

위상 최적화 기법을 이용한 머플러 설계

Muffler Design Using a Topology Optimization Method

이진우† · 김윤영*

Jin Woo Lee and Yoon Young Kim

Key Words: muffler design(머플러 설계), topology optimization(위상 최적화), transmission loss(투과 손실), expansion chamber(확장방).

ABSTRACT

An acoustic topology optimization method is developed to optimize the acoustic attenuation capability of a muffler. The transmission loss of the muffler is calculated by using the three-point method based on finite element analysis. Each element of the finite element model is assumed to have the variable acoustic properties, which are penalized by a carefully-selected interpolation function to yield clear expansion chamber shapes at the end of topology optimization. The objective of the acoustic topology optimization problem formulated in this work is to maximize the transmission loss at a target frequency. The transmission loss value at a deep frequency of a nominal muffler configuration can be dramatically increased by the proposed optimization method. Optimal muffler configurations are also obtained for other frequencies.

1. 서론

원하는 주파수 대역에서 높은 전달 손실(Transmission Loss: TL)을 갖는 머플러의 최적 설계를 위해 위상 최적화 기법을 정식화하였다. 지금까지 머플러의 설계는 경험 또는 몇 개의 매개 변수를 이용한 형상 최적화 기법에 의해 주로 이루어졌다. 머플러 내에 존재할 수 있는 강체벽(rigid wall)의 분포에 따라 머플러의 음향 특성이 변화되기 때문에, 이와 같은 전통적인 설계 방법만으로는 목적 주파수(target frequency)에서 최대 전달 손실을 갖는 최적의 머플러 형상을 찾기 어렵다. 본 논문에서는 머플러의 유한 요소 모델을 구성한 다음, 각 유한 요소모델에 설계 변수(design variable)을 한 개씩 부여하는 방법으로 머플러 위상 최적화를 수행하였다. 제안된 음향 위상최적화 기법을 목적 주파수에서 최대 전달 손실을 갖는 동심 확장방 머플러 설계 문제에 적용하여 그 타당성을 검증하였다.

관심 주파수 영역에서 높은 투과 손실을 갖는 머플러 내부 구조 설계에 대한 연구는 최근까지 많은 연구자들에 의해 진행되어 왔다. Selamet⁽¹⁻²⁾은 확장방의 길이, 연장된 입구단과 출구단의 길이를 조절하여 가능한 높은 전달 손실을 갖는 주

파수 대역을 확장할 수 있는 방법을 제시하였다. Barbieri⁽³⁾는 형상 최적화 기법을 이용하여 연장된 입구단과 출구단(extended inlet/outlet)의 길이를 최적화하여 관심 주파수 대역에서 높은 전달 손실 값을 갖는 머플러를 설계하였다.

지금까지 보고된 머플러의 설계 방법은 미리 정해진 초기 위상을 부분적으로 변경하여, 관심 주파수 대역의 전달 손실을 증가시키는 것이었다. 그러나, 이런 방법은 사각형이나 원형과 같은 단순 형상의 머플러에는 효과적이지만, 좋은 초기 위상을 정하기 어려운 복잡한 형상의 머플러 설계에는 적절하지 못하다. 실제 산업 현장에서도 머플러 초기 형상은 설계자의 과거 경험과 직관에 의해 결정되기 때문에, 제한된 범주 내에서 머플러의 내부 구조를 설계하게 된다.

최근에는 구조설계에 주로 활용되었던 위상 최적화 기법⁽⁴⁻⁹⁾-초기 설계 없이 최적화된 형상을 찾을 수 있는 기법-이 음향과 관련된 문제에도 적용되고 있다. Lee et al.⁽¹⁰⁾은 유전 알고리즘(genetic algorithm)을 이용하여 방사 소음을 줄일 수 있는 박판의 위상을 최적화하는 연구를 수행하였다. Wadbro⁽¹¹⁾은 위상 최적화 기법을 이용하여 방사 효율을 증가시킬 수 있는 혼(acoustic horn)을 설계하는 방법을 제시하였다. 그러나, 머플러 설계 분야에 위상최적화 기법이 적용된 연구는 보고된 적이 없다.

본 논문에서는 유한요소기반 머플러 내부 구조 위상최적화 설계 정식화를 제안하였다. 최적화 과정의 마지막 단계에서 유한 요소모델의 각각의 요소가 공기 또는 강체가 될 수 있도록 음향 물성치를 벌칙 함수(penalty function)로 보간 하였다. 전달

† 책임저자; 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

멀티스케일 설계 창의 연구단

E-mail : jw062nam@yahoo.co.kr

Tel : (02) 880-7130, Fax : (02) 872-5431

* 정회원, 서울대학교 기계항공공학부, 멀티스케일 설계 창의 연구단

손실은 세 점 계산법(three-point method)⁽¹²⁾으로 구했으며, 설계 변수 개선(update)은 미분 기반의 최적화 기법인 MMA(Method of Moving Asymptotes)⁽¹³⁾를 사용하였다. 본 연구에서는 여러 목적 주파수에서 최대의 전달손실을 갖도록 동심원 확장방머플러의 내부 형상을 최적화하였다. 허용된 내부형상의 강제 부피에 따라, 머플러 최적 형상이 어떻게 변화하는지도 살펴보았다.

2. 머플러 설계를 위한 위상최적화 기법

머플러의 내부 음압 p 는 식 (1)에 나타낸 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation)과 부가된 경계조건을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{K} \cdot p = 0 \quad (1)$$

위 식에서 ρ 는 음향 매질의 밀도, ω 는 진동수, K 는 Bulk modulus ($K = \rho c^2$)이다.

머플러의 유한 요소모델의 전달 손실은 세 점 계산법(three-point method)⁽¹²⁾을 이용하여 계산된다.

$$TL = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{p_3} \frac{p_1 - p_2 \cdot e^{-jk \cdot x_{12}}}{1 - e^{-j2k \cdot x_{12}}} \right| \quad (2)$$

p_1, p_2 는 입구단의 두 점 음압을, p_3 출구단의 음압을 나타낸다. x_{12} 는 입구단 두 점의 거리를 나타내고, k 는 파수(wave number: ω/c)이다.

물리적으로 의미 없는 최적해를 피하기 위해, Fig. 1 과 같이 비설계 영역과 설계 영역을 설정한다. 최적화 과정 동안, 설계 영역에 속한 유한 요소의 음향 물성치는 각 요소에 하나씩 부여된 설계 변수(χ_e)에 따라 변화하게 된다. 최적해에서는 각 요소가 공기 또는 강체벽이 되도록 식(3)과 같은 보간 함수(interpolation function)를 이용한다. 따라서, $\chi_e = 0$ 일 때, 해당 요소는 공기이고, $\chi_e = 1$ 일 때, 해당 요소는 강체벽이다.

$$1/\rho_e(\chi_e) = 1/\rho_{air} + \chi_e^p (1/\rho_{rigid} - 1/\rho_{air}) \quad (3-a)$$

$$1/K_e(\chi_e) = 1/K_{air} + \chi_e^p (1/K_{rigid} - 1/K_{air}) \quad (3-b)$$

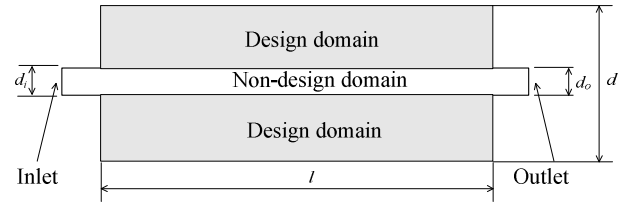


Fig. 1 Analysis model

머플러 설계를 위한 음향 위상최적화 문제의 목적함수(objective function)와 제한 조건(constraint)은 식 (4)와 같다.

$$\max_{0 \leq \chi_e \leq 1} L = \sum_t TL_t(f_t) \quad (4-a)$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} \chi_e / N_e \leq V_o \quad (4-b)$$

위 식에서 f_t 는 목적 주파수(target frequency), N_e 는 설계변수의 전체 개수, V_o 허용된 강체벽의 부피 비율이다.

유한 요소법을 이용하면, 식 (1)은 다음의 식 (5)로 표현된다.

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (5)$$

식 (5)에서 \mathbf{P} 와 \mathbf{F} 는 각각 음압 벡터와 외력벡터이고, \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 은 시스템의 강성 행렬과 질량 행렬로, 다음과 같이 요소의 강성행렬 \mathbf{k}_n 과 질량행렬 \mathbf{m}_n 을 이용하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \sum_{n=1}^N \mathbf{k}_n, \quad \mathbf{M} = \sum_{n=1}^N \mathbf{m}_n \quad (6-a, b)$$

본 연구에서 사용하는 최적화 알고리즘인 MMA (Method of Moving Asymptotes algorithm)⁽¹³⁾는 설계 변수 χ_e 에 대한 음압의 민감도를 필요로 한다. 이를 위해 식 (5)로부터 설계 변수에 대한 음압 \mathbf{P} 의 민감도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \chi_e} = -[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \chi_e} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \chi_e} \right] \mathbf{P} \quad (7)$$

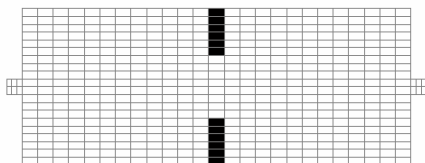
3. 동심 확장방 머플러 설계

앞서 정의한 음향 위상 최적화 기법을 2 차원 동심 확장방 머플러 설계에 적용하고자 한다. 계산에 사용된 머플러의 길이 l 은 1.0 m, 높이 d 는 0.4 m, 입구단과 출구단의 높이 (d_i, d_o) 는 모두 0.04 m 이다. 해석에 사용된 유한 요소 모델의 요소(element) 수는 512 개, 절점(node)의 수는 564 개이다. 20 °C 의 공기 물성치 ($\rho_{air} = 1.21 \text{ kg/m}^3$, $c_{air} = 343 \text{ m/s}$) 를 사용하였고⁽¹⁴⁾, 강체벽의 밀도와 음속은 각각 공기의 10^5 와 10 배 값을 사용하였다 ($\rho_{rigid} = 10^5 \cdot \rho_{air}$, $c_{rigid} = 10 \cdot c_{air}$).

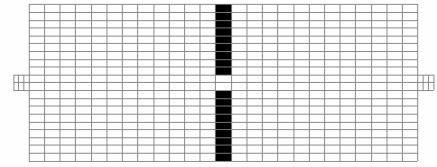
단순 확장방 머플러의 전달손실이 거의 0 에 가까운 172.4 Hz 부근의 전달손실을 증가시키기 위하여, 두 가지 방법으로 최적화된 확장방 머플러를 설계해 보았다. 즉, 목적 주파수가 한 개인 경우 ($f_t = 172.4 \text{ Hz}$)와 목적 주파수가 두 개인 경우 ($f_t = 170.0 \text{ Hz}$ and 175.0 Hz)에 대하여, 허용되는 강체벽의 부피 양에 따른 확장방의 최적형상을 구하고자 한다.

3.1 목적 주파수가 한 개인 경우

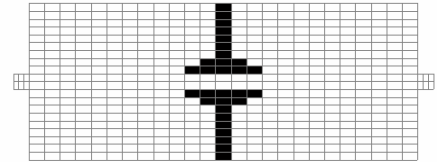
한 개의 목적 주파수 ($f_t = 172.4 \text{ Hz}$)에 대하여, 강체벽의 부피 비율을 12/450 에서 시작하여 2/450 씩 증가시키면서, 각 비율에 대한 최적의 머플러 위상을 구하였다. 최적해 중에서 대표적인 4 개의 최적위상을 Fig. 2 에서 비교하였다. 강체벽 부피가 증가함에 따라, 머플러 내부에는 일종의 격벽과 배플(baffle)이 생성되는데, 그 격벽의 위치는 목적 주파수에 해당하는 단순 확장방의 음향 모드 절선(nodal line) 지점과 거의 일치함을 알 수 있다.



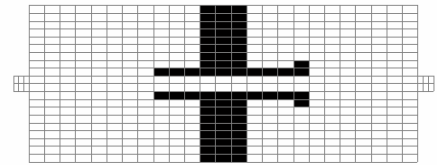
(a) $V_o = 0.0267$



(b) $V_o = 0.0400$



(c) $V_o = 0.0667$



(d) $V_o = 0.1556$

Fig. 2 Optimized results for a single target frequency

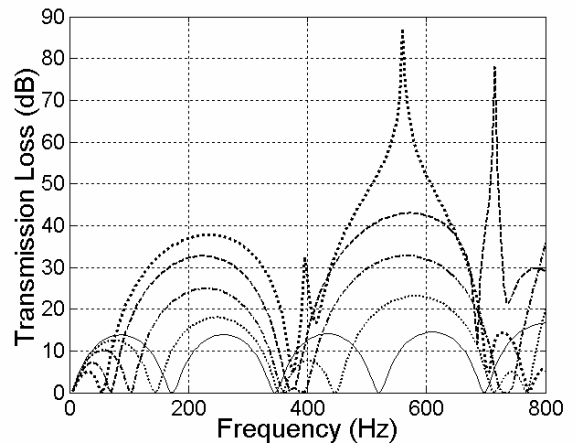


Fig. 3 Transmission loss curve for design problems involving a single target frequency:

— $V_o = 0.0000$, - - - $V_o = 0.0267$,
 ····· $V_o = 0.0400$, - · - · $V_o = 0.0667$,
 - - - - - $V_o = 0.1556$

Fig. 3 에서 알 수 있듯이, 강체벽의 부피비율이 증가함에 따라 목적 주파수의 전달손실 값은 증가하고, 유효 주파수 대역도 넓어졌다. 그리고, Fig. 4 는 최적화 과정에서 전달 손실 값이 어떻게 변화하는지를 보여주고 있다. 또한 몇 몇 중간 단계에

서의 변화되는 위상도 Fig. 4 에 표시하였다.

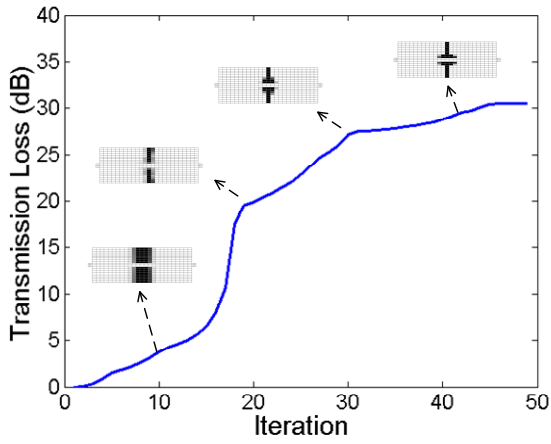


Fig. 4 History of transmission loss during optimization process

3.2 목적 주파수가 두 개인 경우

이번에는 관심 주파수 ($f_t = 172.4$ Hz) 주변의 두 주파수 ($f_t = 170.0$ Hz and 175.0 Hz)에서의 전달 손실 값의 합을 목적함수로 사용하여 음향 위상 최적화 과정을 진행하였다. 앞서와 마찬가지로 13 개의 허용된 강체벽의 부피 비율에 대하여, 최적의 머플러 내부 위상을 구하였다. 그 중 대표적인 4 개의 위상을 Fig. 5 에 나타내었다. Fig. 5-(a) ~ (c) 는 목적함수가 한 개인 경우와 동일하나, Fig. 5(d) 는 앞선 결과와 다르게 나타났다.

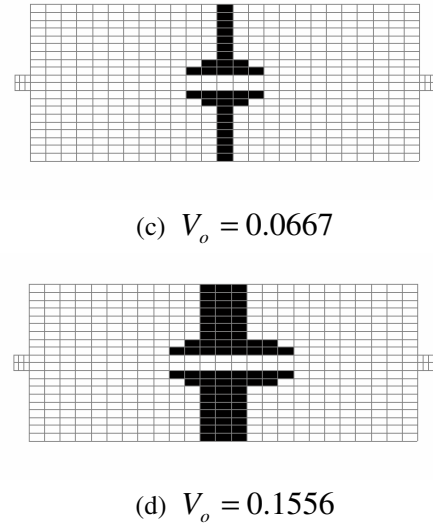
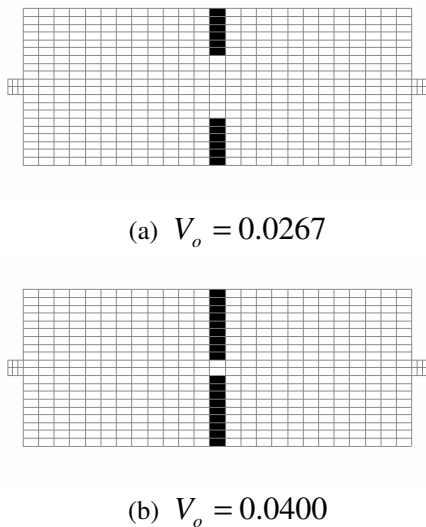


Fig. 5 Optimized results for two target frequencies

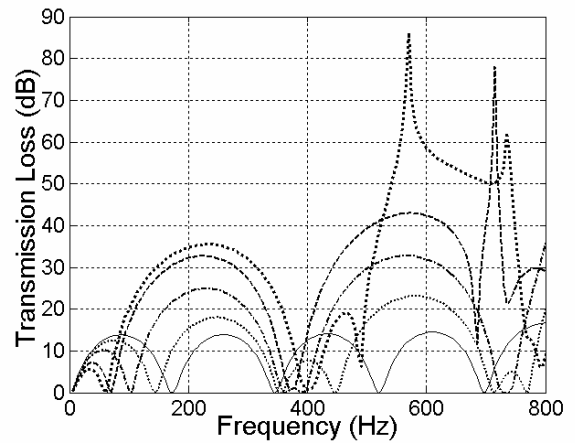


Fig. 6 Transmission loss curve for the design problem involving two target frequencies

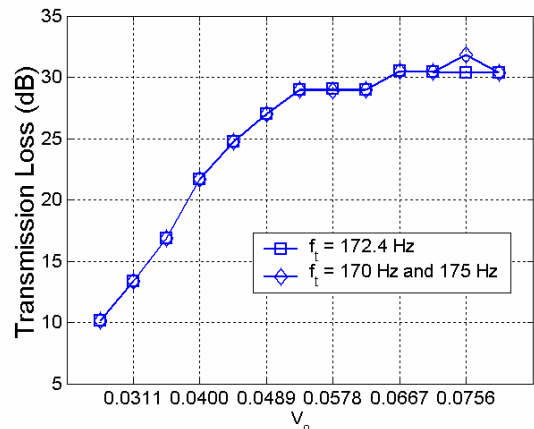


Fig. 7 Comparison of the optimized results for different target frequencies

Fig. 6 는 Fig. 5 에서 구한 최적 위상에 해당하는

머플러와 단순 확장방 머플러의 전달 손실 곡선을 서로 비교하였다. 앞선 결과와 마찬가지로, 강제벽의 부피비율이 증가함에 따라 전달손실 값이 상승하였다.

Fig. 7에서는 목적 주파수의 개수에 따른 결과를 비교해 보았다. 두 경우 거의 동일한 결과를 얻을 수 있었다.

4. 결론

위상 최적화 기법을 이용하여, 체계적으로 머플러의 내부구조를 설계하는 방법론을 제안하였다. 제안된 방법을 이용하여 동심 확장방 머플러의 설계를 성공적으로 수행하였다. 관심 주파수를 목적 주파수로 선정하는 경우와 관심 주파수 주변의 두 주파수를 목적 주파수로 선정하는 경우, 모두 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 허용되는 강제벽의 부피 비율이 증가함에 따라, 머플러의 내부에는 더 큰 격벽과 배플(baffle)이 생성되었고, 아울러, 관심 주파수의 전달 손실 값이 증가됨을 확인하였다.

후 기

이 연구는 서울대학교 정밀기계설계 공동연구소를 통해 체결된 창의적 연구진흥사업(한국 과학재단, 과제 번호 2006-033)의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Selamat A. and Radavich, P.M., 1997, "The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational and experimental investigation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 201, pp. 407~426.

(2) Selamat A. and Ji, Z.L., 1999, "Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/outlet," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, pp. 197~212.

(3) Barbieri R. and Barbieri, N., 2006, "Finite element acoustic simulation based shape optimization of a muffler," *Applied Acoustics*, Vol. 67, pp. 346~357.

(4) Bendsoe, M. P., and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, Vol. 71, No. 2 pp. 197~224.

(5) Bendsoe, M. P. and Sigmund, O., 2002, *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*, Springer, New York.

(6) Ma, Z., Kikuchi, N., and Cheng, H., 1995, "Topological design for vibrating structures," *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, Vol. 121 pp. 259~280.

(7) Ma, Z., Kikuchi, N., Cheng, H., and Hagiwara, I., 1995, "Topological optimization technique for free vibration problems," *Transaction of ASME: Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62 pp. 200~207.

(8) Ma, Z., Kikuchi, N. and I. Hagiwara, 1993, "Structural topology and shape optimization for a frequency response problem," *Computational Mechanics*, Vol. 13, pp. 157~174.

(9) Jog C.S., 2002, "Topology design of structures subjected to periodic loading," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 253, pp. 687~709.

(10) Lee, J., Wang, S. and Dikec, A., 2004, "Topology optimization for the radiation and scattering of sound from thin-body using genetic algorithms," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 276, pp. 899~918.

(11) Wadbro E. and Berggren, M., 2006, "Topology optimization of an acoustic horn," *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 420~436.

(12) Wu, T.W. and Wan, G.C., 1996, "Muffler performance studies using a direct mixed-body boundary element method and a three-point method for evaluating transmission loss," *Transaction of ASME: Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp. 479~484.

(13) Svanberg K., 1987, "The method of moving asymptotes: a new tool for structural optimization," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359~373.

(14) Kinsler, L.E., Frey, A.R., Coppens, A.B. and Sanders, J.V., 1982, *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley and Sons, New York.