

확률론적 Balance 방법을 이용한 제어용 모델의 축소

Model Reduction using Stochastic Balance Technique

이동희† · 권동철* · 여운경* · 박성만* · 채교순* · 허훈**

Dong-Hee Lee, Dong-Chul Kwon, Un-Kyung Yeo, Sung-Man Park, Kyo-Soon Chae and Hoon Heo

Key Words : BMR(발란스 모델 축소), Stochastic Controller(확률제어기), Model Reduction(모델 축소)

ABSTRACT

Recently, dynamic system has been enlarged and is exposed to various types of disturbance. Thus designing controller for those dynamic system under random disturbance is not practically easy. As a result, the exact analysis for the system which is exposed to various irregular disturbance is quite important. In order to perform analysis, conventional BMR(Balanced Model Reduction) method is applied to moment equation in stochastic domain and reliable reduced order system model has been obtained.

1. 서 론

제어시스템을 해석하고 설계하기 위해서는 제어할 동적 시스템을 수학적으로 표현되는 효과적이고 실용적인 모델링 작업이 요구된다. 물리 시스템에 대한 수학적 모델링 작업은 해석적인 방법으로 제어시스템을 설계하고자할 때 필수적이다. 그러나 제어할 동적 시스템은 최근 점점 복잡화되고 거대화되는 추세를 보이고 있으며, 시스템에 대한 불규칙 교란 및 잡음의 영향은 시스템 운용에 있어서 그 비중이 점차 커지고 있다. 또 시스템의 각각의 물리적 변수들은 시간과 공간 모두에서 불규칙적으로 변동되며 이러한 환경에서 시스템은 점점 정밀한 성능의 발휘를 요구받고 있다. 이에 시스템에 대한 불규칙 교란 및 잡음은 시스템 설계와 그의 정밀한 운용에 있어서 이의 분석과 제어의 필요성은 크게 증대되고 있다. 이러한 불규칙한 교란을 제어하기 위한 많은 제어기가 시도되었고 또한 최근에 개발된 확률제어기는 그 성능에 대하여 가능성을 보여주었다.

일반적으로 불규칙한 교란에 노출된 시스템을 제어하는 방법으로는 F-P-K(Fokker-Planck-Kolmogorov) 방정식을 이용한 확률 제어기법의 연구가 진행되어 왔다. F-P-K 방법은

내, 외부 및 상호 영향적인 불규칙 교란에 노출되는 시스템의 확률밀도 함수의 거동을 해석하는 방법 중에 하나이다. F-P-K 방법을 이용하여 불규칙 교란의 정보는 확률영역에서의 PSD(Power Spectral Density) 값으로 변환되어 제어기가 설계된다. 즉, 확률제어기법의 개념은 상수 상태나 간단한 함수 형태의 PSD 값으로 나타내어지는 외란을 사용하여 확률영역에서 설계가 될 수 있다. 시간 영역에서 개발된 어떤 종류의 제어기도 확률 영역에 적용할 수 있으며, 확률영역 제어기는 몬테카를로(Monte-Carlo) 방법과 같은 랜덤 신호 발생 알고리즘에 의해 실현될 수 있다. 확률영역에서의 제어신호는 PSD 값 형태로 나타내며, 이 신호를 시간영역의 제어신호로 변환하여 사용한다. 기존의 확률 제어기법은 확률영역에서의 모멘트 방정식을 유도하였다^{[1][2][3]}. 그러나 모멘트 방정식을 유도할 경우, 시스템 차수가 증가한다는 문제점을 안고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 기존에 물리영역에서 개발된 Balanced Model Reduction 방법을 확률영역에서의 모멘트 방정식에 적용함으로써, 동적 시스템의 설계에 있어서 불규칙한 외란에 대한 보다 정확하고, 신뢰성 있는 분석을 확인하였다.

† 고려대학교 대학원 제어계측공학과
E-mail : episode-v@korea.ac.kr
Tel : [02] 3290-3995, Fax : [02] 929-7808

* 고려대학교 대학원 제어계측공학과

** 고려대학교 제어계측공학과 교수

2. 확률론적 해석방법

2.1 Stochastic Analysis

다음 그림과 같은 2차 시스템을 고려하여 보자.

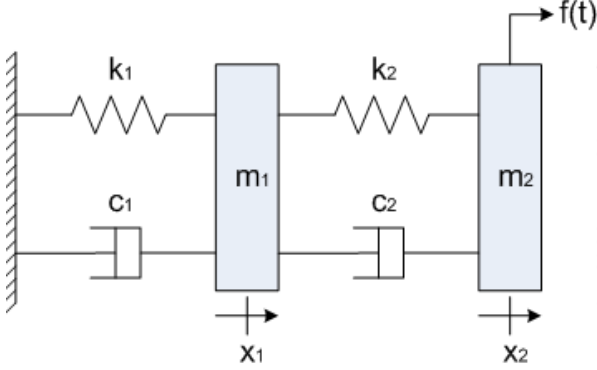


Fig1. Schematic of a two degree of freedom system

m_2 에 Random Disturbance가 입력될 때, 위 시스템으로부터 운동방정식을 구하여 보면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 - c_2 & \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - k_2 & \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 $f(t)$ 는 PSD가 $D(= \sigma^2)$ 인 백색잡음 불규칙 과정이다.

위 운동방정식을 상태변수 방정식으로 표현하면,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}[K] & -M^{-1}[C] \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

에 의해

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1 m_2} \end{bmatrix} f(t) \quad (2)$$

가 된다.

위 식(2)로부터 다음과 같은 좌표변환을 이용하여 Ito의 확률 미분방정식의 형태로 구할 수 있다.

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2, \quad \dot{x}_1 = X_3, \quad \dot{x}_2 = X_4$$

$$dX_1 = X_3 dt$$

$$dX_2 = X_4 dt$$

$$dX_3 = \left\{ -\frac{k_1+k_2}{m_1} X_1 + \frac{k_2}{m_1} X_2 - \frac{c_1+c_2}{m_1} X_3 + \frac{c_2}{m_1} X_4 \right\} dt$$

$$dX_4 = \left\{ \frac{k_2}{m_2} X_1 - \frac{k_2}{m_2} X_2 + \frac{c_2}{m_2} X_3 - \frac{c_2}{m_2} X_4 + \frac{m_1}{m_1 m_2} f(t) \right\} dt \quad (3)$$

일반적인 형태의 F-P-K 방정식은 식(4)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(X,t) = & - \sum_{i=1}^n a_i(X,t) \frac{\partial}{\partial X_i} p(X,t) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(X,t) \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} p(X,t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $a_i(X,t)$ 는 부유계수이고 $b_{ij}(X,t)$ 는 확산계수이다.

$$a_i(X,t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[x_i(t+\Delta t) - x_i(t)] \quad (5)$$

$$b_{ij}(X,t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[\{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)\} \{x_j(t+\Delta t) - x_j(t)\}]$$

식(4)을 이용하여 부유계수와 확산계수를 구하면 다음과 같다.

$$a_1(X,t) = x_3, \quad a_2(X,t) = x_4$$

$$a_3(x,t) = \left\{ -\frac{k_1+k_2}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 - \frac{c_1+c_2}{m_1} x_3 + \frac{c_2}{m_1} x_4 \right\}$$

$$a_4(x,t) = \left\{ \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_2 + \frac{c_2}{m_2} x_3 - \frac{c_2}{m_2} x_4 \right\}$$

$$b_{44}(x,t) = \left(\frac{m_1}{m_1 m_2} \right) \sigma^2$$

위에서 구한 부유계수와 확산계수를 이용하여 식(4)에 대입하여 F-P-K방정식을 얻을 수 있다. F-P-K방정식을 이용하여 응답 모멘트에 관한 미분 방정식을 유도할 수 있다. 유도된 미분방정식을 각항에 대하여 적분을 수행하면 시스템의 동적 모멘트 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다^{[1][2][3]}.

$$\begin{aligned} \dot{m}_{ijkl} = & im_{i-1,j,k+1,\ell} + jm_{i,j-1,k,\ell+1} \\ & - k \left[\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} \right) m_{i+1,j,k-1,\ell} + \left(\frac{k_2}{m_1} \right) m_{i,j+1,k-1,\ell} \right. \\ & \left. - \left(\frac{c_1+c_2}{m_1} \right) m_{i,j,k,\ell} + \left(\frac{c_2}{m_1} \right) m_{i,j,k-1,\ell+1} \right] \\ & + \ell \left[\left(\frac{k_2}{m_2} \right) m_{i+1,j,k,\ell-1} - \left(\frac{k_2}{m_2} \right) m_{i,j+1,k,\ell-1} \right. \\ & \left. + \left(\frac{c_2}{m_2} \right) m_{i,j,k+1,\ell-1} - \left(\frac{c_2}{m_2} \right) m_{i,j,k,\ell} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{m_1}{m_1 m_2} \sigma^2 \ell(\ell-1) m_{i,j,k,\ell-2} \quad (6)$$

$$\text{where } m_{i,j,k,\ell} = \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1^i x_2^j x_3^k x_4^\ell P(\underline{x}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

3. 확률론적 Balance Technique

3.1 Balance Model Reduction Method

최근 제어 분야에서 높은 차수의 선형시스템을 낮은 차수의 모델로 근사시키는 모델축소방법이 큰 관심을 끌고 있다. 그 이유는 수백 수천의 상태변수를 갖는 시스템을 제어하는 경우 LQG제어기와 같이 시스템과 같은 차수를 갖는 제어기를 사용하는 것이 실용적이지 못하기 때문이다. 여러 축소화 방법 중에서 Moore^[4]가 처음 소개한 Balancing 축소화 방법^{[4][5][6]}이 흔히 쓰인다. 시스템이 Balancing 좌표계로 변환될 때 각 상태변수는 가제어성(Controllability)과 가관측성(Observability)이 같아지므로 작은 가제어성과 가관측성을 갖는 상태변수들을 없애고 축소화 모델을 얻을 수 있다. 기본적인 수학적 이론은 다음과 같다.

안정된 선형 시불변 시스템이 다음과 같이 주어지고 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (7)$$

여기서, $A \in R_{n \times n}$, $B \in R_{n \times p}$, $C \in R_{m \times n}$ 의 차원을 갖는다. 이 시스템 (A, B, C) 의 Controllability Gramian(W_C)과 Observability Gramian(W_O)은 다음과 같은 Lyapunov 방정식을 만족시킨다.

$$AW_C + W_C A^T + BB^T = 0 \quad (8)$$

$$A^T W_O + W_O A + C^T C = 0$$

시스템 (A, B, C) 가 가제어(Controllable)하고 가관측(Observable)하다고 가정하면 이 시스템을 Balancing 좌표계로 변환시키는 변환행렬 P 을 찾을 수 있다^[5]. 즉,

$$x = P \bar{x} \quad (9)$$

에 의해

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u, \quad y = \bar{C} \bar{x} \quad (10)$$

가 되며

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}B, \quad \bar{C} = CP$$

$$\overline{W_C} = \overline{W_O} = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \} \quad (11)$$

을 만족시킨다. Balancing 좌표계에서는 식(11)처럼 Controllability Gramian(W_C)과 Observability Gramian(W_O)이 같은 대각행렬이 되며 이 때 대각성분을 Hankel 특이 값이라 한다. Balancing 축소화 방법은 상태변수들을 Hankel 특이 값의 크기순으로 배열하여 입출력에 크게 기여하는 상태변수만을 축소모델이 간직하는 것이다^[4].

3.2 Stochastic Balance Technique

확률론적 해석 방법을 통해 확률 영역에서의 모멘트 방정식을 식(6)과 같이 유도하였다. 그러나 모멘트 방정식을 유도 하는데 있어서, 시간영역에서 4×4 의 시스템 방정식이 확률영역에서 14×14 의 동적 모멘트 방정식으로 시스템 차수가 증가한다는 문제점을 안고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 기존에 제기된 Balanced Model Reduction 방법을 확률 영역에서의 10×10 의 2차 동적 모멘트 방정식에 적용하여 보았다.

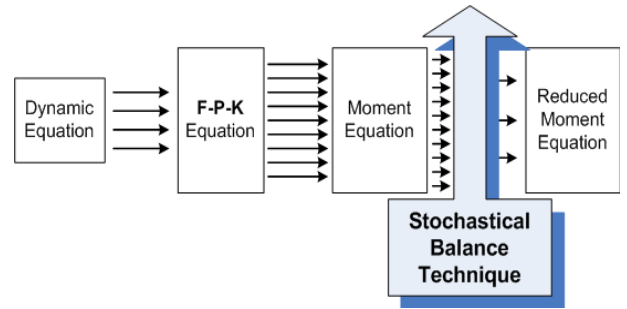


Fig. 2 Conceptual Diagram of Model Reduction using Stochastic Balance Technique

Fig. 2는 확률론적 Balance 방법을 이용한 모델축소에 대한 기본 개념도를 나타낸다. 식(7)의 시스템 방정식에 식(6)으로부터 얻은 2차 동적 모멘트 방정식을 적용시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1100} &= m_{0110} + m_{1001} \\ \dot{m}_{1010} &= m_{0020} - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)m_{2000} + \left(\frac{k_2}{m_1}\right)m_{1100} - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1}\right)m_{1010} + \left(\frac{c_2}{m_1}\right)m_{1001} \\ \dot{m}_{1001} &= m_{0011} + \frac{k_2}{m_2}m_{2000} - \left(\frac{k_2}{m_2}\right)m_{1100} + \left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{1010} - \left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{1001} \\ \dot{m}_{0110} &= m_{0011} - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)m_{1100} + \left(\frac{k_2}{m_1}\right)m_{0200} - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1}\right)m_{0110} + \left(\frac{c_2}{m_1}\right)m_{0101} \\ \dot{m}_{0110} &= m_{0011} - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)m_{1100} + \left(\frac{k_2}{m_1}\right)m_{0200} - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1}\right)m_{0110} + \left(\frac{c_2}{m_1}\right)m_{0101} \\ \dot{m}_{0101} &= m_{0002} + \left(\frac{k_2}{m_2}\right)m_{1100} - \left(\frac{k_2}{m_2}\right)m_{0200} + \left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{0110} - \left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{0101} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{0011} &= -\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)m_{1001} + \left(\frac{k_2}{m_1}\right)m_{0101} - \left(\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)m_{0011} + \left(\frac{c_2}{m_1}\right)m_{0002} \\
&\quad + \left(\frac{k_2}{m_2}\right)m_{1010} - \left(\frac{k_2}{m_2}\right)m_{0110} + \left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{0020} - \left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{0011} \\
\dot{m}_{2000} &= 2m_{1010} \\
\dot{m}_{0200} &= 2m_{0101} \\
\dot{m}_{0020} &= -2\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)m_{1010} + 2\left(\frac{k_2}{m_1}\right)m_{0110} - 2\left(\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)m_{0020} + 2\left(\frac{c_2}{m_1}\right)m_{0011} \\
\dot{m}_{0002} &= 2\left(\frac{k_2}{m_2}\right)m_{1001} - 2\left(\frac{k_2}{m_2}\right)m_{0101} + 2\left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{0011} - 2\left(\frac{c_2}{m_2}\right)m_{0002} \\
&\quad + \frac{m_1}{m_1 m_2} D
\end{aligned} \tag{12}$$

위와 같은 2차 동적 모멘트 방정식은 Balancing 좌표계로 변환시키는 변환행렬 P 에 의해서 변환된다. Balancing 좌표계에서의 Controllability Gramian(W_C), Observability Gramian(W_O) 그리고 Hankel 특이 값은 다음과 같이 식 (11)처럼 만족시킴을 알 수 있다.

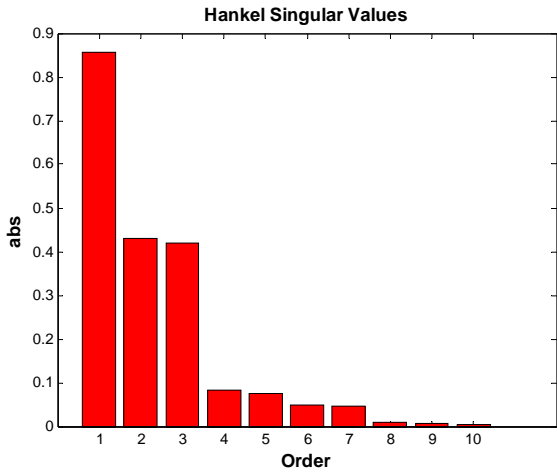


Fig. 3 Hankel Singular Values

$$\overline{W_C} = \overline{W_O} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & \sigma_{10} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Fig. 3에서 알 수 있듯이 Hankel 특이 값(Singular Value)의 크기가 입출력에 크게 기여하는 상태변수만을 축소하여 다음과 같은 축소된 시스템 방정식을 얻을 수 있었다.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{m}_{0002} \\ \dot{m}_{0011} \\ \dot{m}_{0110} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.1715 & 0.2512 & -0.08547 \\ 0.2512 & -0.4132 & 3.928 \\ 0.08547 & -3.928 & -0.005653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{0002} \\ m_{0011} \\ m_{0110} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0.5421 \\ -0.5963 \\ -0.06889 \end{bmatrix} D
\end{aligned} \tag{14}$$

4. Simulation 결과 및 분석

확률 영역에서의 10×10 의 2차 동적 모멘트 방정식인 식(12)과 이를 Stochastic Balance Technique를 이용하여 3×3 의 시스템 방정식인 식(14)으로 축소되었다. 축소된 모델과 원래의 시스템의 응답 특성을 다음과 같이 비교하였다.

Fig. 4는 10×10 의 2차 동적 모멘트 방정식과 3×3 의 축소된 모멘트 방정식을 구성하여 스텝 입력에 대한 응답을 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 Stochastic Balance Technique를 이용하여 축소된 모멘트 방정식 식(14)의 시스템이 축소전의 시스템인 10×10 의 2차 동적 모멘트 방정식을 흡사하게 추종하는 것을 확인 할 수 있다.

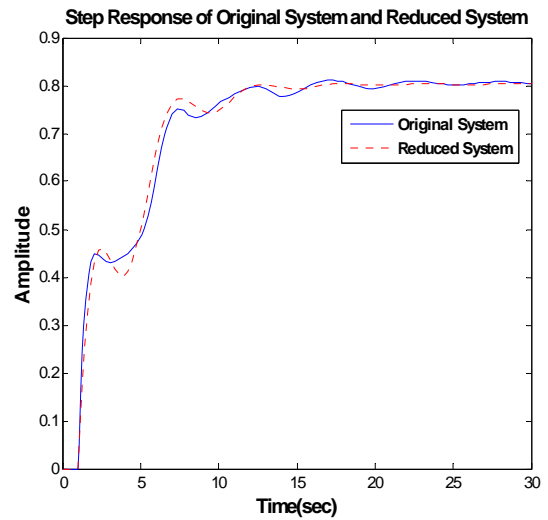


Fig. 4 Step Response of Original System and Reduced System

위에서 확인 한 축소전의 시스템과 축소된 시스템에 일정한 PSD를 갖는 White Noise 형태의 외란을 가하였을 때 기존의 그 성능이 입증된 확률제어기를 통한 제어된 응답을 살펴보았다.

Fig. 5는 White Noise 형태의 외란을 가하였을 때, 2차 동적 모멘트 방정식(Original System)과 축소된 모멘트 방정식(Reduced System)의 시간 응답과 확률제어기를 통한 시스템의 제어된 응답을 나타낸다. 같은 외란에 대하여 Reduced System 보다 Original System의 제어응답이 더 안정된 것을 알 수 있다.

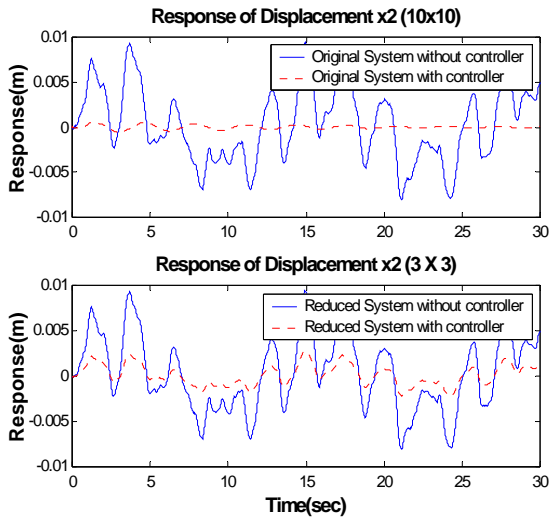


Fig. 5 Time Response: Original System vs. Reduced System with/without Stochastic Controller

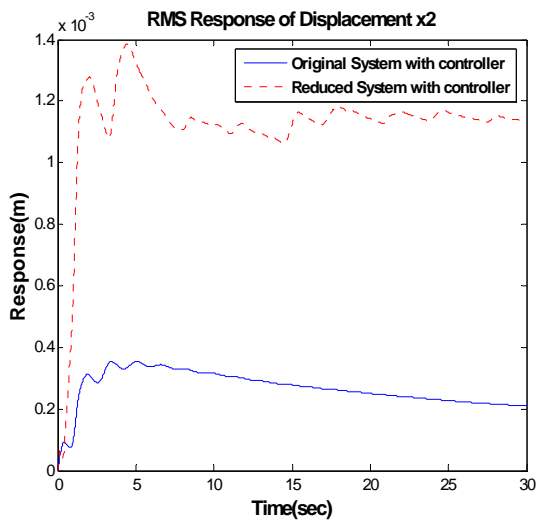


Fig. 6 RMS response of Original System and Reduced System with Stochastic controller

Fig. 6에서는 확률 영역에서의 시스템 응답을 RMS 응답을 통해 확인하였다. 시간 영역과 확률 영역에서의 제어된 시스템 응답을 통하여 Reduced System이 Original System의 응답을 추종하는 것을 알 수 있다.

4. 결론

기존의 확률 제어기법은 시간영역에서의 시스템 방정식이 확률 영역에서의 모멘트 방정식으로 변환하는데 있어서 시스템 차수가 증가한다는 문제점을 안고 있었다. 본 논문

서는 차수증가의 문제점을 보완하기 위하여 Stochastic Balance Technique를 이용하여 기존의 10×10 의 2차 동적 모멘트 방정식을 3×3 로 축소하여 시뮬레이션을 통해 그 결과를 확인하였다. 축소된 모멘트 방정식은 피드백 시스템의 응답과 확률제어기를 통한 제어 응답을 통해서 2차 동적 모멘트 방정식을 흡사하게 추종하는 것을 알 수 있었다. 정량적으로는 실제 차수의 시스템보다는 제어 성능이 미흡하지만, 얻어진 시스템은 정성적으로는 안정된 축소 모델임을 알 수 있다. 이에 본 방법은 실용적으로 축소된 확률 제어기 시스템의 설계 및 구현에 활용될 수 있겠다. 차후 본 논문에서 제안된 Stochastic Balance Technique를 확인하기 위한 실험을 진행할 것이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 '이공계 대학원 연구 장학생'에 대한 연구비 지원으로 수행된 것으로 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- [1] Jong-Bok Lee, Yun-Hyun Cho, Tae-Young Ji, Hoon Heo, "Model Tracking Dual Stochastic Controller Design Under Irregular Internal Noises", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 20, No. 5, pp. 652-657, 2006.
- [2] Yong-Kwan Kim, Jong-Bok Lee, Hoon Heo, "A Study of Mode Selecting Stochastic Controller for a Dynamic System under random vibration", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 19, No. 10, pp.1846-1855, 2005.
- [3] 이종복, 김홍윤, 안준영, 허 훈, "확률제어기법을 이용한 진동계의 모델추종 이중제어기 설계", 한국 소음 진동공학회 논문집, 제 15권, 제 6호, pp. 757-763, 2005.
- [4] Moore B.C., "Principal component analysis in linear system : controllability, observability, and model reduction." IEEE Trans. Automat. Cont., Vol AC-26, No. 1, pp.17-32, 1981.
- [5] Laub A. J., "Computation of balancing transformation," Proc. JACC, San Francisco, CA, session FA8-E., 1980.
- [6] Linder D. K., Babendreier J., and Hamdan A. M. A., "Measures of controllability and observability and residues," IEEE Trans. Automat. Cont. Vol. AC-34, No. 6, pp. 648-650, 1989.