

유체유동 회전 외팔 파이프의 동특성 및 안정성 해석

Dynamic Characteristics and Stability Analysis of a Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid

김동진** · 윤한익* · 손인수†

Dong-Jin Kim, Han-Ik Yoon and In-Soo Son

Key Words : Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid(유체유동 회전 외팔 파이프), Natural Frequency(고유진동수), Stability (안정성), Dynamic Characteristics (동특성).

ABSTRACT

In this paper the vibration system is consisted of a rotating cantilever pipe conveying fluid. The equation of motion is derived by using the Lagrange's equation. Also, the equation of motion is derived applying a modeling method that employs hybrid deformation variables. Generally, the system of pipe conveying fluid becomes unstable by flutter. So, we studied about the influences of the rotating angular velocity, mass ratio and the velocity of fluid flow on the stability of a cantilever pipe by the numerical method. The influences of mass ratio, the velocity of fluid, the angular velocity of a cantilever pipe and the coupling of these factors on the stability of a cantilever pipe are analytically clarified. The critical fluid velocity(u_{cr}) is proportional to the angular velocity of the cantilever pipe. In this paper Flutter(instability) always occur in the second mode of the system.

1. 서 론

이송유체를 갖는 파이프의 형태는 주변에서 흔히 볼 수 있는 구조물이다. 이송유체에 의하여 파이프의 끝단에 작용하는 집중 중동력의 영향에 의하여 발생하는 현상들에 대한 연구는 공학의 여러 분야에 걸쳐서 많은 관심의 대상이 되어 왔으며, 특히 유동유체에 의한 파이프 구조물의 동적안정성 및 진동특성에 관한 연구는 선형 및 비선형 해석을 통하여 지금까지도 활발히 진행되고 있다^(1~3). 이러한 연구들의 대부분은 Benjamin^(4,5)이 제시한 플러터(flutter) 불안정을 유발하는 임계유속에 깊은 관심을 두고 있다. 또한 이러한 영향을 고려한 회전하지 않는 유체유동 외팔 보에 관한 연구에 비해 회전하는 유체유동 외팔보에 관한 연구는 그리 활발하지 않은 실정이다. 회전 구조물에 관련된 모델링의 종류는 크게 3가지로 분류할 수 있다. 그 첫 번째는 직교 변형변수를 쓰는 선형 모델링이며, 두 번째는 비선형 모델링, 그리고 마지막으로 복합 변형변수를 쓰는 모델링 방법

이 있다⁽⁶⁾. 복합 변형변수 모델링이 선형 모델링과는 달리 비선형 모델링과 동등하게 회전 구조물의 정확한 동특성을 예측하게 하는 동시에 선형 모델링으로서의 효율성을 유지할 수 있다는 결과를 보여주었다^(6,7). 회전운동을 하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 Southwell⁽⁸⁾로부터 비롯하여 많은 연구자들에 의해 연구^(9,10)되어 졌다. 회전운동을 하는 외팔보에 대한 연구를 살펴보면 회전하는 유연 매니폴레이터의 비선형 자유진동해석⁽¹¹⁾, 끝단질량을 갖는 곡선보의 회전운동의 동특성 해석⁽¹²⁾ 그리고 회전 유체튜브의 동특성 해석⁽¹³⁾ 등 광범위하게 연구되어지고 있다. 최근 회전하는 외팔보에 크랙이 존재하는 경우 크랙이 회전 외팔보의 동특성에 미치는 영향에 대한 연구결과도 발표되었다⁽¹⁴⁾. 하지만 위의 많은 연구들에서는 회전운동을 하는 외팔보의 동적특성에 관한 내용에 치중되어 있고 안정성 평가에 대한 연구 결과들은 드물다. 따라서 이 연구에서는 회전 외팔 파이프의 안정성 해석을 위하여, 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용하는 계를 고려하였으며, 계의 운동방정식은 가정모드방법과 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치해석 하였다. 수치해석을 통하여 이송유체의 속도와 파이프의 회전각속도, 그리고 질량비에 따른 파이프의 동적특성 및 이들 각 요소가 외팔 파이프의 안정성에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

† 동의대학교 기계공학과

E-mail : isson92@deu.ac.kr

Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-2232

* 동의대학교 기계공학과

** 동의대학교 대학원 기계공학과

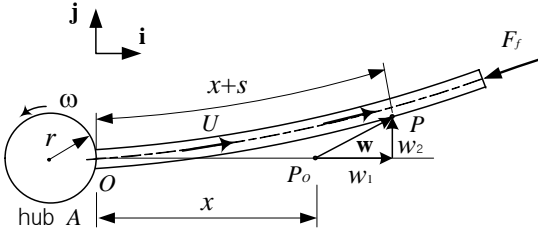


Fig. 1 Schematic diagram of a rotating cantilever pipe conveying fluid

2. 이론해석

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경 r 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체를 갖는 유연 외팔파이프를 모델링한 것이다. 중력의 영향과 이송유체를 가진 외팔파이프 시스템의 내부, 외부 감쇠는 고려하지 않았으며, 외팔파이프의 단면은 길이에 비해 아주 작고, 따라서 오일러 가정 및 보 이론을 적용하며, 보는 균질하고, 등방성이라 가정한다.

Fig. 1에서 x 는 외팔파이프의 고정점 O 로부터 변형전 임의의 절점 P_0 까지의 거리, s 는 변형전 임의의 절점 P_0 에서 변형후의 절점 P 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를 나타내며, \bar{u} 는 임의의 절점의 탄성변위 벡터를 나타낸다. 또, r 은 파이프가 부착된 고정축의 반경을 나타내며, v_f 는 유체의 속도를 의미한다. 외팔파이프의 회전운동 중에 생기는 탄성변형은 가정 모드법(assumed-mode method)을 이용하여 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서, $\phi_{1i}(x)$, $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 축방향과 횡방향 가정모드함수, $q_{1i}(t)$, $q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표를, 그리고 n 은 일반화 좌표의 수를 의미한다. 가정모드함수 $\phi_{1i}(x)$, $\phi_{2i}(x)$ 는 한쪽 단이 고정되고 다른 한쪽은 자유인 외팔보의 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi_{1i}(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \quad i = 1, 2, 3... \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2i}(x) &= \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) \\ &+ \alpha_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \end{aligned} \quad (4)$$

2.1 외팔파이프의 에너지식

변형에 따른 파이프의 임의의 절점 P 점의 속도는 다음 식

을 이용하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{P/A} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{w}) \quad (5)$$

여기서 \mathbf{v}_O 는 O 점의 속도, $\mathbf{v}_{P/A}$ 는 A 점에 대한 P 점의 상대속도, 그리고 $\boldsymbol{\omega}$ 는 축의 회전각속도를 나타내고 있다. 식 (5)의 각 항들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}_O = r\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_{P/A} = \dot{w}_1\mathbf{i} + \dot{w}_2\mathbf{j} \quad (6)$$

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j}$$

여기서 (\cdot) 는 시간 t 에 대한 미분을 나타내고, w_1 대신 축방향 변위 s 를 사용하기 위하여 w_1 과 s 사이의 관계는 다음의 기하학적 제한조건에 의해 결정할 수 있다.

$$s \approx w_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

따라서 중력의 영향을 무시한 외팔파이프의 운동에너지와 포텐셜에너지를 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} m \int_0^L (\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P) dx \quad (8)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EA_p \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (9)$$

여기서 EI 는 외팔파이프의 굽힘 강성계수, A_p 는 파이프의 단면적, 그리고 m 은 외팔파이프의 단위길이당 질량을 나타내며, L 은 외팔파이프의 전체 길이를 의미한다.

2.2 이송유체의 일과 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도가 U 이므로, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 유체의 절대속도의 수직성분, 즉 파이프의 횡방향 성분과 축방향에 평행한 수평성분은 각각 다음과 같다.

$$U_x = \dot{w}_1 - w_2\omega + U \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (10)$$

$$U_y = (r\omega + \dot{w}_2 + \omega w_1) + U \frac{\partial w_2}{\partial x}$$

여기서 (\cdot) 은 축방향 좌표 x 에 대한 미분을 의미한다. 따라서, 유속의 합은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v_f = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \quad (11)$$

따라서, 이송유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_f = \frac{1}{2} M \int_0^L (v_f v_f) dx \quad (12)$$

여기서 M 은 유체의 단위 길이당 질량이다.

접성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은 파이프의 끝단에 작용하는 집중 접선 중동력이 된다. 이러한 접선 중동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분되며 각각 다음과 같다.

$$W_c = \frac{1}{2} MU^2 \int_0^L \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (13)$$

$$\delta W_{nc} = -MU \left(U \frac{\partial w_2}{\partial x} + \dot{w}_2 \right) \delta w_2 \Big|_{x=L} \quad (14)$$

식 (14)의 두 번째 항은 코리올리력을 표현하고 있으며, 이는 유체를 갖는 외팔파이프에서 항상 감쇠역할로서 작용을 한다.

2.3 운동방정식 및 고유치 해석

계의 운동방정식은 앞 절에서 구한 계의 에너지 식 (8)~(14)를 다음의 라그랑즈 방정식을 이용하여 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (15)$$

여기서 L 은 Lagrangian으로서

$$L = (T_p + T_f - V_p) + W_c + \delta W_{nc} \quad (16)$$

이다. 운동방정식을 무차원화 하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수를 정의하였다.

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{L}, \quad d = \frac{q}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}, \\ \beta = \frac{M}{m+M}, \quad u = UL \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad R = \frac{r}{L}, \quad (17) \\ \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}, \quad \Omega_f = \omega L^2 \sqrt{\frac{M}{EI}}. \end{aligned}$$

식 (17)의 무차원 매개변수를 이용하여 다음과 같이 행렬 형태의 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$M\ddot{\mathbf{d}} + C\dot{\mathbf{d}} + K\mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (18)$$

여기서 $\mathbf{d} = [d_{1i}(\tau) \ d_{2i}(\tau)]^T$ 이며, $\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{D}e^{\lambda\tau}$ 로 표현할 수 있다. 고유치 λ 는 복소수 형태로써 $\lambda = a \pm ib$ 의 형태이다. 여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이다.

회전 외팔 파이프의 동적안정성은 고유치 λ 의 실수부인 a 의 부호에 의해 결정된다. 만약 $a < 0$ 이면 파이프는 안정하게 되며, $a > 0$ 이면 불안정이 되는데 이 때 허수부 $b = 0$ 의 경우 발산형 불안정, $b \neq 0$ 인 경우 플러터형 불안

정이 된다. 또, $a = 0$ 일 때는 안정과 불안정의 경계가 되는 임계값이며 이 때의 유속을 임계유속 u_{cr} 이라 한다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

앞 절에서 유도된 운동방정식을 이용하여 유체유동을 갖는 회전 외팔 파이프의 동적특성을 8차 모드까지 고려하여 수치해석 하였다. 먼저, 파이프의 회전각속도는 회전운동을 일반화하기 위하여 다음과 같은 형태의 함수(spin-up motion)를 사용하였다.

$$\omega = \begin{cases} \Omega_s \left[\frac{t}{T_s} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{T_s} \right) \right] & 0 \leq t \leq T_s \\ \Omega_s & t \geq T_s \end{cases} \quad (22)$$

여기서 T_s 는 Spin-up Motion 이 정상상태에 도달하기 위한 시간이며 Ω_s 는 정상상태에서의 각속도, 그리고 t 는 시간을 의미한다. Table 1은 이 연구의 수치해석 예제에 사용한 각 파라미터를 나타내고 있다.

Table 1 Specifications of rotating cantilever pipe conveying fluid

Property	Values
Length of pipe	1 m
Out-radius of pipe	0.025 m
In-radius of pipe	0.02 m
Bending stiffness	8.978 Nm ²
Density of pipe	2.766×10 ³ kg/m ³
Hub radius	0.05 m

Fig. 2는 이 연구에서 사용한 해석방법으로 해석한 연구 결과와 참고문헌 (1)의 연구결과를 서로 비교한 것이다. 해석에 사용한 회전 외팔보의 파라미터는 참고문헌 (1)의 값을 따랐다. 정상상태에서 약간의 변위차이를 보이고 있으나 대체적으로 결과들이 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 3은 동일한 무차원 파라미터를 적용하였을 때 이 연구에서 사용한 방법과 다른 연구에서 사용한 방법 (Hamilton's principle)의 결과의 회전 파이프의 횡방향 1, 2차 고유진동수를 서로 비교한 것이다. 여기서 사용한 무차원 회전 각속도는 유체가 없는 경우의 회전 각속도로써 $\Omega_m = \omega L^2 \sqrt{m/EI}$ 이다. 이 연구에서 구한 고유진동수와 참고문헌의 고유진동수 변화가 잘 부합됨을 확인할 수 있다. Fig. 2와 Fig. 3의 결과고찰로 미루어 보아 이 연구에서 사용한 수치해석 방법이 타당함을 확인할 수 있었다.

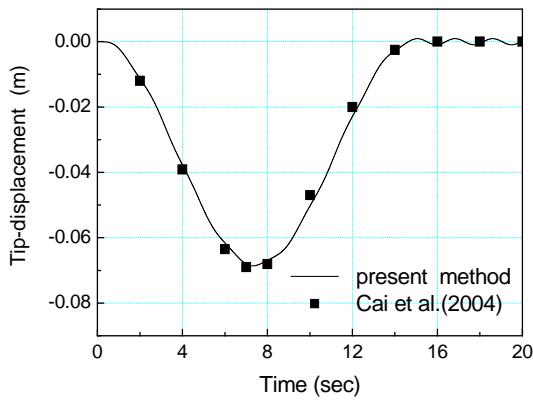


Fig. 2 Comparison between present numerical results and results of Ref. (15), $\omega = 4 \text{ rad/s}$, $T_s = 15 \text{ s}$

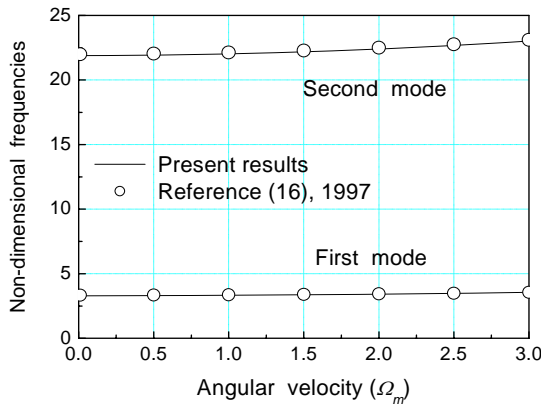


Fig. 3 Comparison between present numerical results in Ref. (16)

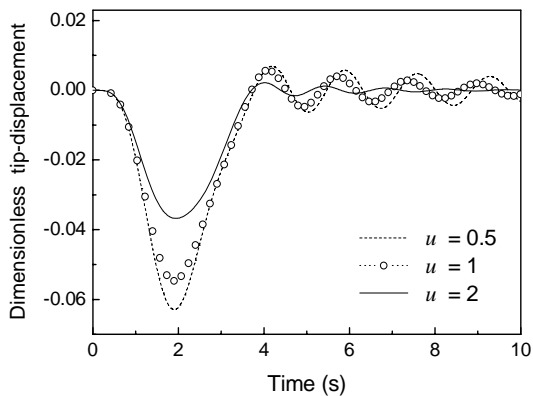
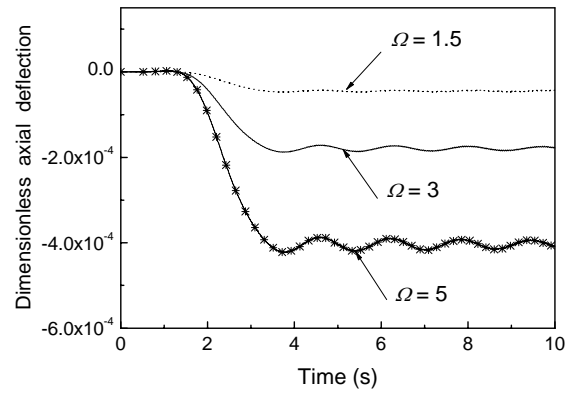
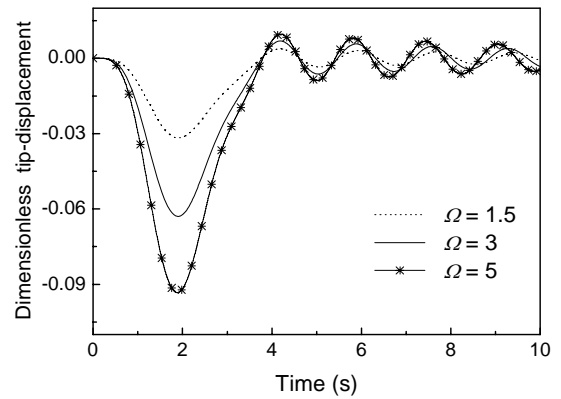


Fig. 4 Tip-response of a rotating cantilever pipe according to fluid velocity ($\Omega = 3$)

Fig. 4와 Fig. 5는 유속과 회전 각속도에 의한 회전 외팔 파이프의 변위를 보여주고 있다. 전반적으로 회전 각속도가 일정한 경우 유속과 파이프의 횡변위는 서로 반비례적인 경향을 보이고 있으며, 유속이 일정한 경우 파이프의 축방향



(a) Axial tip-deflection



(b) Bending tip-deflection

Fig. 5 Tip-response of a rotating cantilever pipe according to angular velocity ($u = 0.5$)

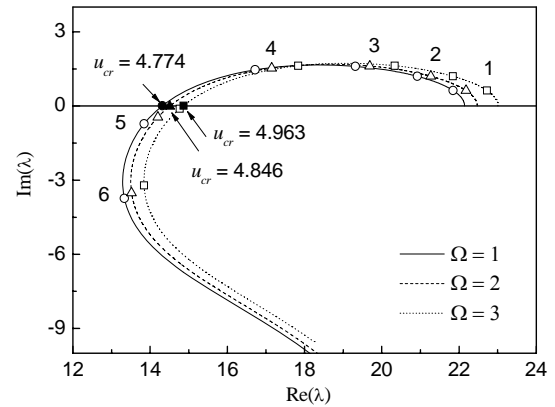
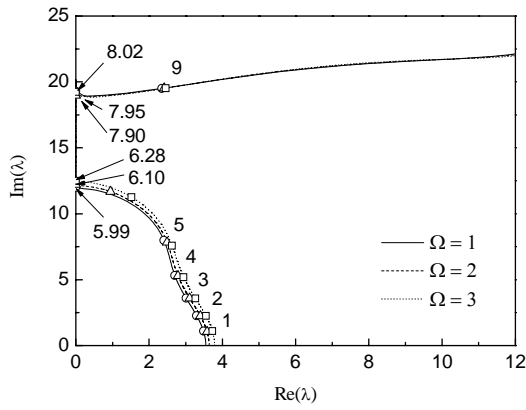
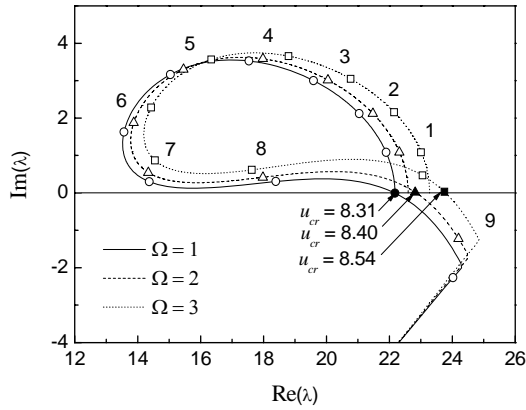


Fig. 6 The complex frequency of the rotating cantilevered system as a function of flow velocity for $\beta = 0.1$, first mode

및 횡방향 변위는 서로 비례적인 경향을 보인다. 회전 각속도에 따른 외팔 파이프의 횡변위를 살펴보면, 회전 각속도가 정상상태에 도달하기 전에 발생하는 회전 외팔파이프의 최대 처짐은 무차원 회전 각속도가 1.5일 때에 비하여 각속도가 5일 때 약 34.1% 정

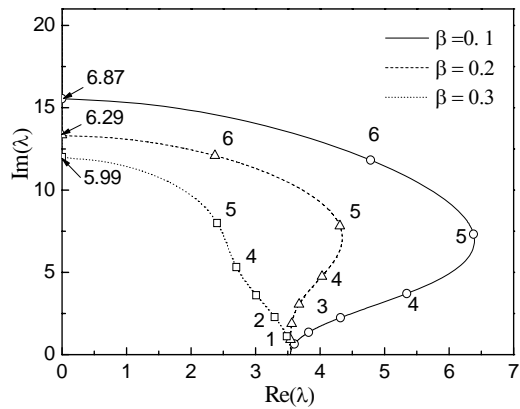


(a) First mode

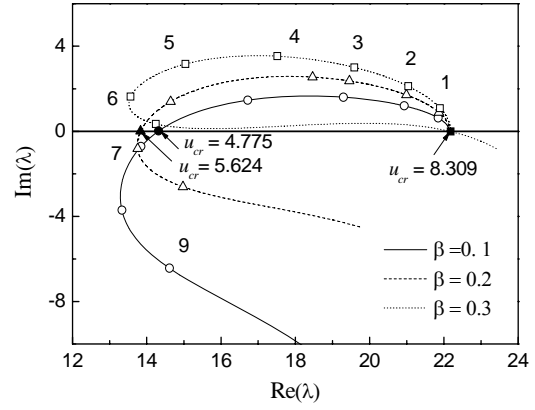


(b) Second mode

Fig. 7 The complex frequency of the rotating cantilevered system as a function of flow velocity for $\beta = 0.3$

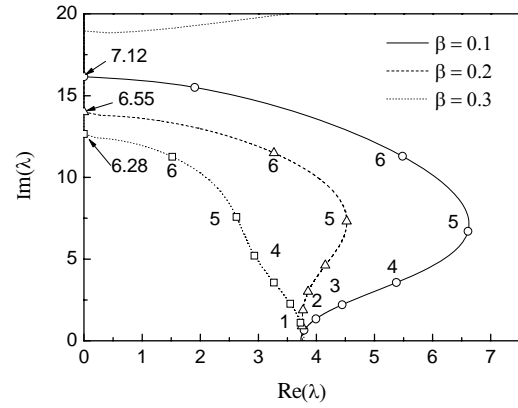


(a) First mode

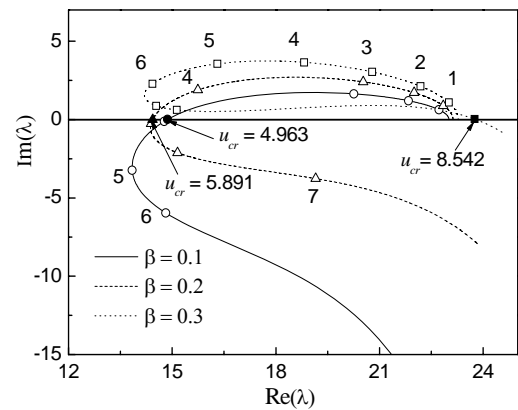


(b) Second mode

Fig. 8 The complex frequency of the rotating cantilevered system as a function of flow velocity for $\Omega = 1$



(a) First mode



(b) Second mode

Fig. 9 The complex frequency of the rotating cantilevered system as a function of flow velocity for $\Omega = 3$

도 증가함을 알 수 있다.

Fig. 6 - Fig. 9는 질량비 β 와 무차원 회전 각속도의 크기에 변화에 따른 유체유동 회전 외팔 파이프의 안정성을 해석한 결과이다. 즉, 파이프에 플러터 불안정을 일으키는 임계유속 값의 변화를 수치해석을 통하여 2차 모드까지 도시한 것이다. 전반적으로 회전 각속도가 빠를수록 임계유속 값은 증가하는 경향을 보이고 질량비가 클수록 임계유속 값은 커진다는 것을 확인 할 수 있다. 질량비와 임계유속의 비례적임은 회전하지 않은 외팔 파이프의 경우와 그 결과가 동일함을 판단할 수 있다. 또, 플러터 불안정에 미치는 영향은 회전 각속도의 영향에 비해 질량비에 의한 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

이 연구에서는 유체유동을 가진 회전 외팔 파이프의 안정성, 즉 플러터 불안정을 일으키는 질량비와 회전 각속도의 영향에 따른 임계유속의 변화에 대하여 수치해석 하였다. 전반적으로 동일한 질량비를 가진 경우 회전 각속도가 증가할수록 임계유속 값이 증가하며, 질량비와 임계유속 값은 서로 비례적인 경향을 가짐을 알 수 있다. 또, 파이프의 불안정을 유발하는 임계유속에 미치는 영향은 회전 각속도의 영향보다 질량비의 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Ryu, B. J., Jung, S. H. and Kang, Y. C., 1998, "A Study on the Dynamic Stability and Vibration Control of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Transactions of KSNVE, Vol. 17, No. 1, pp. 171~179.

(2) Langthjem, M. A. and Olhoff, N., 2003, "Modal Expansion of the Perturbation Velocity Potential for a Cantilevered Fluid-conveying Cylindrical Shell", Journal of Fluids and Structures, Vol. 17, pp. 147~161.

(3) Paidoussis, M. P., Sarkar, A. and Semler, C., 2005, "A Horizontal Fluid-conveying Cantilever: Spatial Coherent Structures, Beam Modes and Jumps in Stability Diagram", Journal of Sound and Vibration, Vol. 280, pp. 141~157.

(4) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 457~486.

(5) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(II. Experiments)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 487~499.

(6) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions", Journal of Sound and Vibration, Vo. 181, No. 2, pp.261~278.

(7) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Mass", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, pp.139~151.

(8) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.

(9) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," NACA TN No. 516.

(10) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," Journal of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.

(11) Hamdan, M. N. and Al-Bedoor, B. O., 2001, "Non-Linear Free Vibrations of a Rotating Flexible Arm", Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 5, pp. 839~853.

(12) Fung, E. H. K. and Yau, D. T. W., 2001, "Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 5, pp. 857~878.

(13) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-Plane And Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever", Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 1~24.

(14) Yoon, H. I. and Son, I. S., 2005, "Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Beam with Crack", Transactions of KSNVE, Vol. 15, No. 5, pp. 620~628.

(15) Cai, G. P., Hong, J. Z. and Yang, S. X., 2004, "Model Study and Active Control of a Rotating Flexible Cantilever Beam", International Journal of Mechanical Science, Vol. 46, pp. 871~889.

(16) Fung, E. H. K. and Shi, Z. X., 1997, "Vibration Frequencies of a Constrained Flexible Arm Carrying an End Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, No. 2, pp. 259~269.