ALE 유한요소법을 이용한 유연매체의 거동해석
Analysis of Flexible Media Using ALE Finite Element Method

지중근† ·장용훈*·박노철**·박영필***
Jung-Geun Jee, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park and Young-Pil Park

Key Words : Fluid-Structure Interaction(FSI : 유체구조연성), Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)

ABSTRACT

Flexible media such as the paper, the film, etc. are thin, light and very flexible. They behave in geometrically nonlinear. Any of small force makes large deformation. So we must including aerodynamic effect when its behavior is predicted. Thus, it becomes fully coupled fluid-structure interaction(FSI) problem. In FSI problems, where the fluid mesh near the structure undergoes large deformations and becomes unacceptably distorted, which drive the time step to a very small value for explicit calculations, the arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE) methods or rezoning are used to create a new undistorted mesh for the fluid domain, which allows the calculations to continue. In this paper, FE sheet model considering geometric nonlinearity is formulated to simulate the behavior of the flexible media. Aerodynamic force to the media by surrounding air is calculated by solving the incompressible Navier-Stokes equations. Q2Q1(Taylor-Hood) element which means biquadratic for velocity and bilinear for pressure is used for fluid domain. Q2Q1 element satisfies LBB condition and any stabilization technique is not needed. In this paper, cantilevered sheet in the viscous incompressible Navier-Stokes flow is simulated to check the mesh motion and numerical integration scheme, and then falling paper in the air is simulated and the effects of some representative parameters are investigated.

1. 서 론

유연매체는 종이나 필름, 테이프, 직물 등과 같이 얇고 가볍고 잘 휘는 매체를 말하며, 정보화 시대의 도래와 함께 이러한 유연매체를 다루는 프린터, 팩시밀리, 복사기, CD 기, ATM 과 같은 기기들이 널리 보급되어 있다. 이러한 기기들에서 매체를 전송하는 속도가 빨라짐에 따라 체류와 잼과 같은 여러 가지 문제가 발생하게 되며, 이러한 문제를 해결하기 위해서는 매체의 정확한 거동해석이 필요하다.

유연매체는 대변형 소변형률이라는 특성을 보이며 이러한 거동을 기하비선형성이라고 한다. 이러한 성질은 변형이 크게 일어나긴 하지만 탄성구간 내에서 변형이 일어나기 때문에 힘이 제거되면 다시 원래의 상태로 되돌아 옴을 말한다. 변형이 크게 일어나기 때문에 선형이론으로는 해석이 불가능하며 반복계산에 의해서 수렴해를 찾아가는 수법이 이용된다. 유연매체는 작은 힘에도 큰 변형이 일어나기 때문에 매체에 작용할 수 있는 작은 힘도 무시할 수 없게 된다. 유연매체는 공기 중을 움직이게 되므로 매체에 작용하는 공기의 힘을 계산하기 위해서 매체 주변의 공기의 흐름을 Navier-Stokes 방정식을 풀어서 해석한다.

공기 중을 움직이는 유연매체의 거동은 구조물에 유체의 힘이 작용하는 유체-구조 연성(Fluid-Structure Interaction:FSI) 문제가 되며, 구조물의 변형이 크기 때문에 구조물과 인접한 유체의 격자에 큰 변형이 발생하게 된다. 이것은 동적해석 시에 시간간격의 결정에 영향을 주며 격자가 심하게 뒤틀리게 되면 발산 가능성이 높아진다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)방법이 사용되며, 이것은 Lagrangian 과 Eulerian 의 장점만을 취하여 구조물에 인접한 곳에서는 유체 격자의 속도가 구조물 격자 속도와 같고 먼 곳은 격자의 속도가 0 이 되며 그 중간영역에서는 임의의 속도 값을 갖게 된다. 본 연구에서는 유연매체와 유체에 대한 지배방정식을 유도하고 ALE 방법을 이용한 유체구조연성 시의 지배방정식을 유도하고 경계조건과 초기값을 이용하여 해석을 수행한다.

† 연세대학교 기계공학과
E-mail : jgjee@yonsei.ac.kr
Tel : (02) 2123-4677, Fax : (02) 365-8460

* 연세대학교 기계공학과 부교수

** 연세대학교 정보저장기기협동과정 부교수

*** 연세대학교 기계공학과 정교수

2. 유연매체의 지배방정식

본 절에서는 2 차원 보요소를 이용하여 기하비선형 항을 고려한 구조의 지배방정식을 유도한다.

지배방정식을 증분 형식으로 나타내면 다음과

같다.

$$ {}^{t}M^{s}\Delta\dot{\varphi}^{s} + {}^{t}\left(K_{L}+K_{NL}\right)\Delta U^{s} = {}^{t+\Delta t}F^{s} - {}^{t}Q^{s} \qquad (2.1)$$

여기서,

$$\varphi^{s} = \begin{Bmatrix} V_c^s \\ V_i^s \end{Bmatrix}, U^{s} = \begin{Bmatrix} U_c^s \\ U_i^s \end{Bmatrix} \qquad (2.2)$$

위에서 첨자 i 는 구조만의 절점이고 c 는 유체와 구조가 접하는 점을 나타낸다.

식(2.1)에서의 ${}^{t}M^{s}$, ${}^{t}K_{L}$, ${}^{t}K_{NL}$, ${}^{t+\Delta t}F^{s}$ 그리고 ${}^{t}Q^{s}$ 는 각각 다음의 성분을 갖는다.

$$ {}^{t}M^{s} = \begin{bmatrix} {}^{t}M_{cc}^{s} & {}^{t}M_{ci}^{s} \\ {}^{t}M_{ic}^{s} & {}^{t}M_{ii}^{s} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$$ {}^{t}K_{L} = \begin{bmatrix} {}^{t}K_{Lcc} & {}^{t}K_{Lci} \\ {}^{t}K_{Lic} & {}^{t}K_{ii}^{s} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

$$ {}^{t}K_{NL} = \begin{bmatrix} {}^{t}K_{NLcc} & {}^{t}K_{NLci} \\ {}^{t}K_{NLic} & {}^{t}K_{Nii}^{s} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

$$ {}^{t+\Delta t}F^{s} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}F_c^s \\ {}^{t+\Delta t}F_i^s \end{Bmatrix}, \ {}^{t}Q^{s} = \begin{Bmatrix} {}^{t}Q_c^s \\ {}^{t}Q_i^s \end{Bmatrix} \qquad (2.6)$$

3. ALE 를 이용한 유체의 지배방정식

비압축성 점성 Navier - Stokes 방정식에 대하여 Galerkin 방법을 이용한 수식화를 수행하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$ M^{f}\overset{*}{\varphi} + C^{f}\varphi = F^{f} \qquad (3.1)$$

식(3.1)을 증분 형식으로 나타내면,

$$ {}^{t}M^{f}\Delta\overset{*}{\varphi}{}^{f} + {}^{t}C^{f}\Delta\varphi^{f} = {}^{t+\Delta t}F^{f} - {}^{t}Q^{f} \qquad (3.2)$$

이 된다.

여기서 위첨자 ∗는 참조 시간 도함수를 의미하며 절점변수 φ^{f} 는 다음과 같다.

$$\varphi^{f} = \begin{Bmatrix} P \\ V_i^f \\ V_c^f \end{Bmatrix} \qquad (3.3)$$

식 (3.2)에서의 각각의 행렬은 다음과 같다.

$$ {}^{t}M^{f} = \begin{bmatrix} {}^{t}M^{p} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{t}M_{ii}^{f} & {}^{t}M_{ic}^{f} \\ 0 & {}^{t}M_{ci}^{f} & {}^{t}M_{cc}^{f} \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

$$ {}^{t}C^{f} = \begin{bmatrix} \Lambda^{P} & G_i^T & G_c^T \\ -G_i & \Lambda_{ii}+K_{\mu ii} & \Lambda_{ic}+K_{\mu ic} \\ -G_c & \Lambda_{ci}+K_{\mu ci} & \Lambda_{cc}+K_{\mu cc} \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

$$ {}^{t+\Delta t}F^{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^{t+\Delta t}F_i^f \\ {}^{t+\Delta t}F_c^f \end{Bmatrix}, {}^{t}Q^{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^{t}Q_i^f \\ {}^{t}Q_c^f \end{Bmatrix} \qquad (3.6)$$

4. 유체 구조 연성 지배방정식

유체 구조의 공통 면에서의 변위, 속도, 가속도 평형으로부터 유체와 구조는 연성이 이루어지고 다음과 같은 증분 형식의 방정식이 얻어진다.

$$ {}^{t}M^{fs}\Delta\overset{*}{\varphi}{}^{fs} + {}^{t}C^{f}\Delta\varphi^{fs} + {}^{t}K^{s}\Delta U^{s} = {}^{t+\Delta t}F^{fs} - {}^{t}Q^{fs} \qquad (4.1)$$

여기서,

$$\varphi^{fs} = \begin{Bmatrix} P \\ V_i^f \\ V_c \\ V_i^s \end{Bmatrix}, \ U^{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_c \\ U_i^s \end{Bmatrix} \qquad (4.2)$$

과 같다. 식(4.2)에서 P 는 유체의 압력벡터, V_i^f 는 구조와 무관한 유체의 속도 벡터, V_c 는 연성된 속도 벡터 그리고 V_i^s 는 유체와는 무관한 구조만의 속도 벡터이다. 식(4.1)에서의 행렬들은 각각 다음과 같다.

$$ {}^{t}M^{fs} = \begin{bmatrix} {}^{t}M^{P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{t}M_{ii}^{f} & {}^{t}M_{ic}^{f} & 0 \\ 0 & {}^{t}M_{ci}^{f} & {}^{t}M_{cc}^{f} + {}^{t}M_{cc}^{s} & {}^{t}M_{ci}^{s} \\ 0 & 0 & {}^{t}M_{ic}^{s} & {}^{t}M_{ii}^{s} \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

$$ {}^{t}C^{f} = \begin{bmatrix} \Lambda^{P} & G_i^T & G_c^T & 0 \\ -G_i & \Lambda_{ii}+K_{\mu ii} & \Lambda_{ic}+K_{\mu ic} & 0 \\ -G_c & \Lambda_{ci}+K_{\mu ci} & \Lambda_{cc}+K_{\mu cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

$$ {}^{t}K^{s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}K_{Lcc} + {}^{t}K_{NLcc} & {}^{t}K_{Lci} + {}^{t}K_{NLci} \\ 0 & 0 & {}^{t}K_{Lic} + {}^{t}K_{NLic} & {}^{t}K_{Lii} + {}^{t}K_{NLii} \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

$$
{}^tQ^{fs} = \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^tQ_i^f \\ {}^tQ_c^f + {}^tQ_c^s \\ {}^tQ_i^s \end{Bmatrix}, \quad {}^{t+\Delta t}F^{fs} = \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^{t+\Delta t}F_i^f \\ {}^{t+\Delta t}F_c \\ {}^{t+\Delta t}F_i^s \end{Bmatrix} \tag{4.6}
$$

K_s 는 접선강성행렬을 나타내며, F^{fs} 는 외력벡터이고 Q^{fs} 는 내력벡터를 나타낸다.

5. PMA 법

본 절에서는 유체 구조 강연성 행렬방정식의 동적인 해석수법으로 Predictor - Multicorrector Algorithm(PMA)을 설명한다. PMA 는 유체와 같은 1 차 도함수의 식에 주로 사용되며 구조문제에는 2 차도함수의 식이 존재하므로 수정을 가할 필요가 있다. Newmark - β 방법에 기초하여 FSI 문제에 적합하도록 확장한다. 예측자, 해 그리고 다중수정자는 다음과 같은 식으로 주어진다.
먼저 예측자에 대한 식은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}U^{s(0)} &= {}^tU^s + \Delta t\,{}^tV^s + \Delta t^2(0.5-\beta)\,{}^t\overset{*}{V}{}^s \\
{}^{t+\Delta t}\varphi^{fs(0)} &= {}^t\varphi^{fs} + \Delta t(1-\gamma)\,{}^t\overset{*}{\varphi}{}^{fs} \\
{}^{t+\Delta t}\overset{*}{\varphi}{}^{fs(0)} &= 0
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

해는 다음 식으로 구해진다.

$$
M^*\Delta\overset{*}{\varphi}{}^{fs(k)} = {}^{t+\Delta t}R^{(k)} \tag{5.2}
$$

여기서, $\Delta\overset{*}{\varphi}{}^{fs(k)}\left(={}^{t+\Delta t}F - {}^tQ^{fs}\right)$는 시간 증분 $[t, t+\Delta t]$ 에 대한 k 번째 반복의 시작시의 잔류치이다.
일반화 질량 행렬 M^*는 다음 식으로 주어진다.

$$
M^* = {}^{t+\Delta t}M^{fs(k)} + {}^{t+\Delta t}C^{f(k)}\Delta t\gamma + {}^{t+\Delta t}K^{s(k)}\Delta t^2\beta \tag{5.3}
$$

수정자는 다음 식으로 주어진다.

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}U^{s(k+1)} &= {}^{t+\Delta t}U^{s(k)} + \Delta\overset{*}{V}{}^{s(k)}\Delta t^2\beta \\
{}^{t+\Delta t}\varphi^{fs(k+1)} &= {}^{t+\Delta t}\varphi^{fs(k)} + \Delta\overset{*}{\varphi}{}^{fs(k)}\Delta t\gamma \\
{}^{t+\Delta t}\overset{*}{\varphi}{}^{fs(k+1)} &= {}^{t+\Delta t}\overset{*}{\varphi}{}^{fs(k)} + \Delta\overset{*}{\varphi}{}^{fs(k)}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

위에서 γ 와 β 는 적분의 정확성과 안정성을 확보하기 위해 선택할 수 있는 변수들이다.

6. 해석 결과

앞에서 얻어진 지배방정식을 이용하여 몇 가지 해석을 수행하여 보았다.

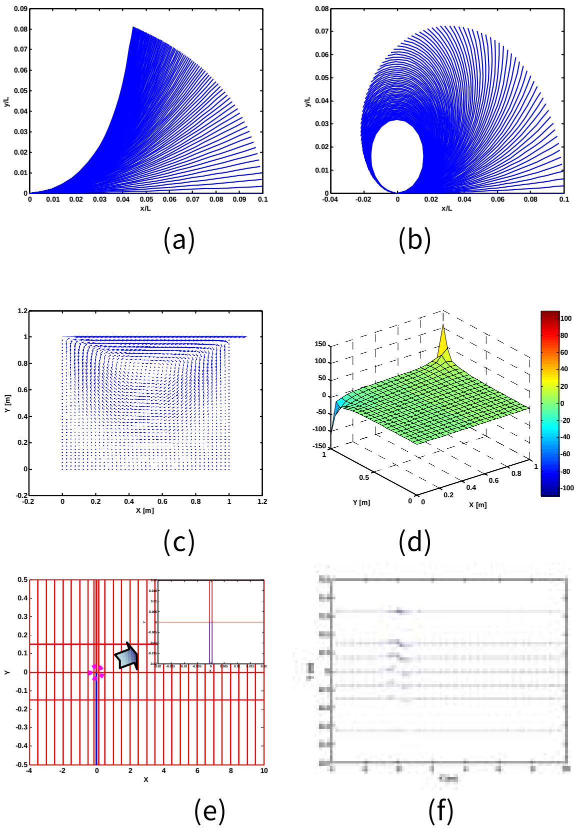

Fig.1 Simulation results

위 그림에서 (a)와 (b)는 구조만의 해석을 수행한 것으로 외팔보로 지지되는 매체의 끝단에 힘과 모멘트를 각각 가했을 때의 변형형상을 나타낸다. (c)와 (d)는 cavity flow 에 대한 해석으로 속도분포와 압력분포를 각각 나타낸 것이며 (e)와 (f)는 터널을 통과하는 유체를 구조가 막고 있을 때의 해석으로 격자와 속도분포를 나타낸 것이다.

7. 결 론

구조에 대한 지배방정식과 유체에 대한 지배방정식 그리고 ALE 방법을 이용한 대변형이 일어나는 유체 구조 연성 문제에 대한 수식화를 수행하였으며 간단한 시뮬레이션을 수행하였다. 유연매체는 대변형이 일어나며 유체영역과의 접촉이 일어나는 요소에서는 큰 영역의 변화가 일어나는 강연성 문제가 된다. 이러한 경우에 ALE 방법이 사용될 수 있고, ALE 방법을 이용한 유연매체의 보다 정확한 거동해석이 가능함을 확인하였다.

참고문헌

(1) J. Donea, S. Giuliani and J.P. Halleux, 1982, “An

Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Transient Dynamic Fluid-Structure Interactions", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.33, pp.689~723.

(2) Takashi Nomura, 1994, "ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.122, pp.291~308.

(3) Takashi Nomura and Tomas J.R. Hughes, 1992, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.95, pp.115~138.

(4) Ted Belytschko, D.P. Flanagan and J.M. Kennedy, 1982, "Finite Element Method with User-controlled Meshes for Fluid-structure Interaction", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.33, pp.669~688.

(5) Josep Sarrate, Antonio Huerta and Jean Donea, 2001, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for fluid-rigid body interaction", Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, Vol.190, pp.3171~3188.

(6) Nenad Filipovic, Srboljub Mijailovic, Akira Tsuda and Milos Kojic, 2006, "An implicit algorithm within the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for solving incompressible fluid flow with large boundary motions", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.195, pp.6347~6361.

(7) M. Souli, A. Ouahsine and L. Lewin, 2000, "ALE formulation for fluid-structure interaction problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.190, pp.659~675.

(8) Xiaodong Wang, 1999, "Analytical and computational approaches for some fluid-structure interaction analyses", Computers and Sturctures, Vol.72, pp.423~433.

(9) X. Wang, 2000, "Velocity/pressure mixed finite element and finite volume formulation with ALE descriptions for nonlinear fluid-structure interaction problems", Advances in Engineering Software, Vol.31, pp.35~44.

(10) K. Namkoong, H.G. Choi and J.Y. Yoo, "Computation of dynamic fluid-structure interaction in two-dimensional laminar flows using combined formulation", Journal of Fluids and Structure, Vol.21, pp.51~69.

(11) Howard H. Hu, N.A. Patankar and M.Y. Zhu, 2001, "Direct Numerical Simulations of Fluid-Solid Systems Using the Arbitrary Lagrangian-Eulerian Technique", Journal of Computational Physics, Vol.169, pp.427~462.

(12) Qun Zhang and Toshiaki Hisada, 2001, "Analysis of fluid-structure interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE finite element method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.190, pp.6341~6357.

(13) M. Gluck, M. Breuer, F. Durst, A. Halfmann and E. Rank, 2001, "Computation of fluid-structure interaction on lightweight structures", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.89, pp.1351~1368.

(14) H.H. Hu, 1996, "Direct Simulation of Flows of Solid-Liquid Mixtures", International Journal of Multiphase Flow, Vol.22, No.2, pp.335~352.