

사장교 케이블의 감쇠성능 향상을 위한 댐퍼의 비선형성 연구

Study of the non-linearity of cable damper to enhance damping performance of stay cable

서주원† · 고현무*
Ju Won Seo, Hyun Moo Koh

Key Words : Cable damper, Nonlinear damper, Multi-mode optimum design

ABSTRACT

This study offers a design procedure of optimum cable damper for multi-mode vibration control with nonlinear damper and also investigate the relation between mode and amplitude dependency. The proposed multi-mode damping index, which is defined as a energy loss ratio of cable potential, is a main component of optimization problem of optimum nonlinear damper. In order to include the amplitude dependency of nonlinear damper, it is assumed to exist three kinds of multi-mode patterns such as ambient vibration, support excitation and rain-wind induced vibration. The optimum damper exponent depends on amplitude patterns. In case of ambient vibration, optimum factor is less than 0.5. In case of support excitation or rain-wind induced vibration is between 0.5 and 1.0. In this study, the effects of cable sag and inclination angle are included in the asymptotic design equation of damped cable structures.

기 호 설 명

J_m	: 다중모드 성능향상 지수
$U_{\tau,p}$: 케이블 포텐셜 에너지
Y_n	: 케이블의 모드별 최대 진폭
c_d	: 감쇠계수 (damping coefficient)
Γ_m	: m차 모드까지 고려한 최적댐퍼승수 목적함수
Θ_{cn}	: 클램핑 비 (clamping ratio)
γ_n	: 모드별 감쇠성능지표
η	: 댐퍼승수 (damper exponent)

1. 서 론

케이블의 감쇠성능은 케이블의 구조재료 특성에 의한 구조감쇠로서 재료감쇠와 마찰감쇠, 케이블 표면과 바람의 특성

에 의한 공기역학적 감쇠 및 부가적인 외부 설치 댐퍼에 의한 감쇠로 구분될 수 있다. 케이블 댐퍼는 케이블의 정착구 근처에 설치되어 에너지 소산작용으로 케이블의 감쇠성능을 증가시키는 장치로서 댐퍼의 동적응답특성에 따라 선형댐퍼(linear damper), 비선형댐퍼(nonlinear damper)로 구분된다. 선형 댐퍼는 댐퍼의 복원력이 운동속도와 비례하는 것으로 댐퍼가 설치된 위치에서의 케이블 변위에 관계없이 일정한 감쇠성능을 나타내나, 특정한 모드에 최대성능을 발휘하기 때문에 다른 모드의 진동에는 감쇠성능이 급격히 줄어들게 된다. 반면 비선형 댐퍼는 운동속도와 복원력의 관계가 비선형적인 댐퍼로, 댐퍼의 감쇠성능이 진동모드와 댐퍼변위에 의존적이며 특정한 경우 선형댐퍼 보다 효과적인 성능을 나타낼 수 있다.

본 논문에서는 사장교 케이블의 감쇠성능 향상을 위하여, 다중 모드에 대하여 효과적 진동저감이 가능한 최적의 비선형 댐퍼를 선정하는 절차를 제시하고 이러한 효과를 반영한 성능향상 지수를 제시하고자 한다. 즉, 기존의 선형댐퍼를 케이블에 적용할 경우 특정한 모드에 대해서만 최대의 감쇠효율을 나타내기 때문에 이를 개선하기 위해서 비선형 댐퍼를 적용할 필요가 있다. 또한, 비선형 댐퍼는 특정한 댐퍼승수에 대하여 모드별 의존성은 감소하나, 변위에 대한 의존성이 증가하여 특정한 경우 감쇠성능이 급감하기도 하기 때문에 최적의 댐퍼를 선정하는 구체적인 최적화 과정이 필요하다.

† 현대건설 기술개발원 책임연구원

E-mail : jwseo@hdec.co.kr

Tel : (031) 280-7088, Fax : (031) 280-7061

* 서울대학교 지구환경시스템공학부 교수

2. 비선형 케이블댐퍼의 모드-변위 의존성

2.1 비선형 댐퍼의 동적해석 모델

(1) 비선형 댐퍼의 종류

댐퍼는 외력에 대해 이력거동을 통하여 운동에너지를 열에너지 또는 소성에너지로 변환시키는 장치이다. 사용재료의 특성에 따라 점성, 점탄성 및 탄소성 댐퍼로 구분되며, 기계적인 구조에 따라 다양한 응답특성을 가진다. 비선형 댐퍼는 댐퍼의 감쇠력이 감쇠계수와 케이블 운동속도에 비선형적으로 비례하는 댐퍼이다. 이러한 댐퍼로는 가변형 점성댐퍼, 마찰형 댐퍼, MR댐퍼 등이 포함된다(Spencer Fujino 등 1996). 최근에는 마찰형 댐퍼의 마찰력을 MR유체의 전류량으로 조절하는 PZT 댐퍼가 제안되었다. 이러한 댐퍼의 비선형성은 댐퍼승수에 따라 그림 1과 같이 속도-감쇠력의 관계로 나타난다.

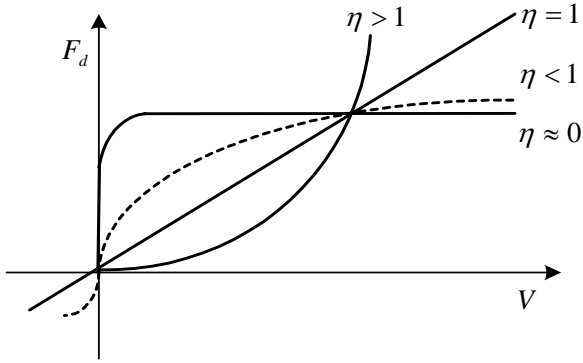


그림 1 댐퍼승수(η)에 대한 속도-감쇠력 관계

(2) 비선형 댐퍼의 선형화

비선형 댐퍼가 설치된 케이블-댐퍼 구조의 부가감쇠비와 댐퍼승수의 관계를 도출하기 위해 일반화된 비선형 댐퍼의 댐퍼력은 다음과 같다.

$$F_d(t) = H(y_d, \dot{y}_d) \dot{y}_d(t) \quad (1)$$

여기서 $y_d(t)$ 는 댐퍼가 설치된 지점($x = x_d$)에서 케이블에 대한 현의 수직방향 변위이며, $H(y_d, \dot{y}_d)$ 는 댐퍼의 전달함수이다. 비선형 점성댐퍼의 댐퍼력과 속도의 관계는 다음과 같다(Krenk 2005).

$$F_d(t) = c_d \text{sign}(\dot{y}_d) |\dot{y}_d(t)|^\eta, \quad H(y_d, \dot{y}_d) = c_d |\dot{y}_d(t)|^{\eta-1} \quad (2)$$

식 (2)의 비선형 점성댐퍼에 대하여, 댐퍼의 설계변위(Y_d)에 대하여, 댐퍼의 거동을 등가점성감쇠(Equivalent

viscous damping)로 표시함으로써 댐퍼력과 변위에 대한 관계식으로 나타낼 수 있다.

일정한 주기(T_n) 동안 댐퍼에 의해 감소된 에너지와 등가를 이루는 등가감쇠계수 (c_{eq})는 $F_d(t) \cong c_{eq} \dot{Y}_d$ 이며, 다음의 관계식을 만족한다.

$$\int_0^{T_n} F_d(t) \dot{y}_d(t) dt = \int_0^{T_n} c_{eq} \dot{y}_d(t)^2 dt \quad (3)$$

식(3)을 만족하는 c_{eq} 는 식(1), (2)를 이용하면 다음과 같다.

$$c_{eq} = \frac{\int_0^{T_n} H(y_d, \dot{y}_d) \dot{y}_d(t)^2 dt}{\int_0^{T_n} \dot{y}_d(t)^2 dt} = \frac{\int_0^{T_n} c_d |\dot{y}_d|^{\eta-1} \dot{y}_d(t)^2 dt}{\int_0^{T_n} \dot{y}_d(t)^2 dt} \quad (4)$$

이때, 댐퍼의 변위(y_d)를 설계변위(Y_d)에 대하여 $y_d = Y_d \sin(\omega t + \Phi)$ 로 가정하면 식(4)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_{eq} &= \frac{c_d (Y_d \omega)^{\eta-1} \int_0^{T_n} \cos^{\eta+1}(\omega t + \Phi) dt}{\int_0^{T_n} \cos^2(\omega t + \Phi) dt} \quad (5) \\ &= \frac{c_d (Y_d \omega)^{\eta-1}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}\right)}} = c_d (Y_d \omega)^{\eta-1} g(\eta) \end{aligned}$$

따라서, 식(1)과 (5)로부터 비선형 점성댐퍼의 댐퍼력을 등가감쇠계수와 설계변위로 나타내면 다음과 같다.

$$F_d = c_d \omega^\eta Y_d^\eta / g(\eta) \quad (6)$$

(3) 비선형 케이블-댐퍼 구조의 동적해석 모델

비선형 댐퍼가 설치된 케이블의 모드와 감쇠특성을 나타내는 진동수 방정식을, 선형 댐퍼의 경우와 같이 댐퍼 위치에서의 케이블의 작용력(F_T)과 댐퍼력(F_d)의 평형조건을 이용하여 구한다.

$$F_T(t) = F_d(t) \quad (7)$$

$$T \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_d^+} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_d^-} \right) = c_d \frac{\omega^\eta y_d^\eta}{g(\eta)} \quad (8)$$

진동수 방정식의 해를 초월함수 형태에서 반복적으로 해를

구하기 용이한 점근해로 나타내면 다음과 같다(서주원 2006).

$$\tan(\beta'_n L) = \frac{i\mu \sin^2(\beta'_n x_d) \frac{F_d/y_d}{\beta T}}{1 + i\mu \cos(\beta'_n x_d) \sin(\beta'_n x_d) \frac{F_d/y_d}{\beta T}} \quad (9)$$

$$\beta'_n = n \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$\tan(\beta'_n L) \simeq \Delta \beta'_n L, \quad \Delta \beta'_n = \beta'_n - \beta_n^0, \quad x_d/L \ll 1 \quad (11)$$

식 (9)를 무차원 감쇠계수(κ_n)의 점근식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta \beta'_n}{\Delta \beta_n^0} = \frac{n\kappa_n}{1 + n\kappa_n} \quad (12)$$

$$\kappa_n = \frac{c_d}{m(L\omega_{01})^{2-\eta}} \left(\frac{x_d}{L}\right)^\eta \left(\frac{y_d}{L}\right)^{\eta-1} n^{2\eta-1} \quad (13)$$

선형 댐퍼에서의 클램핑 비와 최대 부가감쇠 성능을 나타내는 감쇠계수의 관계는(Main 2001) 비선형 점성댐퍼에서도 물리적으로 동일한 의미를 나타낸다. 즉, 댐퍼에 의한 고유진동수의 변화를 클램핑 비로 나타낼 수 있으며, 선형댐퍼와 같이 클램핑 비가 0.5일 경우 최대 부가감쇠비가 된다.

$$\frac{\xi_n}{\alpha} \simeq \sqrt{\Theta_{cn}(1 - \Theta_{cn})} \quad (14)$$

$$\kappa_n \simeq \frac{g(\eta)}{\pi^{\eta+1}} \sqrt{\frac{\Theta_{cn}}{(1 - \Theta_{cn})^\eta}} \quad (15)$$

따라서 비선형 댐퍼의 설치 위치($\alpha = x_d/L$)에서의 최대 부가감쇠비를 나타내는 무차원 감쇠계수는 $\Theta_{cn} = 1/2$ 일 경우 최적이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\kappa_{n,opt} = \frac{(\sqrt{2})^{\eta-1}}{\pi^{\eta+1}} g(\eta) \quad (16)$$

$$c_{d,opt} = m(L\omega_{01})^{2-\eta} \left(\frac{x_d}{L}\right)^{-\eta} \left(\frac{Y_d}{L}\right)^{1-\eta} n^{1-2\eta} \kappa_{n,opt} \quad (17)$$

또한, 댐퍼의 최적 감쇠계수는 식 (17)과 같다. 즉, n 차 모드의 설계변위(Y_d)에 대한 최적 감쇠계수를 산정할 수 있다. 이때, $\eta = 0.5$ 인 Square Root 댐퍼일 경우 위의 식에서 모드(n)에 관계없이 동일한 감쇠특성을 나타내게 된다. 부가감쇠비와 무차원 감쇠계수의 관계는 식 (14)와 (15)를

이용하여 클램핑 비(Θ_{cn})을 소거하면 식 (18)과 같다.

$$\frac{\xi_n}{\alpha} = \frac{\pi^{\eta+1} \kappa_n / g(\eta)}{\left\{1 + [\pi^{\eta+1} \kappa_n / g(\eta)]^{\frac{4}{\eta+1}} \left[\frac{\xi_n}{\alpha}\right]^{2(\eta^2-1)}\right\}^{\frac{\eta+1}{2}}} \quad (18)$$

그림 2는 댐퍼승수별 무차원 감쇠계수(κ_n)에 대한 부가감쇠비(ξ_n/α)의 그래프이다. $\eta = 1$ 인 선형댐퍼의 경우 $\kappa_n = 0.1$ 에서 최대 부가감쇠비를 나타낸다. 댐퍼승수가 ($\eta < 1$)인 경우 최대 부가감쇠비를 나타낼 수 있는 무차원 감쇠계수가 0.1보다 감소하며 댐퍼승수가 ($\eta > 1$)인 경우 증가한다. 즉, 댐퍼승수가 1보다 작아질 경우 최대 감쇠성능을 나타내는 댐퍼의 감쇠계수(c_d)가 감소하며 이것은 댐퍼에 작용하는 댐퍼력이 감소함을 의미한다.

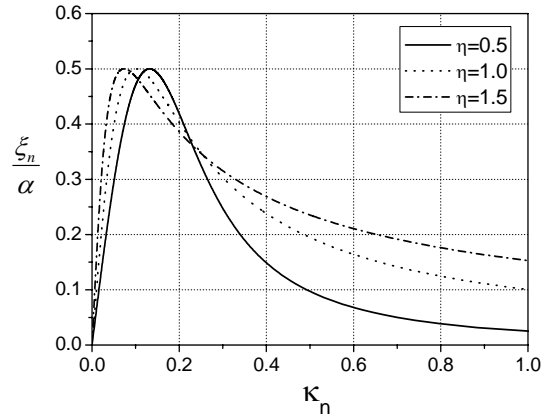


그림 2 댐퍼승수별 최대부가감쇠비

2.2 댐퍼승수에 따른 모드-변위 의존성

(1) 댐퍼승수에 따른 응답특성

특정 모드에 대해서만 최적의 감쇠성능을 가지는 선형댐퍼와 달리 비선형 댐퍼는 댐퍼승수(damper exponent)가 변화함에 따라 모드별 의존성이나 변위 의존적 특성이 달라진다. 비선형 댐퍼를 선형화하여 설계변위(Y_d)와 댐퍼승수(η)로 나타내고, 최적감쇠비와 클램핑비의 관계식으로 나타냄으로써 변위와 모드 의존성 관계는 식 (16)~(18)의 최적조건을 적용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다(Main 2001).

$$\left(\frac{y_d}{Y_{d,opt}}\right)^{\eta-1} \left(\frac{n}{n_{opt}}\right)^{2\eta-1} \simeq (\sqrt{2})^{1-\eta} \sqrt{\frac{\Theta_{cn}}{(1 - \Theta_{cn})^\eta}} \quad (19)$$

식 (19)는 비선형 댐퍼를 이용하여 특정한 설계모드(n_{opt})와 최적의 설계변위($Y_{d,opt}$)에 대해 설계된 케이블-댐퍼 구

조의 감쇠성능이, 특정한 댐퍼변위(y_d)나 특정한 모드(n)일 경우의 감쇠성능과의 관계를 나타낸다. 댐퍼승수 $\eta = 1$ 인 경우에는 변위 의존성이 사라지며, $\eta \neq 1$ 인 경우에는 변위에 따라 감쇠성능이 달라지는 변위 의존적 특성을 갖는다. 또한 댐퍼승수가 0.5인 Square Root Damper의 경우에는 모드 의존성이 사라지게 된다.

(2)비선형 댐퍼의 모드변위 민감도

식 (19)에서 선형댐퍼($\eta = 1$)나 제곱근 댐퍼($\eta = 0.5$)이외의 비선형 댐퍼는 모드와 변위의 의존성이 동시에 나타난다. 댐퍼승수(η)의 변화에 따른 모드와 변위의 의존적 특성은 단조 증감하지 않고 댐퍼승수의 구간별로 다르게 나타난다. 이러한 의존적 특성을 분석하기 위해서 댐퍼승수를 마찰댐퍼($\eta = 0$), 제곱근 댐퍼($\eta = 0.5$), 선형댐퍼($\eta = 1$)를 기준으로 구간별로 나누어 모드와 변위의 민감도를 분석하면 다음과 같다(서주원 2006).

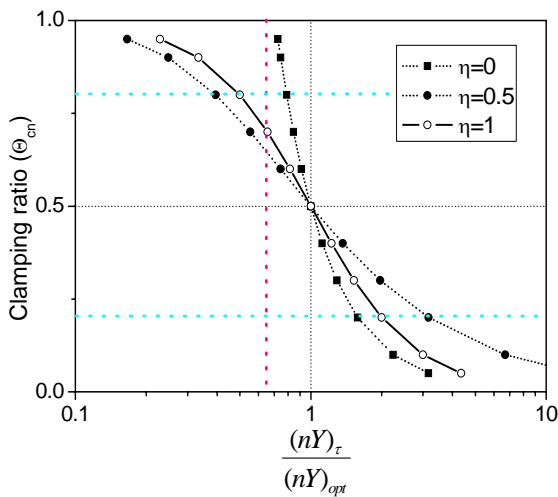


그림 3 댐퍼승수의 변화에 따른 모드-변위 민감도

그림 3은 식 (19)에서 특정한 댐퍼승수의 경우 모드-변위의 비와 클램핑 비의 관계를 나타낸 그래프이다. 비선형 점성 댐퍼의 경우 최적의 모드-변위비를 만족할 경우 클램핑비는 $\theta_{cn} = 1/2$ 를 만족하게 되며 이때 최대의 부가감쇠성능을 나타낸다. 그림 3에서 $\eta = 0.5$ 인 제곱근 댐퍼가 클램핑 비의 변화에 따른 민감도가 가장 작게 나타난다. 즉, 클램핑 비가 0.5보다 작은 구간에서 이를 만족하기 위한 모드-변위의 비가 제곱근 댐퍼가 가장 크고, 마찰댐퍼가 가장 작다. 이것은 반대로 제곱근 댐퍼가 상대적으로 모드-변위의 비가 크게 바뀌어도 클램핑 비가 동일하므로 감쇠성능에 미치는 민감도가 작음을 의미한다. 모드와 변위의 의존적 특성을 가진 비선형 댐퍼의 최적댐퍼

를 선정하기 위해서는 두가지 의존성을 동시에 고려해야 할 뿐만 아니라 모드별 최적변위의 변화를 함께 고려해야 한다. 표 1은 댐퍼승수 구간별로 모드와 변위의 의존성을 정리한 결과이다.

표 1 댐퍼승수 구간별 모드-변위 의존성

구분	$0 \leq \eta < 0.5$	$0.5 < \eta < 1$	$1 < \eta$
모드 의존성	모드 의존성 점감	모드 의존성 점증	모드 의존성 증가
변위 민감도	변위 민감도 감소	변위 민감도 감소	변위 민감도 증가
고차모드 최적변위	감소	증가	감소

댐퍼승수에 따른 모드 의존성은 $\eta = 0.5$ 에서 멀어질수록 증가하며, 특히 $\eta > 1$ 인 구간에서는 모드 의존성이 크게 증가하게 된다. 변위에 대한 민감도는 $\eta = 1$ 인 선형댐퍼의 경우 변위 의존성이 없으며, 댐퍼승수가 1에 가까워질수록 민감도는 작아진다. 댐퍼승수가 $0 < \eta < 1/2$ 구간일 경우 변위 의존적이나 케이블 모드가 증가함에 따라 모드별 최적 변위는 감소하기 때문에 상진동과 같은 진동에 유리하다. 반면에, $1/2 < \eta < 1$ 인 경우엔 고차모드에서 모드별 최적 변위는 상대적으로 증가하므로, 풍우진동과 같이 특정한 고차모드에서 더욱 큰 진폭이 발생하는 경우에는 효과적인 설계조건에 해당된다.

3. 다중모드 제어용 비선형댐퍼

3.1 케이블의 다중모드 진동제어의 필요성

케이블은 비지지 길이가 매우 긴 유연한 구조물로서 자체의 감쇠비가 매우 낮아서 풍하중, 차량하중에 의한 지점가진 등에 의한 진동에 취약하다.

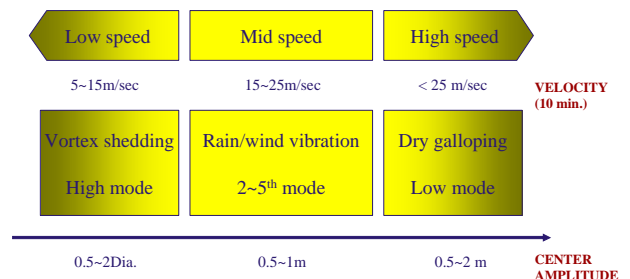


그림 4 풍하중에 의한 케이블의 다중모드 응답

특히, 풍하중 의한 풍속별 케이블의 응답은 그림 4와 같이 다양한 모드와 진폭의 진동이 발생하는 다중모드응답의 특

성을 가진다. 풍속별로 낮은 풍속에서는 케이블 단면 지름의 0.5~2배 범위 이내의 진폭으로 고차모드의 와류진동이 발생한다. 풍우를 동반한 일정한 풍속 이상의 조건에서는 큰 진폭의 풍우진동이 케이블의 2차에서 5차 이내의 모드에서 진동이 발생한다. 또한, 매우 고풍속에서 발산진동이 발생할 수 있는데, 이때는 큰 진폭의 진동이 저차모드로 발생하게 된다. 풍하중에 의한 케이블의 응답은 풍속이 증가함에 따라 케이블 진폭은 증가하지만, 진동모드와 최대 진폭과는 일정한 상관관계가 없기 때문에 다중모드에 대하여 효율적인 진동제어가 요구된다.

3.2 비선형 댐퍼를 이용한 다중모드 최적화

댐퍼의 특성을 나타내는 댐퍼승수(η)에 따라 다중모드에서의 감쇠효율과 변위에 대한 의존성이 달라진다. 선형댐퍼에서와 같이 설계모드인 1차 모드에 대하여 최적의 감쇠성능을 나타내도록 댐퍼의 용량을 결정해도 다른 모드와 변위로 케이블의 진동이 발생할 경우 감쇠성능이 변하게 된다. 따라서, 댐퍼승수를 변수로 하여 설계시 고려되는 다중모드의 범위에서 최적의 감쇠성능을 나타내는 최적화 문제를 구성할 수 있다(서주원 2006).

$$\text{Minimize } \Gamma_m = \sum_{n=1}^m w_n \cdot \gamma_n(\eta, \kappa(Y, n)) \quad (20)$$

$$\text{Constraint } 0 < \eta < 1.8, 0 < \kappa < 1, \gamma_n < 1$$

식 (20)에서 각 모드별 감쇠효율은 특정한 댐퍼승수에 대하여 모드와 변위에 대하여 의존적이다. 즉, 그림 3에 나타난 바와 같이 모드와 변위에 대하여 최적의 조건으로 단조 수렴하는 특성을 보인다. 따라서, 댐퍼승수별로 설계모드에 대하여 최적인 감쇠계수에 대하여 케이블이 시간이 경과함에 따라 진폭이 감소하면서 댐퍼의 감쇠성능도 달라지는 의존적 특성을 모두 반영하기 위하여, 댐퍼가 없는 케이블이 구조감쇠에 의하여 진동이 감소하는 시간영역응답에 하여 댐퍼에 의한 응답의 비를 나타내는 모드별 감쇠효율을 정할 필요가 있다.

또한, 비선형 댐퍼는 댐퍼승수에 따라 변위 의존적 특성이 다르게 나타나는데, 모드별 최대변위가 일정하지 않을 경우 감쇠성능평가지표가 왜곡될 수 있다. 즉, 식 (20)에서 가중함수를 실제 케이블의 모드별 진동현상을 고려하여 다중모드별 최대 변위의 관계를 나타낼 필요가 있다. 이와 같은 진동패턴으로 상시진동에 의한 다중모드 응답패턴과 지점가진에 의한 응답, 풍우진동에 의한 다중모드 응답으로 구분해서 최적화 문제를 구성하였다.

(1)케이블 모드별 감쇠성능지표

모드별 감쇠성능지표(γ_n)를 정의하기 위해서, 다중모드로 진동하는 케이블에 대하여 임의의 시간 τ 에서 n 차 모드에 대한 케이블의 변위 $y_n(x, \tau)$ 는 식 (21)과 같다.

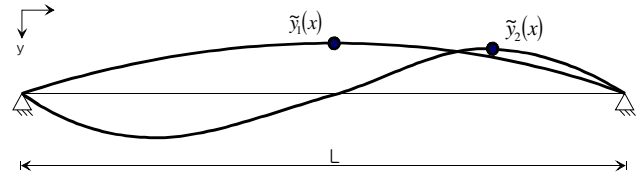


그림 5 케이블 진동모드와 모드별 에너지

$$y_n(x, \tau) = \tilde{y}_n(x) \cdot e^{-\xi_n \omega_n \tau} \quad (21)$$

여기서, $\tilde{y}_n(x)$ 은 n 차 모드의 형상함수이고, ω_n 과 ξ_n 은 각각 모드별 고유진동수와 감쇠비이다. 임의의 시점 τ 에서 각 모드별 케이블의 에너지(U_τ)는 식 (22)와 같이 케이블의 운동에너지($U_{\tau,k}$)와 포텐셜 에너지($U_{\tau,p}$)의 합으로 나타난다(Irvine 1981).

$$U_\tau = U_{\tau,k} + U_{\tau,p} \quad (22)$$

그림 5와 같이 진동하는 케이블이 최대 진폭에 이르는 시점에서 속도는 0이 되고, 케이블의 에너지는 식 (23)과 같이 모두 포텐셜 에너지로 전환된다.

$$U_\tau = U_{\tau,p} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 \int_0^L (\tilde{y}_n(x))^2 dx \quad (23)$$

감쇠시스템의 각 주기별 최대진폭은 댐퍼가 없는 케이블은 각 모드별로 케이블 자체의 구조감쇠에 의해 감쇠진동을 하게 되며, 댐퍼가 있는 케이블은 댐퍼에 의한 추가감쇠로 진폭이 빠르게 줄어든다. 이때 각 주기별 최대 진폭의 변화는 식 (24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_{n,j+1} = Y_{n,j} \cdot \exp(-2\pi\xi_n(\kappa)) \quad (24)$$

즉, 비선형 댐퍼에 의한 케이블의 감쇠성능은 식 (18)과 같고, 감쇠성능함수는 케이블의 무차원 감쇠계수(κ)로 표시되므로, 이것은 식 (13)에서 케이블의 모드와 변위에 의존적인 관계를 포함한다.

$$E_n = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} U_\tau d\tau = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l U_{n,p}, T_f = 2\pi l / \omega_n \quad (25)$$

전체 주기(T_f) 동안의 모드별 케이블의 포텐셜(E_n)은 식 (25)와 같다. 모드별 감쇠성능지표(γ_n)는 전체 주기(T_f) 동안의 감쇠시스템에 대한 비감쇠 구조의 모드별 포텐셜 비로 식 (26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\gamma_n = \frac{E_{n,damped}}{E_{n,undamped}} \quad (26)$$

$$E_{n,undamped} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \left\{ \frac{1}{2} \int m \omega_n^2 (Y_{n,ud}(x, \tau))^2 dx \right\} \quad (27)$$

$$E_{n,damped} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \left\{ \frac{1}{2} \int m \omega_n^2 (Y_{n,d}(x, \tau; \eta, \kappa))^2 dx \right\} \quad (28)$$

댐퍼가 없는 케이블은 자체의 구조감쇠(Structural damping)에 의해 진동이 감소하며, 식 (26)의 모드별 감쇠성능지표(γ_n)는 각 모드별로 댐퍼에 의한 부가감쇠와 케이블 자체의 구조감쇠에 의한 포텐셜 에너지의 비를 의미한다.

(2) 최적댐퍼승수 결정과 다중모드 성능지수

모드별 감쇠성능지표(γ_n)로 m 차 모드까지 포함한 다중모드에 최적의 감쇠성능을 나타내는 댐퍼승수(η)를 결정하는 문제는 다음 식 (29)와 같다.

$$\text{Minimize } \Gamma_m = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_n(\eta, \kappa(Y, n)) \quad (29)$$

각 모드별 감쇠성능지표(γ_n)는 식 (25)~(28)에 나타난 바와 같이 케이블-댐퍼 구조의 모드별 의존성과 감쇠성능의 변위 의존적 특성을 포함한다. 최적화 과정으로 선정된 비선형 댐퍼에 의한 다중모드 성능향상을 기존의 1차 모드에 대하여 설계된 선형댐퍼와 비교하여 다중모드에 최적인 댐퍼의 성능향상 지표를 나타낼 수 있다(서주원 2006).

$$J_m = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_m}{\Gamma_1} = \frac{\gamma_1 - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_n}{\gamma_1} \quad (30)$$

즉, 식 (30)은 1차 모드에 대하여 최적 설계된 댐퍼의 감쇠성능지표에 대하여, m 차 모드까지 고려된 댐퍼의 감쇠성능향상지수를 의미한다.

4. 케이블의 다중모드 진동과 최적댐퍼승수

4.1 케이블의 모드별 응답과 댐퍼의 변위의존성

비선형 댐퍼를 이용하여 케이블의 다중모드 진동제어를 고려할 경우, 댐퍼승수가 1인 선형댐퍼 이외의 경우에는 댐퍼

변위에 따라 감쇠성능이 변하게 된다. 특히, 비선형 점성댐퍼(Nonlinear viscous damper)는 댐퍼 자체의 강성이 존재하지 않으므로 케이블의 모드별 형상함수와 최대진폭에 따라 댐퍼의 변위가 결정된다.

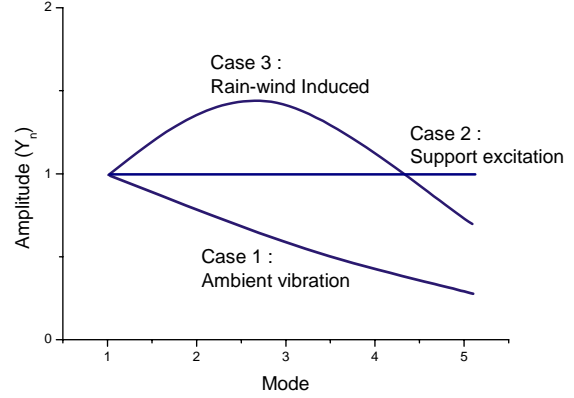


그림 6 케이블의 모드별 최대진폭

그림 6은 케이블의 진동 패턴에 따라 1차 모드에서 5차 모드까지의 최대 진폭의 변화를 나타낸 것이다. 즉, 케이블의 실제 진동현상을 상시진동(Ambient vibration), 지점가진(Support excitation), 풍우진동(Rain-wind induced vibration)으로 구분하여 각각의 모드별 최대 변위의 패턴을 나타낸다. 이러한 세가지 진동현상에 대하여 각각 가정한 근거를 살펴보고, 이에 기초하여 최적화 과정을 통해 각 현상별 최적 댐퍼승수를 구하는 과정을 제시했다. 또한 다중모드 제어의 효과를 성능향상 지수로 나타냈다.

4.2 상시진동에 의한 모드별 최대변위와 최적댐퍼승수

일반적으로 케이블의 모드별 진폭은 최저차 모드에서 변위가 크게 발생하고, 고차모드로 갈수록 최대변위가 작아지게 된다. 그림 7은 상시진동의 각 모드별 케이블의 최대 진폭과 댐퍼가 설치된 위치에서의 댐퍼변위의 관계를 나타낸다.

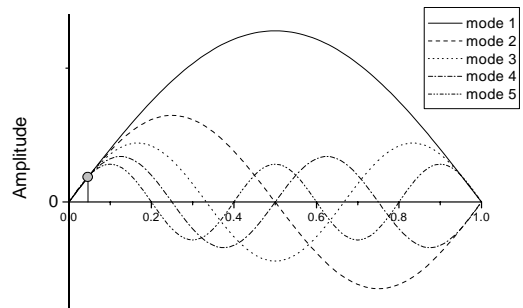


그림 7 상시진동시 모드별 케이블 진동(Case 1)

상시진동 패턴에 대한 최적의 댐퍼를 결정하기 위하여 각 모드별 감쇠성능지표(γ_n)를 구하고 이로부터 최적의 댐퍼승수를 구할 수 있다. 그림 8은 Case1-1의 경우 1차 모드에 대한 감쇠성능지표($\Gamma_1 (= \gamma_1)$)로 댐퍼승수가 0.1~1.5 구간에서 변할 때 1차 모드의 감쇠효율을 나타내고 있다.

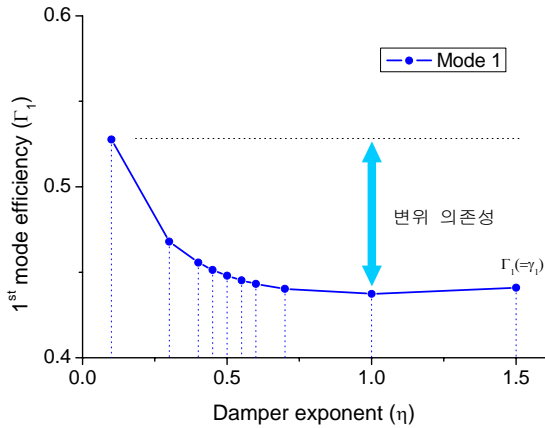
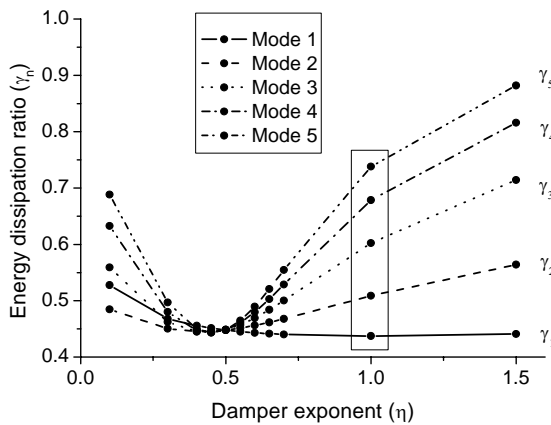


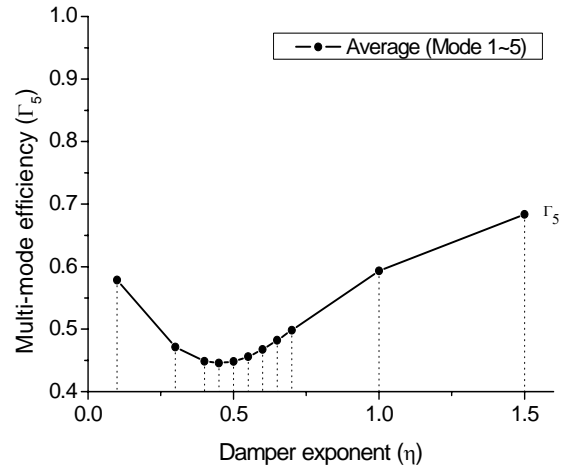
그림 8 상시진동시 1차 모드에 대한 댐퍼승수별 감쇠효율

그림 8에서 단일모드에 대한 최적의 감쇠효율은 댐퍼승수가 1.0인 선형댐퍼인 경우이다. 이것은 각각의 댐퍼승수에 대하여 최적의 감쇠계수를 구할 경우, 단일 모드에 대해서는 댐퍼의 변위 의존적 특성이 전혀 없는 선형댐퍼가 최적의 효율을 달성할 수 있음을 의미한다. 즉, 위의 그래프에서 댐퍼승수가 0.1인 경우와 1.0인 경우의 감쇠효율의 차이는 댐퍼의 변위 의존적 특성에 의한 감쇠성능의 차이이다.

그림 9의 (a)는 1~5차 모드별 감쇠성능지표(γ_n)를 나타내고 있다. 댐퍼승수가 1.0인 선형댐퍼의 경우 모드가 증가함에 따라 γ_n 이 증가하므로 효율이 감소한다. 댐퍼승수가 0.5인 제곱근 댐퍼(SQRT damper)는 모드별 의존성이 없기 때문에 각 모드별 감쇠효율이 동일한 것과 비교할 수 있다.



(a) 모드별 감쇠효율



(b) 최적 댐퍼승수

그림 9 상시진동시 다중모드에 대한 댐퍼승수별 감쇠효율

이상의 결과로부터 댐퍼의 모드별 변위가 크게 감소하는 경우, 댐퍼승수에 따른 다중모드 효율의 차이는 상대적으로 줄어든다. 즉, 선형댐퍼($\eta = 1.0$)나 마찰댐퍼($\eta \approx 0$)의 상대적인 성능의 차이는 적어진다. 이것은 기존의 케이블 댐퍼설계에서 설계 대상모드인 1차 모드의 진동이 주로 발생하고 고차모드의 상대적인 진폭은 미미한 경우, 선형댐퍼나 마찰댐퍼 어느 것이든 대상모드에 최적으로 설계된 경우 다중모드에 대한 효율의 차이는 무시할 수 있음을 의미한다.

4.3 지점가진시 모드별 최대변위와 최적댐퍼승수

사장교에서 주탑과 보강형의 케이블 정착구에서 발생하는 진동에 의한 지점가진의 패턴이 발생할 수 있다. 이것은 그림 10과 같이 풍하중이나 차량하중에 의해 보강형의 진동이 케이블에 전달되는 경우로, 지점가진의 고유진동수와 케이블의 고유진동수가 일치하는 공진(Resonance)과 일정한 정수 배로 가진되는 Parametric resonance로 구분될 수 있다.

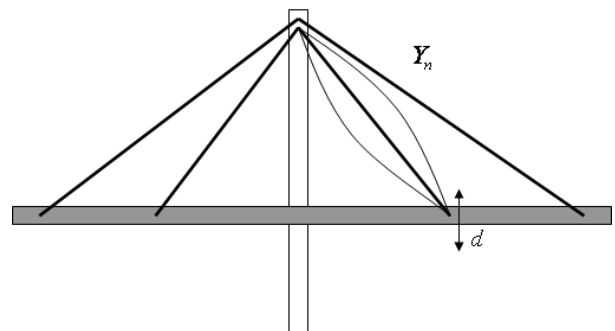


그림 10 보강형 진동에 의한 케이블 지점가진

보강형의 지점가진(Deck induced vibration)에 의한 케이블의 모드별 최대진폭은 식 (31)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_n(\omega) = \frac{2\omega^2 d \cdot H(\omega)}{\pi\omega_n^2} \quad (31)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\xi_n \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2}} \quad (32)$$

여기서, Y_n 은 케이블의 모드별 최대진폭, d 는 보강형의 가진진폭, ω_n 과 ω 는 각각 케이블의 모드별 고유진동수와 가진 진동수이며, $H(\omega)$ 는 지점가진에 의한 동적확대계수이다. 공진과 파라메트릭 공진에 의한 케이블의 최대 진폭은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_n = \frac{d}{\pi\xi_n} : resonance (\omega \approx \omega_n) \quad (33)$$

$$Y_n \cong \frac{2\sqrt{2dL}}{\pi} : parametric (\omega \approx 2\omega_n) \quad (34)$$

식 (33)과 (34)로부터 지점가진에 의한 케이블의 모드별 최대진폭은 모드에 관계없이 일정함을 알 수 있다.

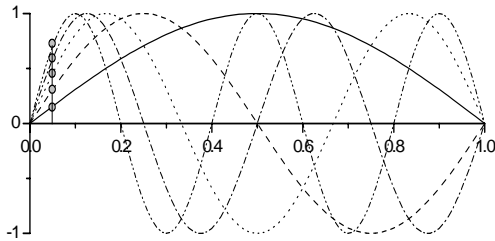
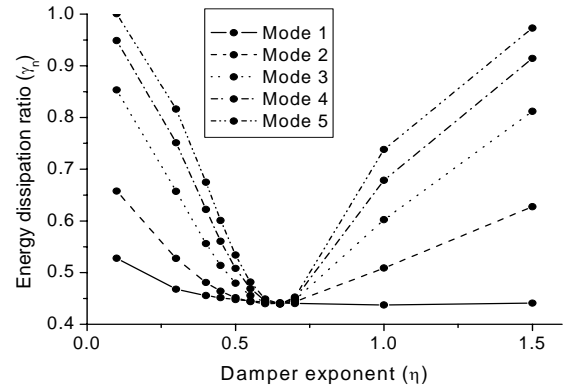
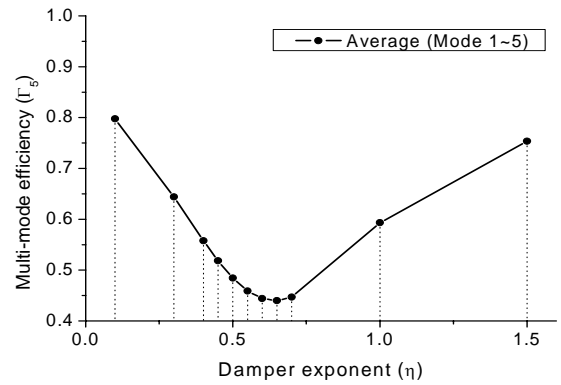


그림 11 지점가진시 모드별 케이블과 댐퍼변위

모드별 최대변위가 일정할 경우 댐퍼의 설치위치(α)에 따라 댐퍼의 모드별 최대변위는 증가한다. 그림 12는 지점가진시 모드별 감쇠성능 지표와 다중모드에 대한 최적 댐퍼승수와 감쇠효율로서, 최적의 댐퍼승수는 약 0.65로 이보다 댐퍼승수가 커지거나 작아지면 모드별 감쇠효율이 급격히 감소함을 알 수 있다. 특히, 댐퍼승수가 1.5와 0.3인 경우 5차 모드에서 감쇠효율이 1에 가까워지는데 이것은 댐퍼에 의한 감쇠가 전혀 이루어지지 않음을 의미한다. 즉, 댐퍼에 의한 클램핑 비(Θ_{cn})가 1.0이 되어 댐퍼가 고정단의 역할을 한다. 따라서 모드가 증가하면서 댐퍼의 최대변위가 증가하는 경우, 최적 변위가 고차 모드로 갈수록 증가하는 경우, 최적 변위가 고차 모드로 갈수록 증가하는 경우, 최적 변위가 고차 모드로 갈수록 증가하는 경우, 최적 변위가 고차 모드로 갈수록 증가하는 경우, 0.5 < η < 1.0인 구간에서 최적 댐퍼승수가 결정된다.



(a) 모드별 감쇠효율



(b) 최적 댐퍼승수

그림 12 지점가진시 다중모드에 대한 댐퍼승수별 감쇠효율

4.4 풍우진동시 모드별 최대변위와 최적댐퍼승수

풍우진동(Rain-wind induced vibration)은 비를 동반하는 일정한 풍속조건에서 케이블을 따라 흐르는 빗물에 의한 수로현상(Rivulet)으로 케이블 단면의 유효형상이 바뀌어 바람에 의해 조화진동이 나타나는 현상이다. 풍우진동은 일반적인 발산진동은 아니지만 대체로 3.0Hz 이하의 진동수 범위에서 2차에서 5차 이내의 모드로 0.25~1.0m의 상당히 큰 진폭의 진동이 발생하게 된다. 이러한 현상은 실제 관측사례와 모형케이블에 의한 실험결과가 제시되고 있다 (Matsumoto 1995).

다수의 관측사례와 모형케이블 실험으로부터 케이블의 진동은 고차모드로 갈수록 변위가 급격히 감소하지만, 풍우진동시 3.0Hz 인근에서 최대진폭이 2~3배로 급격히 증가한다. Main(2001)에 의하여 관측된 Fred Hartman 사장교의 사례에서도 5차 이내의 모드에서 케이블 진동이 발생하고 최대응답은 2~3차 모드에서 발생되었으며, 이로부터 다중모드 제어의 필요성과 선형댐퍼의 한계가 강조되었다.

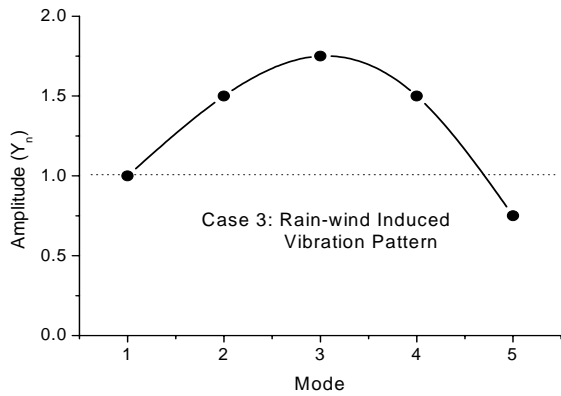
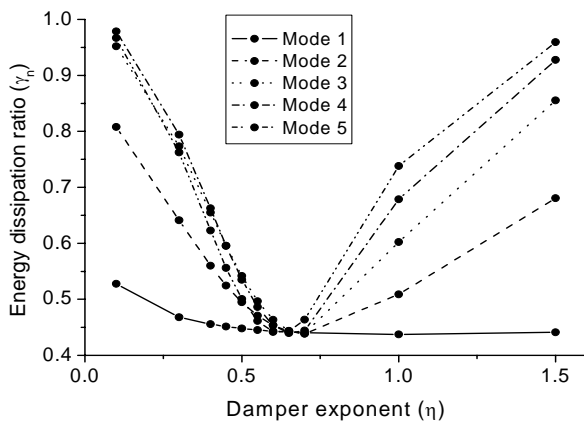
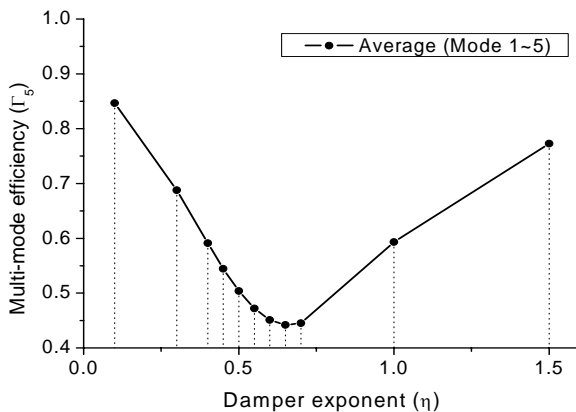


그림 13 풍우진동시 다중모드 케이블의 최대변위 패턴

그림 13과 같이 2~4차 모드에서 최대 변위가 발생하는 풍우진동을 가정하고, 이에 대한 모드별 감쇠효율과 최적 댐퍼승수를 산정하였다.



(a) 모드별 감쇠효율



(b) 최적 댐퍼승수

그림 14 풍우진동시 다중모드에 대한 댐퍼승수별 감쇠효율

풍우진동 패턴은 지점가진 패턴과 비교할 때 댐퍼의 변위가 고차모드로 갈 수 록 증가하는 것이 유사하기 때문에, 모드별 감쇠효율과 최적 댐퍼승수가 비슷한 결과가 도출되었다. 이때, 다중모드에 의한 성능향상지수(J_5)는 약 25% 개선됨을 알 수 있다.

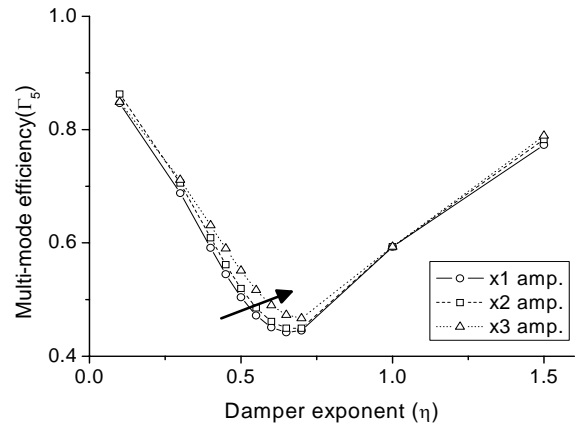


그림 15 풍우진동시 상대진폭 변화에 따른 최적 댐퍼승수

그림 15는 풍우진동시 상대진폭이 더 증가하는 경우(1~3배)의 최적댐퍼승수와 다중모드 감쇠효율의 변화로서, 최적 댐퍼승수는 점차 증가하게 되며 감쇠성능은 약간 감소함을 알 수 있다. 즉, $0.5 < \eta < 1.0$ 인 구간에서 댐퍼승수가 증가할 수록 고차모드의 최적댐퍼변위는 증가하기 때문에 상대진폭의 증가는 댐퍼승수의 증가로 나타나게 된다.

풍우진동에 대한 댐퍼 설계시 1차 모드가 아닌 2차 혹은 3차 모드를 설계모드로 정할 수 있다. 그림 16은 댐퍼승수별 다중모드 감쇠효율을 기존의 1차 모드의 경우와 비교한 그래프로, 2차 모드를 기준으로 설계한 경우가 댐퍼승수별 다중모드 감쇠효율은 증가함을 알 수 있다.

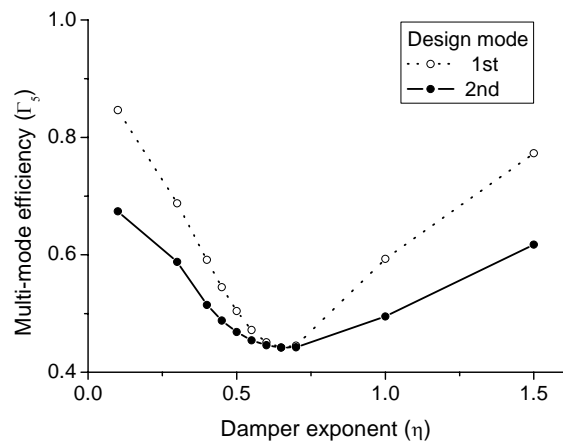


그림 16 2차 모드를 기준으로 설계된 경우 최적 댐퍼승수

즉, 풍우진동 패턴에 대하여 2차 모드를 기준으로 설계할 경우 댐퍼의 설계변위가 더 커서 변위 의존성이 감소하기 때문이다. 그렇지만, 최적 댐퍼승수는 거의 변하지 않음을 알 수 있다.

4.5 진동현상별 다중모드 감쇠효율

이상에서 살펴본 케이블의 모드별 최대변위의 패턴과 이때의 최적 댐퍼승수와 다중모드 감쇠효율을 비교해 보면 다음 그림 17과 같다.

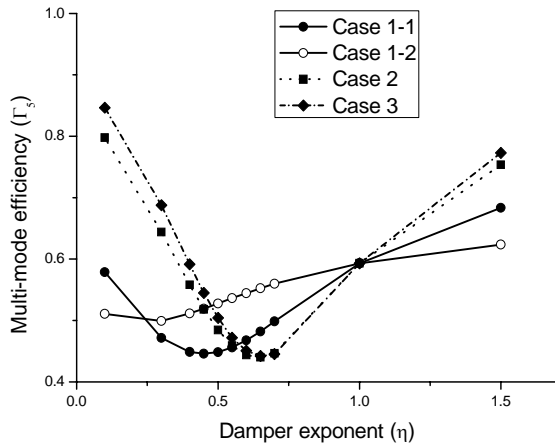


그림 17 진동패턴별 최적 댐퍼승수와 다중모드 감쇠효율

각 패턴별 최적 댐퍼승수는 댐퍼의 모드별 최대 변위가 감소하게 되면 0.5보다 작은 구간에 분포하고, 모드가 증가함에 따라 최대 변위가 증가하는 경우 $0.5 < \eta < 1$ 사이에 분포함을 알 수 있다. 선형댐퍼에 대한 최적 비선형 댐퍼의 다중모드 성능향상 지수는 15~25% 정도 향상됨을 알 수 있다.

표 2 최적 댐퍼승수와 다중모드 성능향상 지수

진동패턴	최적댐퍼승수 (η)	성능향상지수 (J_5)	비고
상시진동 (1)	0.45	24.8%	$0 < \eta < 0.5$
	0.3	15.8%	
지점가진	0.65	25.8%	$0.5 < \eta < 1$
풍우진동 (1)	0.65	25.4%	
	(2)	0.7	
(3)	0.7	21.3%	

4. 결론

다중모드에 대하여 최적의 댐퍼를 설계하기 위하여, 모드별 감쇠효율 지표를 구성하고 댐퍼승수의 변화에 따른 최적의 다중모드 감쇠효율을 나타내는 최적화 문제를 구성했다. 모드별 감쇠효율을 댐퍼의 부가감쇠에 의한 케이블의 포텐셜 에너지의 손실비로 정의하고 특정모드까지의 최적의 감쇠성능을 나타내는 댐퍼승수를 결정하는 최적화 관계를 제시했다. 비선형 댐퍼의 변위 의존성을 고려하기 위하여 각 모드별 최대변위를 상시진동, 지점가진 및 풍우진동으로 대별하여 응답패턴을 제시하였으며, 각각에 대해 최적의 감쇠성능을 나타내는 댐퍼승수를 구하는 절차를 제시하였다.

상시진동의 경우 상대적으로 저차 모드의 감쇠성능 비중이 증가하여 모드별 의존성이 감소하게 되며 최적의 댐퍼승수는 $0 < \eta \leq 0.5$ 구간에 존재한다. 지점가진과 풍우진동은 2차 이상의 고차모드에서 더 큰 진동이 발생할 수 있는 경우로 최적 댐퍼승수는 $0.5 \leq \eta < 1$ 의 구간에 존재한다. 다중모드의 최적설계에 의한 비선형 댐퍼의 효율을 기존의 선형댐퍼와 비교한 성능향상지수로 나타냈으며, 세가지 모드별 변위 패턴에 대하여 5차 모드까지 고려할 경우 최적 설계된 비선형 댐퍼는 감쇠성능이 15~25% 정도 향상된다.

참 고 문 헌

- (1) 서주원, 2006, "사장교 케이블의 다중모드 진동저감을 위한 비선형 댐퍼의 최적설계", 서울대학교
- (2) 안상섭 등, 2001, "특수 교량 케이블 부재의 진동 저감 기준 연구", 한국도로공사 도로연구소, 도로연 01-32
- (3) Main J.A., Jones N.P., 2001, "Evaluation of Viscous Dampers for Stay-cable Vibration Mitigation", *Journal of Bridge Engineering Vol. 6, No. 6, Nov.*
- (4) Krenk S., Hørgsberg J. R., "Damping of Cables by a Transverse Force", *Journal of Engineering Mechanics, Vol. 131, No.4* April 2005.
- (5) Matsumoto, M., Saito, T., Kitazawa, M., Shirato, H. and Nishizaki, T.(1995) "Response characteristics of rain-wind induced vibration of stay-cables of cable-stayed bridges", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 57, pp. 323-333.
- (6) Irvine, H. M.(1981), "Cable Structures", MIT Press, Cambridge, Mass.
- (7) Spencer Jr. B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K. and Carlson, J.D. "Phenomenological Model for Magnetorheological Dampers", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 123(3), 230-238, 1997.