

# 일정체적 캔틸레버 아치의 자유진동

## Free Vibrations of Cantilever Arches with Constant Volume

이 병 구·이 태 은\*·윤 희 민\*\*

Byoung Koo Lee, Tae Eun Lee and Hee Min Yoon

**Key Words** : free vibration(자유진동), cantilever arch(캔틸레버 아치), constant volume(일정체적).

### ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of cantilever arches with constant volume. Its cross-sectional shape is the regular polygon whose depth is varied with the linear functional fashion. The non-dimensional differential equations governing the free vibration of such arch are derived and solved numerically for calculating the natural frequencies. As the numerical results, the effects of arch parameters such as side number of cross section, section ratio and aspect ratio on the natural frequencies are reported in figures.

### 1. 서 론

아치 구조는 보, 기둥, 평판 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 토목, 건축, 기계 등 각종 구조 공학 분야에서 뼈대구조로 이용되고 있다. 일정체적을 갖는 부재는 최소중량 설계의 개념에서 매우 중요한 변단면의 형식이다<sup>1)</sup>.

이러한 관점에서 이 논문은 일정체적을 갖는 캔틸레버 아치의 자유진동을 해석하는데 연구목적이 있다. 이 연구에서 대상 아치는 단면이 정다각형이고 길이와 체적이 일정하며, 단면 깊이가 선형 함수로 변화하는 변단면으로 채택하였다.

### 2. 아치 부재의 정의

그림 1은 체적  $V$ 와 원호길이  $\rho$ 가 일정한 캔틸레버 아치를 나타낸다. 아치의 반경은  $r$ 이고 중심각은  $\alpha$ 이다. 고정지점으로부터 아치 축의 임의점까지의 곡선거리와 각도는 각각  $s, \theta$ 이다. 아치의 단면은 변수가  $k$ 인 정다각형 단면이며, 아치 축의 임의점  $(s, \theta)$ 에서 단면 깊이는  $h$ 이

다. 여기서 단면 깊이는 정다각형 단면의 도심으로부터 꼭짓점까지의 거리이다. 고정지점( $s=0, \theta=0$ )에서  $h=h_c$ 이고, 자유단( $s=l, \theta=\alpha$ )에서  $h=h_f$ 이다.

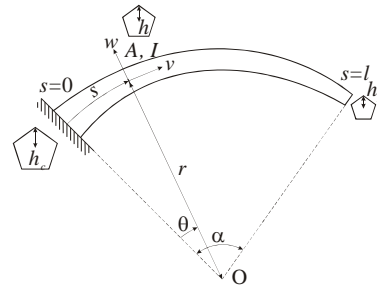


그림 1. 일정체적을 갖는 캔틸레버 아치

그림 1로부터  $\alpha$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 이 연구에서는 캔틸레버 아치의 특성상  $\alpha$ 의 범위를  $\pi$ 로 제한한다.

$$\alpha = l/r \quad 0 < \alpha \leq \pi \tag{1}$$

아치의 임의점까지의 각도는  $\theta$ 이므로 임의점까지의 곡선 길이  $s$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$s = r\theta \quad 0 < \theta \leq \alpha \tag{2}$$

아치 부재의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 단면비를 다음과 같이 도입한다.

$$e = h_f/h_c \tag{3}$$

† 책임저자, 정회원, 원광대학교 토목환경공학과 교수  
E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr  
Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204

\* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수

\*\* 정회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과 석사과정

단면 깊이  $h$ 인 정  $k$ 각형 단면의 단면적  $A$  단면2차 모멘트  $I$ 는 다음과 같다<sup>2)</sup>.

$$A=c_1h^2 \quad (4a)$$

$$c_1=k \sin(\pi/k) \cos(\pi/k) \quad (4b)$$

$$I=c_2h^4 \quad (4c)$$

$$c_2=(k/12) \sin(\pi/k) \cos^3(\pi/k) [3+\tan^2(\pi/k)] \quad (4d)$$

이 연구에서 아치의  $V, I$ 는 일정하므로  $h$ 는  $s$ 에 따라서 변화하는 함수식으로 정의된다.  $h$ 의 함수식으로는 모든 함수식이 가능하지만 이 연구에서는 다음과 같이 표현되는 선형 함수식으로 채택한다. 즉, 본 연구에서 변단면은 선형 변단면이다.

$$h=h_c[c_3(s/l)+1], \quad 0 \leq s \leq l \quad (5a)$$

$$c_3=e-1 \quad (5b)$$

아치 부재의 체적  $V$ 는 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$V=\int_0^l A ds=c_1c_4h_c^2l \quad (6a)$$

$$c_4=(e^2+e+1)/3 \quad (6b)$$

따라서 체적  $V$ , 길이  $l$  단면비  $e$ 인 정  $k$ 각형 단면을 갖는 아치 부재의  $h_c$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$h_c=\sqrt{V/(c_1c_4l)} \quad (7)$$

이제 원호 아치의 반경  $r$ 을 결정해주면 중심각  $\alpha(=l/r)$ 인 소정의 캔틸레버 아치의 형상이 정의된다. 따라서  $V, I$  일정한 아치 부재는  $k, e, r$ 에 따라서 무수히 많은 형상이 존재한다. 이렇게  $V, I$  모두 같은 아치의 형상들에 대한 자유진동 거동을 해석하는 것이 본 연구의 요점이다.

### 3. 수학적 모형

#### 3.1 동적 평형방정식

아치가 자유진동하게 되면 앞에서 나타낸 그림 1에서와 같이 곡률중심방향변위  $w$  접선방향변위  $v$ 가 발생한다. 여기서  $w, v$ 는 자유진동하는 동적 변위의 진폭을 나타낸다.

그림 2는 자유진동하는 아치의 미소 요소에 발생하는 합응력과 관성력을 나타낸다. 변위  $w, v$ 에 의하여 발생하는 축방향력  $N$  및 휨 모멘트  $M$ 은 다음과 같다.

$$N=(EA/r)(v'+w) + (EI/r^3)(w''+w) \quad (8)$$

$$M=-(EI/r^2)(w''+w) \quad (9)$$

여기서,  $(')=d/d\theta$   $E$ 는 탄성계수이다.

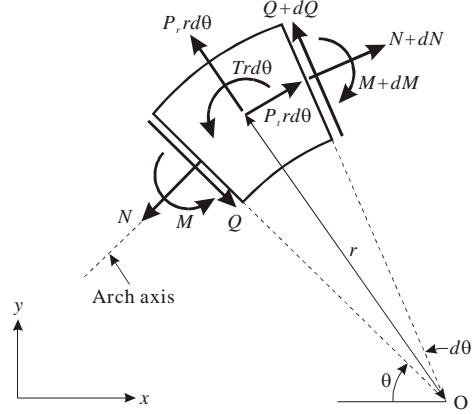


그림 2. 미소 요소에 작용하는 하중

아치가 자유진동하게 되면 질량을 갖고 있는 미소 요소에는 곡률중심방향 관성력  $P_r$ , 접선방향 관성력  $P_t$  및 회전 관성우력  $T$ 가 다음과 같이 발생한다.

$$P_r=\gamma\omega_i^2Aw \quad (10)$$

$$P_t=\gamma\omega_i^2Av \quad (11)$$

$$T=(\gamma\omega_i^2I/r)(w'-v) \quad (12)$$

여기서  $\gamma$ 는 질량밀도,  $\omega_i$ 는 고유각진동수,  $i(=1,2,3,4, \dots)$ 는 모드 번호이다.

그림 2로부터  $\sum F_x=0, \sum F_y=0, \sum M=0$ 을 이용하여 다음과 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$N'+Q+rP_t=0 \quad (13)$$

$$Q'-N+rP_r=0 \quad (14)$$

$$(1/r)M'-Q-T=0 \quad (15)$$

#### 3.2 미분방정식의 유도

앞에서 정의된  $s=r\theta, A=c_1h^2, I=c_2h^4, h=h_c \times [c_3(s/l)+1]$ 를 식 (9), (10)에 대입하면 다음과 같이  $N, M$ 식을 얻을 수 있다.

$$N=(Ec_1h_c^2/r)[c_3(r/l)\theta+1]^2(v'+w) + (Ec_2h_c^4/r^3)[c_3(r/l)\theta+1]^4(w''+w) \quad (16)$$

$$M=-(Ec_2h_c^4/r^2)[c_3(r/l)\theta+1]^4(w''+w) \quad (17)$$

마찬가지로 식 (11) ~ (13)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_r = c_1 h_c^2 \gamma \omega_i^2 [c_3 (r/d) \theta + 1]^2 w \quad (19)$$

$$P_t = c_1 h_c^2 \gamma \omega_i^2 [c_3 (r/d) \theta + 1]^2 v \quad (20)$$

$$T = (c_2 h_c^4 \gamma \omega_i^2 / r) [c_3 (r/d) \theta + 1]^4 (w' - v) \quad (21)$$

식 (18)로부터 구한  $M'$ 와 식 (21)을 식 (16)에 대입하면 다음과 같이 전단력  $Q$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= (1/r)M' - T \\ &= -(Ec_2 h_c^4 / r^3) [c_3 (r/d) \theta + 1]^4 (w''' + w') \\ &\quad - (4Ec_2 h_c^4 / r^3) [c_3 (r/d) \theta + 1]^3 (c_3 r/d) \\ &\quad \times (w'' + w) - (c_2 h_c^4 \gamma \omega_i^2 / r) [c_3 (r/d) \theta + 1]^4 \\ &\quad \times (w' - v) \end{aligned} \quad (22)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\delta = w/l \quad (23)$$

$$\eta = v/l \quad (24)$$

$$\rho = r/l \quad (25)$$

$$f = V/l^3 \quad (26)$$

$$C_i = \omega_i l^{2\sqrt{\gamma l / (EV)}} \quad (27)$$

여기서  $(\delta, \eta, \rho)$ 는  $(w, v, r)$ 을  $l$ 로 정규화한 변수이며,  $f$ 는 형상비,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이다.

이제 일정체적을 갖는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 구할 수 있다. 먼저 식 (22)에서 구한  $Q'$ , 식 (17), (19)를 식 (15)에 대입하고 식 (23) ~ (27)을 이용하면 식 (28)을 얻을 수 있다. 마찬가지로 식 (17)에서 구한  $N'$ , 식 (20), (22)를 식 (14)에 대입하고 식 (23) ~ (27)을 이용하면 식 (29)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta''' &= a_1 \delta'' + (a_2 + C_i^2 b - 2) \delta' + (a_1 + C_i^2 a_3) \delta \\ &\quad + (a_2 + a_4 + C_i^2 a_5 - 1) \delta + (a_4 - C_i^2 b) \eta' \\ &\quad - C_i^2 a_3 \eta \end{aligned} \quad (28)$$

$$\eta'' = (C_i^2 a_6 - 1) \delta' + a_7 \delta + a_7 \eta' + C_i^2 (-a_6 + b) \eta \quad (29)$$

여기서 계수  $a_1 \sim a_7$ ,  $b$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = -8c_3 \rho / (c_3 \rho \theta + 1) \quad (30a)$$

$$a_2 = -12c_3^2 \rho^2 / (c_3 \rho \theta + 1)^2 \quad (30b)$$

$$a_3 = -4c_3 f \rho^3 / (c_3 \rho \theta + 1) \quad (30c)$$

$$a_4 = -c_1^2 c_4 \rho^2 / [c_2 (c_3 \rho \theta + 1)^2] \quad (30d)$$

$$a_5 = c_1^2 c_4 \rho^4 / [c_2 (c_3 \rho \theta + 1)^2] \quad (30e)$$

$$a_6 = c_2 f^2 (c_3 \rho \theta + 1)^2 / (c_1^2 c_4) \quad (30f)$$

$$a_7 = -2c_3 \rho / (c_3 \rho \theta + 1) \quad (30g)$$

$$b = -f \rho^2 \quad (30h)$$

### 3.3 경계조건

고정지점  $\theta=0$ 에서  $w=0$ ,  $v=0$  및 회전각  $\phi = (1/r) \times (w' - v) = 0$ <sup>3)</sup>이므로 다음의 경계조건을 얻는다.

$$\delta = 0 \quad (31)$$

$$\eta = 0 \quad (32)$$

$$\delta' = 0 \quad (33)$$

자유단  $\theta=\alpha$ 에서  $N=0$ ,  $Q=0$ ,  $M=0$ 이므로 식 (9), (10), (22)를 이용하면 다음의 경계조건을 얻는다.

$$\eta' + \delta = 0 \quad (34)$$

$$(\delta''' + \delta') - C_i^2 b (\delta' - \eta) = 0 \quad (35)$$

$$\delta'' + \delta = 0 \quad (36)$$

## 4. 수치해석 예 및 토의

이상에서 유도한 미분방정식과 경계조건에 적당한 수치해석방법을 도입하면 주어진 조건에 대한 캔틸레버 아치의 무차원 고유진동수  $C_i$ 를 산출할 수 있다. 이 연구에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고 미분방정식의 고유치인  $C_i$ 는 행렬값 탐사법을 이용하여 산출하였다<sup>4)</sup>.

그림 1은  $C_i - e$  곡선을 나타낸다. 단면비  $e$ 값이 증가하면  $C_i$ 값은 감소한다. 모드 번호 별로 감소율이 다르기 때문에 두 곡선은  $\bullet$ 로 표시한  $(e, C_i)$ 에서 만나고 이  $e$ 값에서 두 개의  $C_i$ 값이 존재한다.

그림 2는  $C_i - f$  곡선을 나타낸다. 형상비  $f$ 값이 증가하면  $C_i$ 값은 감소한다. 그러나 제1모드인 경우에는  $C_i$ 값이 증가하다 최대치를 보인 후에 다시 감소한다.  $f$ 값 증가함에 따라서  $C_i$ 값은 일정 값에 수렴하는 경향이 있다.

그림 3은  $C_i - \rho$  곡선을 나타낸다. 무차원 반경  $\rho$ 값이 증가함에 따라서 제4모드를 제외하고는 감소하는 경향이 있으며 일정 값에 수렴한다.

그림 4는 동적 변위의 진동형  $\delta$ ,  $\eta$ ,  $\phi$ 의 예를 나타낸다.

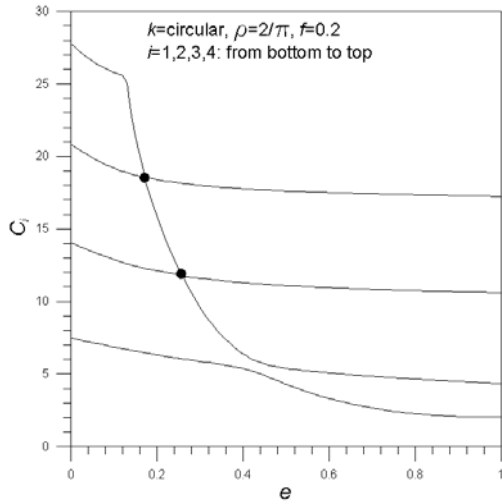


그림 3.  $C_i-e$  곡선

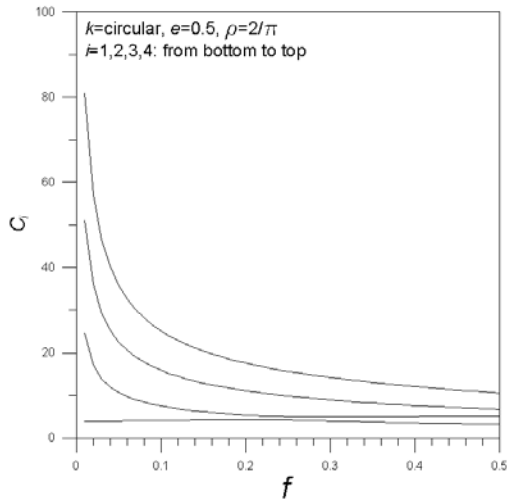


그림 4.  $C_i-f$  곡선

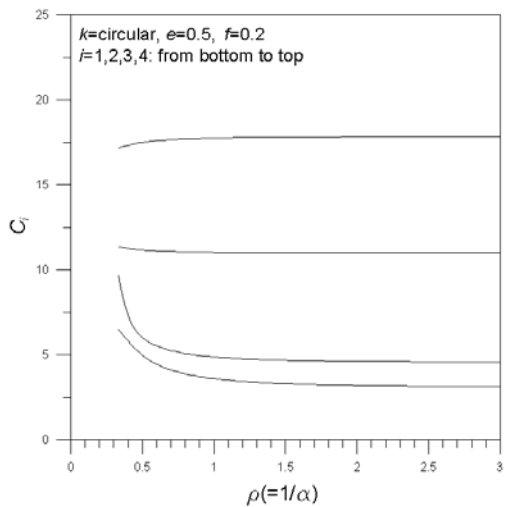


그림 5.  $C_i-\rho$  곡선

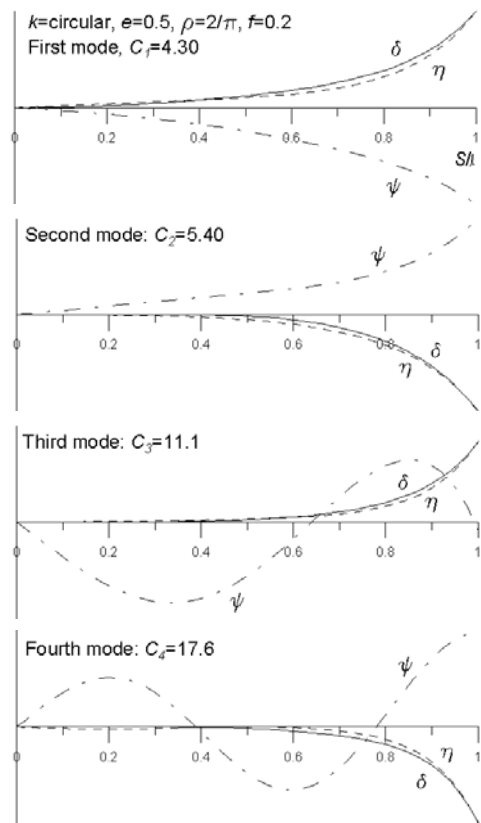


그림 6. 진동형의 예

## 5. 결론

이 논문은 일정체적 캔틸레버 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 아치의 단면은 정다각형이며 단면 깊이가 선형으로 변화하는 변단면이다. 이러한 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 아치의 변수 변화에 따른 고유진동수를 그림에 나타내었고 진동형의 예를 보였다.

## 참고 문헌

- (1) Haftka, R.T, Grudal, Z. and Kamat, M.P., 1990, Element of Structural Optimization, Klüver Academic, Publisher.
- (2) Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E. and Kim, I.L. 2006, "Buckling loads of columns with constant volume", Journal of Sound and Vibration, 294, pp. 381 ~387.
- (3) Lee, B.K and Wilson, J.F. 1990, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," 136(1), pp. 75 ~89.