

# 평판의 면내 자유진동 해석

## In-Plane Free Vibration Analysis of Plates

최명수†·여동준\*·변정환\*·장덕중\*\*·문덕홍\*\*\*

Myung-Soo Choi, Dong-Jun Yeo, Jung-Hwan Byun, Duck-Jong Jang and Deok-Hong Moon

**Key Words** : Free Vibration(자유진동), Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method(유한요소-전달강성계수법), Plate(평판), Finite Element Method(유한요소법), In-Plane Vibration(면내진동)

### ABSTRACT

To analyze accurately the free vibration of a structure by using the finite element method (FEM), we model the structure as a numerical model with many degrees-of-freedom. However the FEM needs much computation time and storage in this case. The authors developed the finite element-transfer stiffness coefficient method (FE-TSCM) for overcoming the drawback of the FEM. In this paper, the authors apply the FE-TSCM to the in-plane free vibration analysis of plates with various shapes. Two numerical examples, a rectangular plate and a triangular plate, are used to compare the results of the FE-TSCM and the FEM. Through the numerical calculation, we confirm that the FE-TSCM can be applied to the plates with various shapes and is effective to in-plane free vibration analysis of plates.

### 1. 서 론

유한요소법을 이용하여 구조물의 자유진동을 정확하게 해석하기 위해서는 해석 대상 구조물을 많은 자유도를 가지도록 분할하여 모델링할 필요가 있다. 그러나 이 경우에는 수치 계산을 수행할 때 계산 시간이나 계산에 사용될 기억용량이 급증하게 된다.

저자들은 이러한 유한요소법의 취약점을 극복하기 위한 방안으로 유한요소-전달강성계수법을 개발하였다. 이 방법은 유한요소법의 요소 모델링 과정은 그대로 이용하나 유한요소법에 사용되는 고유치해석 대신에 동강성계수행렬을 전달하는 전달강성계수법의 기본 개념을 채용한 진동해석 기법이다. 지금까지 유한요소-전달강성계수법으로 평판의 굽힘진동 해석과 구조해석 등에 적용하여 그 유효성을 확인한바 있다<sup>(1)-(3)</sup>. 그러나 지금까지의 해석 대상 구조물은 모두 길이와 폭이 일정한 직사각형 평판이었다. 구조물의 설계 및 제작 시에 이용되는 평판은 다양한 형상을 가지므로 이러한 다양한 형상의 구조물에 본 해석 알고리즘을 적

용할 경우에는 전달과정에서 동강성계수행렬의 크기가 수시로 변하게 된다.

본 연구에서는 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 다양한 형상을 갖는 일반적인 평판의 면내 자유진동 해석을 수행하기 위한 알고리즘을 정식화한다. 그리고 수치계산 모델에 대하여 유한요소-전달강성계수법으로 자유진동 해석을 수행한 후 기존의 유한요소법의 계산 결과와의 비교를 통해 본 해석기법의 유효성을 확인한다.

### 2. 평판의 면내 자유진동해석 알고리즘

유한요소-전달강성계수법을 이용하여 Fig. 1에 나타낸 일반적인 평판을 대상으로 면내 자유진동 해석 알고리즘을 정식화한다.

#### 2.1 모델링

평판은 X축과 Y축에 평행한 직선과 대각선에 의해 다수의 삼각평판요소로 분할된다. 본 연구에서 전달의 방향을 X축으로 정할 경우, Y축에 평행한 분할선을 절선(nodal line)이라 부르고, 가장 좌측의 절선을 절선 1, 가장 우측의 절선을 절선 (n+1)이라 한다. 절선으로 나누어진 평판의 각 영역을 스트립(strip)이라 하면, Fig. 1의 평판은 좌측에서 우측까지 총 n개의 스트립으로 구성된다.

각 선들의 교차점은 삼각평판요소의 절점이 되고 각 절점

† 책임저자, 전남대학교 해양경찰학과  
E-mail : engine@chonnam.ac.kr  
Tel : (061) 659-3184, Fax : (061) 659-3189

\* 전남대학교 해양기술학부

\*\* 전남대학교 해양경찰학과

\*\*\* 부경대학교 기계공학부

은 X축과 Y축 방향의 2자유도를 가진다. 그리고 각 절점은 기초로부터 평판을 지지하는 기초지스프링이 부착되어 있는 것으로 고려한다.

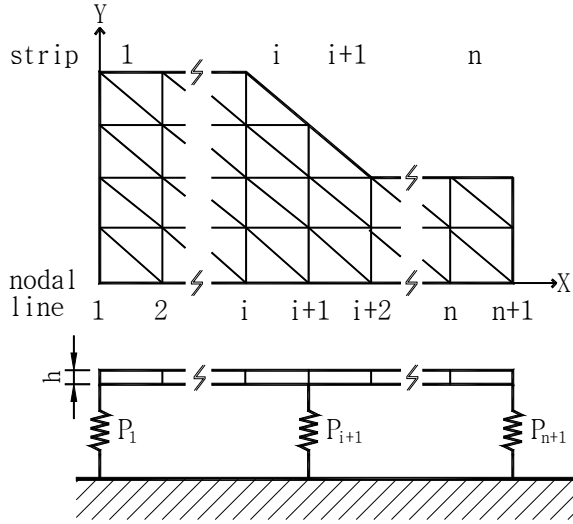


Fig. 1 Analytical model

평판의 경계조건은 해당 절점의 기초지스프링으로 모델링한다. 예를 들면, 한 절점이 구속되어 있다면, X축과 Y축 방향으로 무한대의 스프링상수 값을 갖는 기초지스프링이 해당 절점을 지지하는 것으로 모델링한다.

## 2.2 삼각평판요소와 스트립의 질량 및 강성행렬

Fig. 2는 3개의 절점과 총 6자유도를 갖는 삼각평판요소이다. 각 절점( $j = 1, 2, 3$ )의 변위벡터  $\hat{\mathbf{d}}_j$ 는 X축과 Y축 방향의 절점변위  $u$ 와  $v$ 로 구성되고, 각 절점의 힘벡터  $\hat{\mathbf{f}}_j$ 는 X축과 Y축 방향의 절점력  $f_x$ 와  $f_y$ 로 구성된다.

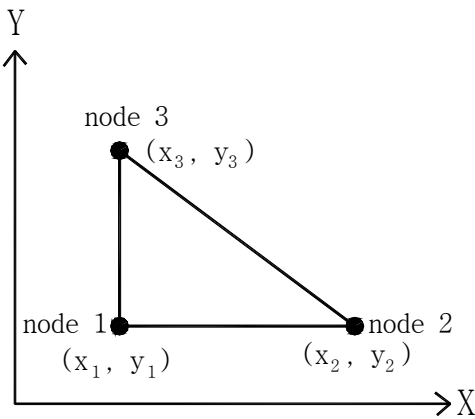


Fig. 2 A triangular element

밀도가  $\rho$ , 탄성계수가  $E$ , 프아송비가  $\nu$ , 두께가  $h$ , 면적

이  $A$ 인 3절점 삼각평판요소의 질량행렬( $\hat{\mathbf{M}}$ )과 강성행렬( $\hat{\mathbf{K}}$ )은 유한요소해석을 통해 다음식과 같이 구할 수 있다<sup>(4)</sup>.

$$\hat{\mathbf{M}} = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $\alpha = \rho Ah/12$  이다.

$$\hat{\mathbf{K}} = \beta \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서  $\beta = Eh/8A(1 - \nu^2)$  이고, 나머지 강성행렬의 요소는 다음과 같다.

$$k_{11} = 2a_1^2 + b_1^2(1 - \nu),$$

$$k_{12} = a_1b_1(1 + \nu),$$

$$k_{13} = 2a_1a_2 + b_1b_2(1 - \nu),$$

$$k_{14} = 2a_1b_2\nu + a_2b_1(1 - \nu),$$

$$k_{15} = 2a_1a_3 + b_1b_3(1 - \nu),$$

$$k_{16} = 2a_1b_3\nu + a_3b_1(1 - \nu),$$

$$k_{22} = 2b_1^2 + a_1^2(1 - \nu),$$

$$k_{23} = 2a_2b_1\nu + a_1a_2(1 - \nu),$$

$$k_{24} = 2b_1b_2 + a_1a_2(1 - \nu),$$

$$k_{25} = 2a_3b_1\nu + a_1b_3(1 - \nu),$$

$$k_{26} = 2b_1b_3 + a_1a_3(1 - \nu),$$

$$k_{33} = 2a_2^2 + b_2^2(1 - \nu),$$

$$k_{34} = a_2b_2(1 + \nu),$$

$$k_{35} = 2a_2a_3 + b_2b_3(1 - \nu),$$

$$k_{36} = 2a_2b_3\nu + a_3b_2(1 - \nu),$$

$$\begin{aligned}
k_{44} &= 2b_2^2 + a_2^2(1 - \nu), \\
k_{45} &= 2a_3b_2\nu + a_2b_3(1 - \nu), \\
k_{46} &= 2b_2b_3 + a_2a_3(1 - \nu), \\
k_{55} &= 2a_3^2 + b_3^2(1 - \nu), \\
k_{56} &= a_3b_3(1 + \nu), \\
k_{66} &= 2b_3^2 + a_3^2(1 - \nu), \\
a_1 &= y_2 - y_3, \quad a_2 = y_3 - y_1, \quad a_3 = y_1 - y_2, \\
b_1 &= x_3 - x_2, \quad b_2 = x_1 - x_3, \quad b_3 = x_2 - x_1
\end{aligned} \tag{3}$$

Fig. 1에 나타낸 임의의  $i$ 번째 스트립은 좌측 절선에  $m$ 개의 절점을 가지고 우측 절선에  $(m-1)$ 개의 절점을 가지며 다수의 삼각평판요소로 구성된다. 유한요소해석의 조립과정을 통해 식 (1)과 (2)에 나타낸 삼각평판요소의 질량행렬과 강성행렬을 가지고 스트립의 질량행렬( $\mathbf{M}_i$ )과 강성행렬( $\mathbf{K}_i$ )을 각각 구한다. 따라서 스트립의 동강성행렬( $\mathbf{D}_i$ )은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{d}}_i \tag{4}$$

여기서

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_i &= \mathbf{K}_i - \omega^2 \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ {}^t\mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i \end{bmatrix}, \\
\hat{\mathbf{f}}_i &= {}^t\{ {}^t\hat{\mathbf{f}}_i^L, {}^t\hat{\mathbf{f}}_i^R \}, \quad \tilde{\mathbf{d}}_i = {}^t\{ {}^t\tilde{\mathbf{d}}_i^L, {}^t\tilde{\mathbf{d}}_i^R \}, \\
\hat{\mathbf{f}}_i^L &= {}^t\{ \hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2, \dots, \hat{\mathbf{f}}_m \}_i^L, \\
\hat{\mathbf{f}}_i^R &= {}^t\{ \hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2, \dots, \hat{\mathbf{f}}_{m-1} \}_i^R, \\
\tilde{\mathbf{d}}_i^L &= {}^t\{ \tilde{\mathbf{d}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_m \}_i^L, \\
\tilde{\mathbf{d}}_i^R &= {}^t\{ \tilde{\mathbf{d}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_{m-1} \}_i^R
\end{aligned} \tag{5}$$

이고,  $\omega$ 는 각진동수, 하첨자  $i$ 는  $i$ 번째 스트립을 뜻하고, 상첨자 L과 R은 각각 스트립의 좌측과 우측을 의미한다. 그리고 상첨자  $t$ 는 행렬의 전치(transpose)를 뜻한다. 부분행렬  $\mathbf{A}_i$  및  $\mathbf{C}_i$ 는 각각  $2m$  및  $2(m-1)$ 의 행과 열을 갖는 정방행렬이 되고, 부분행렬  $\mathbf{B}_i$ 는  $2m$ 의 행과  $2(m-1)$ 의 열을 갖는 행렬이 된다.

### 2.3 절선강성계수행렬의 전달식

절선에서 좌측과 우측의 변위벡터는 연속이므로 동일하나 힘벡터는 기초지지스프링이 존재할 경우 달라지므로 하나의 절선을 절선 좌측과 절선 우측으로 나누어서 생각한다.

절선  $i$ 의 우측에서 힘벡터( $\mathbf{f}_i$ )와 변위벡터( $\mathbf{d}_i$ ) 사이의 관계를 절선강성계수행렬( $\mathbf{S}_i$ )을 이용하여 다음식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_i \tag{6}$$

여기서 절선  $i$ 에  $m$ 개의 절점이 존재할 경우,  $\mathbf{S}_i$ 는  $2m$ 의 행과 열을 갖는 정방행렬이 된다.

절선  $(i+1)$ 의 좌측에서 힘벡터( $\hat{\mathbf{f}}_{i+1}$ )와 변위벡터( $\mathbf{d}_{i+1}$ ) 사이의 관계를 절선강성계수행렬( $\bar{\mathbf{S}}_{i+1}$ )을 이용하여 다음식과 같이 정의한다.

$$\hat{\mathbf{f}}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} \tag{7}$$

절선  $(i+1)$ 의 우측에서 힘벡터( $\mathbf{f}_{i+1}$ )와 변위벡터( $\mathbf{d}_{i+1}$ ) 사이의 관계를 절선강성계수행렬( $\mathbf{S}_{i+1}$ )을 이용하여 다음식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} \tag{8}$$

그리고 절선  $(i+1)$ 에  $(m-1)$ 개의 절점이 존재할 경우,  $\bar{\mathbf{S}}_{i+1}$  및  $\mathbf{S}_{i+1}$ 는 각각  $2(m-1)$ 의 행과 열을 갖는 정방행렬이 된다.

스트립의 관점에서 절선의 관점으로 전환하면 식 (4)의 동강성행렬( $\mathbf{D}_i$ )은 다음과 같은 부분행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \bar{\mathbf{f}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_i & -\mathbf{B}_i \\ {}^t\mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_{i+1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

식 (6)과 식 (9)로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1} \tag{10}$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_i + \mathbf{A}_i \tag{11}$$

이다.

식 (7), (9), (10)으로부터 다음식과 같은 절선강성계수행렬의 전달식을 유도할 수 있고, 이 식을 필드(field) 전달식이라 부른다.

$$\bar{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbf{C}_i + {}^t\mathbf{B}_i \mathbf{V}_i \quad (12)$$

절선 (i+1) 선상의 임의의 절점 j에 기초지스프링 ( $k_{xj}, k_{yj}$ )이 존재하면, 절선 i+1에서 힘의 평형식은 다음식과 같다.

$$\mathbf{f}_{i+1} = \bar{\mathbf{f}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} \quad (13)$$

여기서 기초지스프링의 스프링상수로 구성되는 포인트 강성행렬  $\mathbf{P}_{i+1}$ 은 대각행렬로써 다음 식과 같다.

$$\mathbf{P}_{i+1} = \text{diag}(k_{x1}, k_{y1}, \dots, k_{ym-1})_{i+1} \quad (14)$$

식 (7), (8), (14)로부터 다음식과 같은 절선강성계수행렬의 전달식을 유도할 수 있고, 이 식을 포인트(point) 전달식이라 부른다.

$$\mathbf{S}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1} \quad (15)$$

식 (12)를 식 (15)에 대입하면 다음 식과 같은 절선강성계수행렬의 필드-포인트 전달식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{S}_{i+1} = \mathbf{C}_i + {}^t\mathbf{B}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{P}_{i+1} \quad (16)$$

#### 2.4 진동수 방정식과 고유모드의 계산

좌단의 경계조건을 절선 1의 기초지스프링으로 모델링하면 절선 1 좌측의 힘벡터  $\bar{\mathbf{f}}_1$ 는 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식 (8)과 (13)의 i에 0을 대입한 식으로부터 절선 1 우측의 강성계수행렬  $\mathbf{S}_1$ 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{P}_1 \quad (17)$$

식 (17)을 시작으로, 식 (16)의 i에 1, 2, ..., n을 순차적으로 대입하면, 전달과정을 통해 최종적으로 우단(끝단)인 절선 (n+1) 우측의 강성계수행렬  $\mathbf{S}_{n+1}$ 을 계산할 수 있다.

우단에서도 경계조건을 절선 (n+1)의 기초지스프링으로 모델링하면 절선 (n+1)에서  $\mathbf{f}_{n+1}$ 은 해석적으로 영벡터가 된다. 식 (8)의 i에 n을 대입한 식으로부터 다음 식을 구할 수 있고,

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (18)$$

따라서 식 (18)로부터 다음 식과 같은 진동수 방정식을 유도할 수 있다.

$$|\mathbf{S}_{n+1}(\omega)| = \mathbf{0} \quad (19)$$

고유모드는 고유진동수를 먼저 구한 후, 식 (18)로부터 마지막 절선의 변위벡터를 계산 한 후, 나머지 절선의 변위벡터는 식 (10)으로부터 우단에서 좌단으로 전달하면서 계산한다. 모든 절선의 변위벡터를 구한 후, 변위벡터 중에서 최대값을 1로 정규화한다.

### 3. 수치계산 결과 및 검토

#### 3.1 사각평판의 면내 자유진동 해석

수치계산에 사용된 첫번째 모델은 직사각형 평판으로써 가로 및 세로방향의 길이가 각각 60.96 m, 15.24 m이고, 두께가 0.02289 m, 종탄성계수가 34.474 GPa, 프아송비가 0.11이다. 평판은 밑변과 높이가 동일한 직각삼각형 평판요소로 구성되고, Fig. 3은 계산 모델을 20개의 스트립으로 모델링한 것이다.

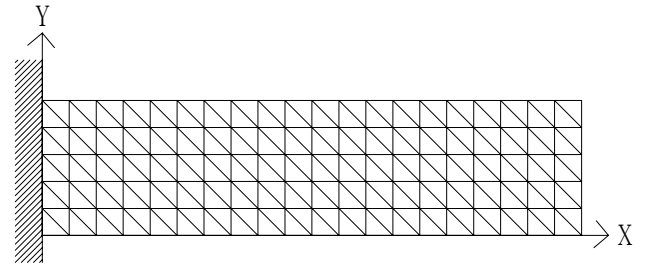


Fig. 3 Computation model 1 with 20 strips

사각평판을 다양하게 분할하여 모델링한 후 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 고유진동수와 고유모드를 계산한 결과는 완전히 일치하였다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 사각평판의 면내 자유진동 해석에서도 신뢰성 있는 계산 결과를 제공해 줌을 알 수 있었다. Table 1은 스트립의 개수에 따라 계산된 고유진동수를 보여준다. 스트립의 개수가 증가할수록 고유진동수가 수렴해 가고 있음을 알 수 있다.

Table 1. Natural frequencies of computation model 1 [Hz]

Mode	Number of strips				
	8	16	24	32	40
1	6.630	5.438	5.176	5.080	5.034
2	31.952	27.950	26.704	26.231	26.004
3	33.091	31.978	31.966	31.962	31.960
4	76.205	65.042	62.118	60.972	60.412
5	97.195	96.178	95.977	95.905	95.870

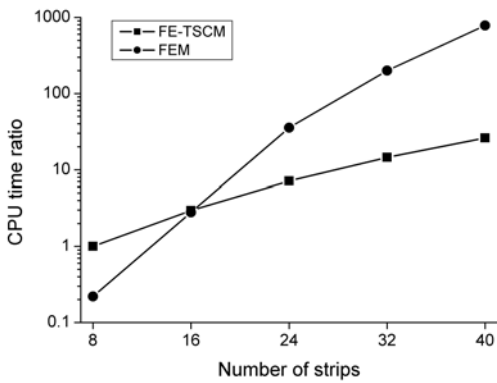
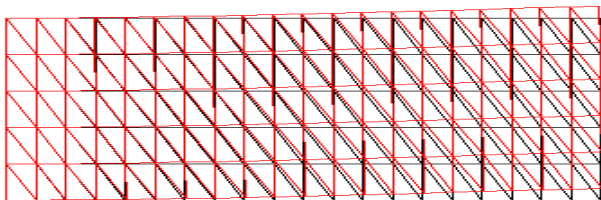
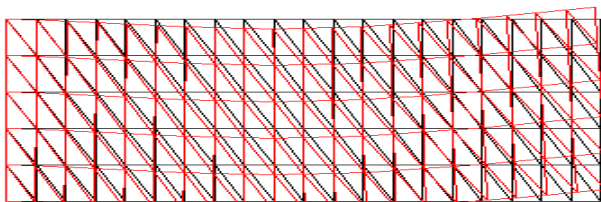


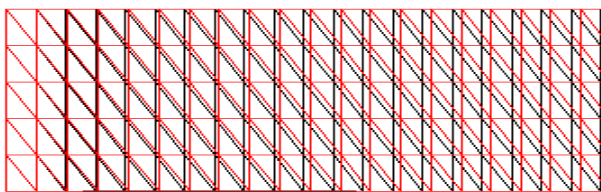
Fig. 4 Comparison of CPU time of computation model 1



(a) 1st natural mode



(b) 2nd natural mode



(c) 3rd natural mode

Fig. 5 Natural modes of computation model 1

Fig. 4는 양 방법의 계산 소요 시간을 비교한 것이다. 여기서는 스트립의 수가 8일 때 유한요소-전달강성계수법으로 계산하는데 소요된 시간을 기준으로 하여 계산 시간을 비교하였다. 스트립의 수가 증가할수록 유한요소법의 계산 소요 시간은 급격히 증가하였지만 유한요소-전달강성계수법은 상대적으로 그 증가폭이 작았다. 따라서 정도가 높은 고유진동수를 구할 경우 유한요소-전달강성계수법이 유한요소법보다 효과적임을 확인할 수 있었다.

Fig. 5는 스트립 수가 20인 계산모델에 대하여 1차부터 3차까지의 고유모드를 계산할 결과이다. 1차 및 2차 모드는 면내 굽힘 진동모드이고, 3차 모드는 종방향의 진동모드를 나타내고 있다.

### 3.2 삼각평판의 면내 자유진동 해석

두번째 수치계산 모델은 삼각형 평판으로써 가로 및 세로 방향의 길이가 모두 5 m이고, 두께가 1 cm, 종탄성계수가 206 GPa, 프아송비가 0.3이다. 평판은 밀변과 높이가 동일한 직각삼각형 평판요소로 구성되고, Fig. 6은 계산 모델을 10개의 스트립으로 모델링한 것이다.

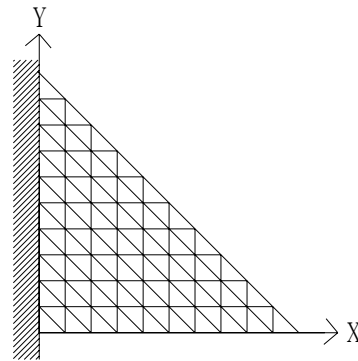
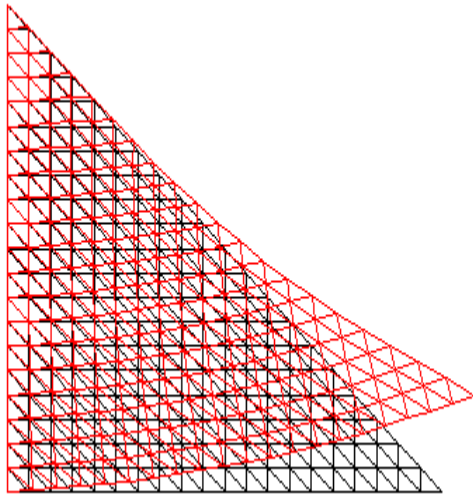


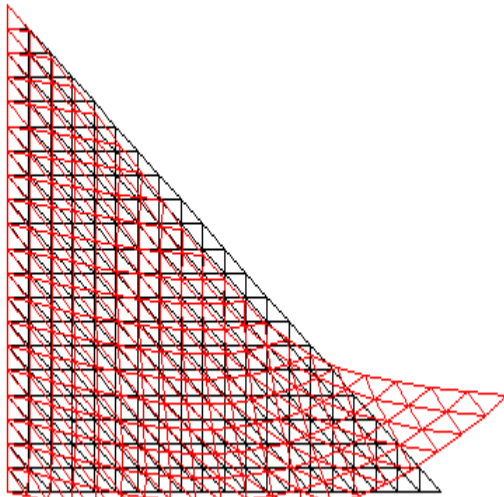
Fig. 6 Computation model 2 with 10 strips

Table 2. Natural frequencies of computation model 2 [Hz]

Mode	Number of strips				
	5	10	20	30	40
1	169.25	157.36	153.50	152.69	152.40
2	350.48	337.00	327.30	324.52	323.42
3	423.50	379.70	368.10	366.02	365.28
4	776.41	633.75	577.55	563.89	558.54
5	809.79	762.28	750.16	747.50	746.46
6	926.55	881.19	827.71	803.46	793.75
7	1122.96	939.68	874.63	871.09	869.90
8	1238.15	1037.43	988.06	969.36	959.86



(a) 1st natural mode



(b) 2nd natural mode

Fig. 7 Natural modes of computation model 2

삼각평판을 다양하게 분할하여 모델링한 후 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 고유진동수와 고유모드를 계산한 결과는 완전히 일치하였다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 Fig. 6과 같이 전달과정에서 강성계수행렬의 크기가 변해도 신뢰성 있는 계산 결과를 제공해 줌을 알 수 있었다.

Table 2는 스트립의 개수에 따라 계산된 고유진동수이다. 스트립의 개수가 증가할수록 고유진동수가 수렴해 가고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7은 스트립 수가 20인 계산모델에 대하여 1차 및 2차 고유모드를 계산할 결과이다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 다양한 형상을 갖는 평판에 적용할 수 있는 면내 자유진동을 해석 알고리즘을 유한요소-전달강성계수법으로 정식화하였다.

사각평판의 면내 자유진동 해석에 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법을 적용하여 수치 계산을 수행하였고, 그 결과 정도가 높은 고유진동수를 계산하기 위해서는 평판의 분할수를 증가시켜야 하고 이 경우에 유한요소-전달강성계수법이 신뢰성 있는 계산 결과를 제공하며 계산 시간의 면에서 유한요소법보다 효과적임을 확인하였다.

삼각평판의 면내 자유진동 해석을 통해서도 유한요소-전달강성계수법이 효과적인 진동해석 기법임을 확인할 수 있었고, 특히 평판의 폭이 변하여 강성계수행렬의 크기가 전달과정에서 변함에도 불구하고 수치계산 시에 전혀 문제가 없음을 확인할 수 있었다. 따라서 다양한 형상의 평판 구조물에 유한요소-전달강성계수법을 적용 가능함을 알 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

- (1) M. S. Choi 2003, "Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", KSME International Journal, Vol. 17, No. 6, pp. 805~815.
- (2) 최명수, 2003 "유한요소-전달강성계수법을 이용한 평판 구조물의 강제진동해석", 한국소음진동공학회지, 제13권, 제2호, pp. 99~107.
- (3) 최명수 등, 2006 "강성계수의 전달에 의한 평판 구조물의 구조해석", 춘계학술대회 논문집, 한국동력기계공학회, pp. 85~90.
- (4) Maurice Petyt, 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 141~175.