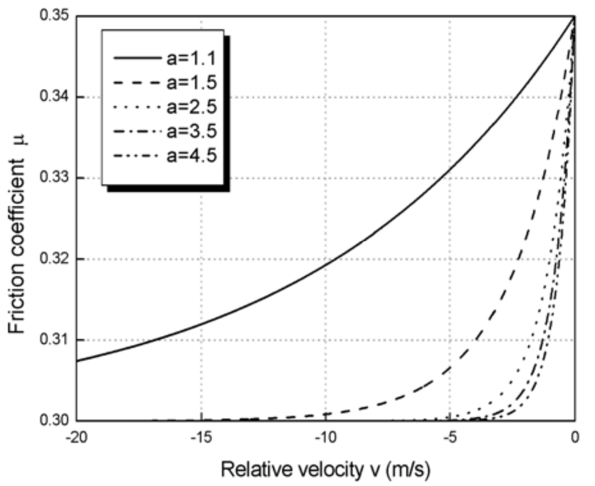


Fig. 5 Shape of the proposed friction coefficient function with a parameters.
$(v_s = 0.01(m/s),\ \mu_s = 0.35,\ \mu_k = 0.3)$

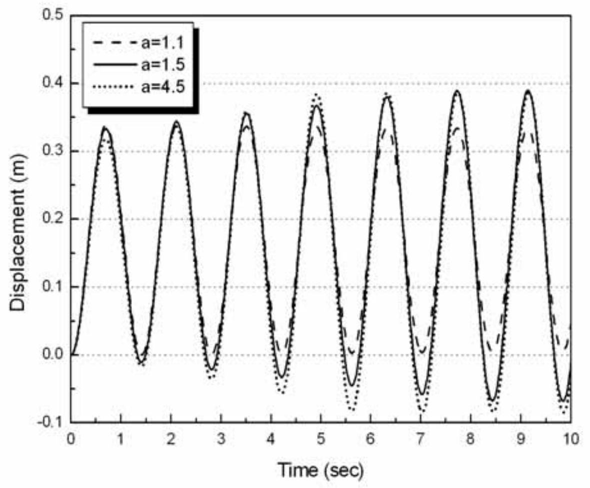


Fig. 6 Comparison of a parameters.
$(v_s = 0.01(m/s),\ \mu_s = 0.35,\ \mu_k = 0.3)$

3.3 시스템의 변수에 따른 결과

Fig. 3 의 시스템의 변수는 $v,\ \mu_s,\ \mu_k,\ \omega_n$ 이다. 여기서 사용된 제안된 마찰계수 함수는 Table 1 의 Proposed 값으로 사용하였고, 각 변수의 변화에 따라 자려진동 현상에 어떠한 차이가 생기는지 확인하려고 한다.

Fig. 7 는 벨트의 속도 변화에 따른 자려진동 현상을 나타낸 그래프이다. $0.98 \le v \le 2.9(m/s)$ 의 벨트 속도 범위에서 자려진동 현상을 확인할 수 있었으며, 벨트 속도가 $v = 1.01(m/s)$ 일 때 가장 큰 진폭과 증가를 나타내는 것을 확인할 수 있었다. 벨트 속도가 $v = 2.9(m/s)$ 일 때는 가장 작은 진폭과 증가를 보이고 있다. 이 그래프에서 벨트의 속도가 자려진동 현상에 영향을 미치는 것을 알 수 있고, 특정한 속도 구간에서 자려진동 현상이 일어난다고 할 수 있다. 속도가 $v < 0.98(m/s)$, $v > 2.9(m/s)$ 범위에서는 진폭이 일정하다거나 줄어드는 것을 확인하였다.

Fig. 8 은 정적 마찰계수의 변화에 따른 그래프이다. 동적 마찰계수를 $\mu_k = 0.3$ 으로 고정시키고, 정적 마찰계수를 변화시키면 Fig. 8 과 같이 특정한 정적 마찰계수 범위 안에서 자려진동 현상이 나타나는 것을 확인할 수 있다. 하지만, 정적 마찰계수 값이 $\mu_s < 0.33,\ \mu_s > 0.35$ 경우에 진폭이 일정하다거나 줄어드는 것을 확인하였다.

Fig. 9 는 동적 마찰계수의 변화에 따른 그래프이다. 정적 마찰계수를 $\mu_s = 0.35$ 으로 고정시키고, 동적 마찰계수를 변화시키면 정적 마찰계수를 변

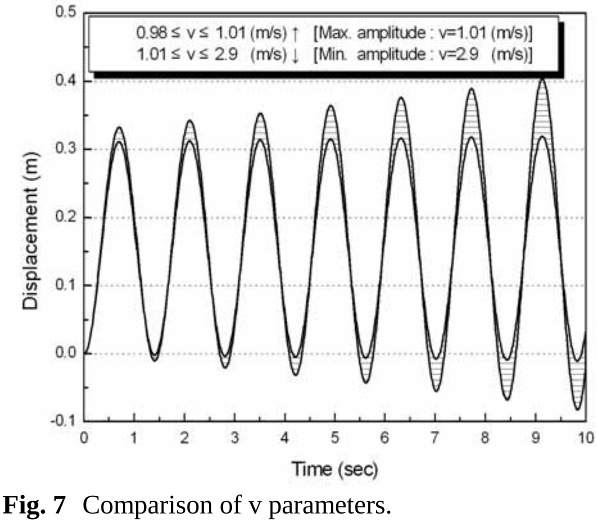


Fig. 7 Comparison of v parameters.

화시켰을 때와 마찬가지로 특정한 동적 마찰계수 범위에서 자려진동 현상이 발생한다. 이 그래프에서도 마찬가지로 동적 마찰계수 값이 $\mu_k < 0.3$, $\mu_k > 0.32$ 경우 진폭이 일정하다거나 줄어드는 것을 확인하였다. Fig. 8, 9 의 결과에서 정적 마찰계수와 동적 마찰계수 차이가 $0.03 \le \mu_s - \mu_k \le 0.05$ 일 때 자려진동 현상이 일어난다는 것을 알 수 있다.

다음은 동적 마찰력이 작용하는 이 시스템의 운동방정식이다.

$$\ddot{x} + \omega_n x = \mu_k g \tag{5}$$

여기서, ω_n 의 변화에 따른 결과를 보고자 한다. Fig. 10(a),(b)는 ω_n 의 변화에 따른 비교 그래프이다. ω_n 이 증가함으로써 주기가 짧아지고, 같은 ω_n 이더라도 m 과 k 의 값이 다를 수 있으며, 그 결과 역시 차이가 나는 것을 확인할 수 있다. Fig.10(a)는 질량을 $m = 10(kg)$ 으로 고정시키고 k 값의 변화에 따른 결과 비교이고, Fig.10(b)는 스프링 상수를 $k = 200(N/m)$ 으로 고정시키고 m 값을 변화시키면서 비교한 그래프이다. 여기서, k 값이 증가할수록 진폭은 감소하였고, 같은 $\omega_n = 5(rad/s)$ 에서 확인할 수 있듯이 m 과 k 값에 따라서 자려진동 현상이 일어나는 경우도 있고, 그렇지 않은 경우도 발생한다. $\omega_n = 7(rad/s)$ 이상의 값을 가질 때에 m 과 k 값에 관계없이 진폭이 일정하다거나 줄어들고, $\omega_n = 3(rad/s)$ 보다 작은 값을 가질 때 역시 m 과 k 값에 관계 없이 진폭이 일정하다거나 줄어드는 것을 확인하였다. 이것은 자려진동에 원인이 되는 스프링의 힘과 질량 m 과 벨트 사이의 마찰력이 각각 k 와 m 값의 영향을 받기 때문이라는 것을 알 수 있다.

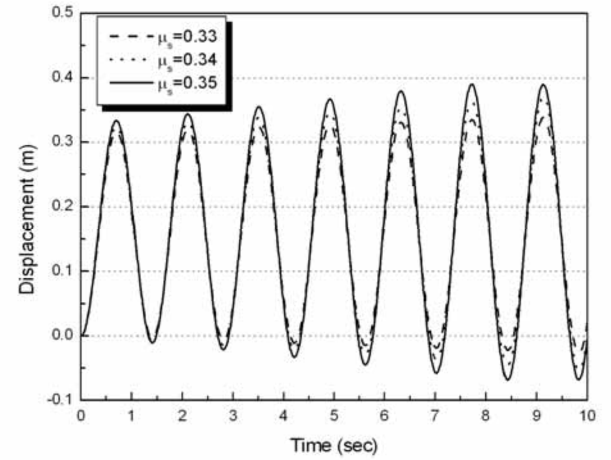


Fig. 8 Comparison of μ_s parameters. $(\mu_k = 0.3)$

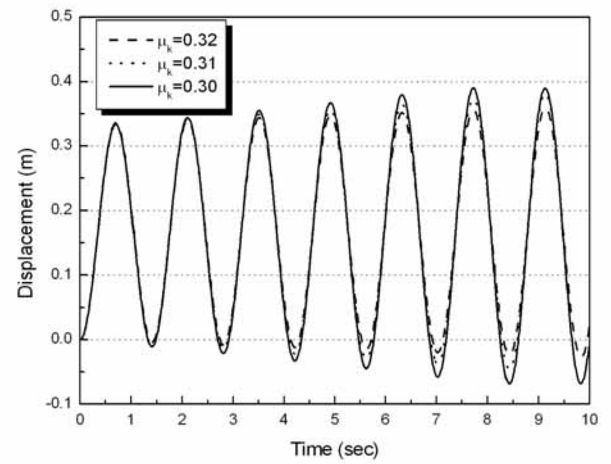
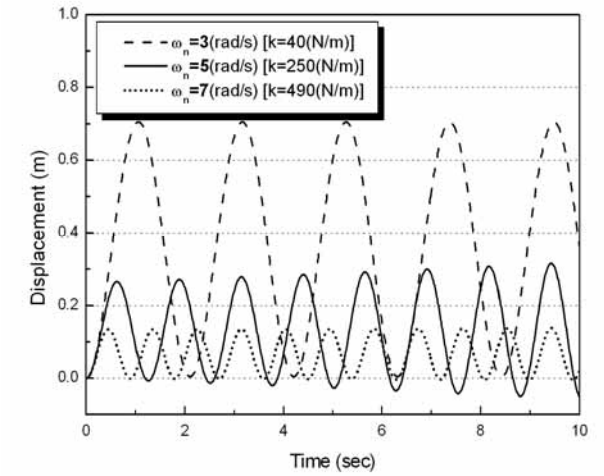
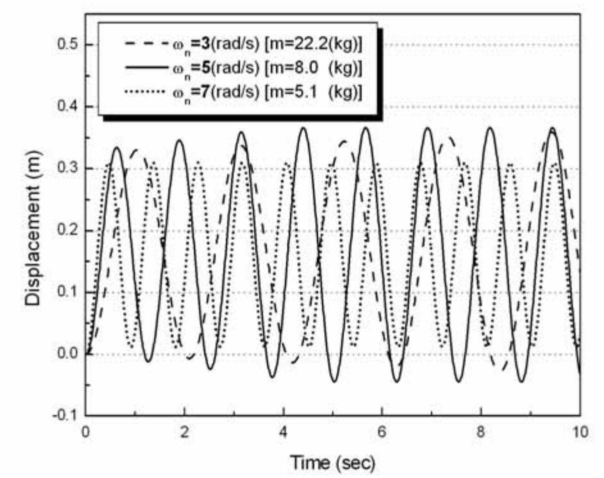


Fig. 9 Comparison of μ_k parameters. $(\mu_s = 0.35)$



(a) $m = 10(kg)$



(b) $k = 200(N/m)$

Fig. 10 Variation of displacement with different ω_n

4. 결 론

본 연구에서는 자려진동 현상을 구현할 수 있는 마찰 모델링을 제시하였다. 이 방법은 현재 다물체 동역학 해석 프로그램의 방법과는 달리 μ_s, μ_k, v_s 의 변수를 이용하여 새로운 마찰계수 함수를 제안하였고, 제안한 마찰계수 함수가 어떻게 자려진동 현상을 구현할 수 있는가에 대한 논의와 마찰계수 함수의 형태가 변함에 따라 시스템의 응답 또한 변한다는 것을 확인하였다. 또한, 이 마찰계수 함수를 이용하여 제시한 예제를 통해 어떠한 시스템의 변수들이 자려진동 현상에 영향을 미치는가를 살펴보았다. 그 결과 특정한 벨트 속도 범위에서 자려진동 현상이 잘 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 그리고, 정적 마찰계수와 동적 마찰계수 둘 다 어느 특정한 범위에서 자려진동 현상을 보였으며, 이 두 값의 차이 또한 영향을 미치는 것을 알 수 있었다. 마지막으로 ω_n 의 변화에 따른 응답을 비교해 본 결과 같은 ω_n 에서도 m 과 k 값에 따라서 다른 결과를 보여주었으며, ω_n 역시 어느 특정한 범위에서 자려진동 현상이 나타나는 것을 확인하였다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Jung Hun Park, Hong Hee Yoo and Yoha Hwang, 2000, “Multibody Dynamic Analysis for Contacting Rigid Bodies”, Trans. of the KSME(A), Vol. 24. No. 2, pp. 411~420.

(2) Jung Hun Park, Hong Hee Yoo and Yoha Hwang, 1999, “Dynamic Analysis of constrained Multibody Systems using Partial Velocity Matrix”, Trans. of the KSME(A), Vol. 23. No. 5, pp. 861~870.

(3) Mark Denny, 2004, “ Stick-slip motion: and important example of self-excited oscillation”, Eur. J. Phys. 25 (2004) 311-322.

(4) Yong Li, Z.C. Feng, 2004, “Bifurcation and chaos in friction-induced vibration”, Communications in Nomlinear Science and Numerical Simulation 9 (2004) 633-647.

(5) RecurDyn manual (version6.2), 2005

(6) William T. Thomson, 1998, “Theory of Vibration with Applications”, Volumn Ⅳ, Prentice Hall.