

# 회전하는 두꺼운 링의 고유진동 해석을 위한 모델링

## Modeling for the Natural Vibration Analysis of a Rotating Thick Ring

김창부\*  
Kim, Chang-Boo

김보연\*\*  
Kim, Bo Yeon

---

### ABSTRACT

In this paper, the equations of motion by which the natural vibration of rotating thick ring can be analyzed accurately are presented. These equations are derived from the theory of finite deformation and the principle of virtual work. The effects of variation in curvature across the ring cross-section can be considered in these equations. The ring models are called as thick ring model and thin ring model respectively as the effects of variation in curvature are considered or neglected. The radial displacement of ring which is rotating at constant angular velocity is determined by a non-linear equation derived from the principle of virtual work. The equations of the in-plane and out-of-plane vibrations at disturbed state are also formulated from the principle of virtual work. They can be expressed as the combination of the radial displacement at the steady state and the disturbed displacements about the steady state. The natural vibrations of rings with different thickness are analyzed by using the presented ring models and 3-dimensional finite element method to verify accuracy of the presented equations of motion. Its results are compared and discussed.

---

### 1. 서 론

공학 구조물에서 중요한 요소 중에 하나인 링의 진동에 관하여 오래 전부터 많은 연구가 수행되어 왔다<sup>(1)</sup>. 특히 회전하는 링은 단순한 기하학적 구조를 갖고 있지만 링 보강재, 타이어, 기어, 링 자이로스 코프 등의 회전체와 공통적인 동특성을 갖고 있기 때문에 많은 연구 대상이 되어 왔다.

대표적인 연구로는 Carrier<sup>(2)</sup>가 회전하는 링에 관하여 선형탄성 이론으로부터 운동방정식을 유도하고 면내 고유진동을 해석하였고, Bert 등<sup>(3)</sup>이 Carrier의 연구를 바탕으로 링의 굽힘 전단 및 지지 강성을 고려하는 면내 및 면외 고유진동을 해석하였다. 또한 Endo 등<sup>(4)</sup>은 실험을 수행하여 면내 고유진동에 대한 실험결과와 이론결과를 비교하였다. 상기한 연구들은 두께가 반경에 비해서 매우 작아서 링 단면을 가로지르는 곡률의 변화 효과가 무시되는 얇은 링 모델을 사용하였다.

Bickford 등<sup>(5,6)</sup>은 링 단면을 가로지르는 곡률의 변화 효과를 고려하는 두꺼운 링 모델을 사용하여 회전으로 인한 원주방향 인장응력을 초기응력으로 고려하면서 원주방향 인장 변형을 무시한 경우의 운동 에너지와 변형에너지로부터 Hamilton 원리를 사용하여 운동방정식을 유도하고, 굽힘 전단 및 회전 관성에 의한 면내 및 면외 고유진동수의 변화에 관한 결과를 제시하였다.

Kim 등<sup>(7)</sup>은 단면을 가로지르는 곡률의 변화 효과가 무시되는 얇은 링에 대하여 유한변형 이론<sup>(8)</sup>을 이용하여 일정한 각속도로 회전하고 있는 정상상태에서의 링의 반경방향 변위 및 인장 응력을 가상일의 원리로부터 구하고, 정상상태로부터 교란된 변위로 표현되는 가상일의 원리를 사용하여 교란상태에서의 링의 면내 및 면외 진동에 관한 운동방정식을 유도하였고, 유도된 운동방정식을 굽힘 전단, 회전 관성, 원주방향 인장, 비틀림 관성 등의 2차 효과를 전부 또는 일부 고려하거나 무시하는 경우에 따라서 4개

---

\* 인하대학교, 기계공학부 교수, 정회원

E-mail : kimcb@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7383 FAX : (032)868-1716

\*\* 인하대학교대학원, 기계공학과 석사과정, 비회원

의 모델로 분류하여 얇은 링의 고유진동을 해석하여 그 결과를 비교하였다.

본 논문에서는 Kim 등<sup>(7)</sup>의 연구를 연장하여 단면을 가로지르는 곡률의 변화 효과를 무시할 수 없는 두꺼운 링에 대하여 일정한 각속도로 회전하고 있는 정상상태에서의 링의 반경방향 변위를 가상일의 원리로부터 구하고, 정상상태로부터 교란된 변위로 표현되는 가상일의 원리를 사용하여 교란상태에서의 면내 진동 및 면외 진동에 관한 운동방정식을 체계적으로 구축하고, 단면을 가로지르는 곡률의 변화 효과를 고려하는 두꺼운 링 모델과 곡률의 변화 효과를 무시하는 얇은 링 모델로 구분하여 제시하고 링의 고유진동을 해석하여 그 결과를 비교하고 검토한다.

## 2. 회전하는 링의 운동과 변형

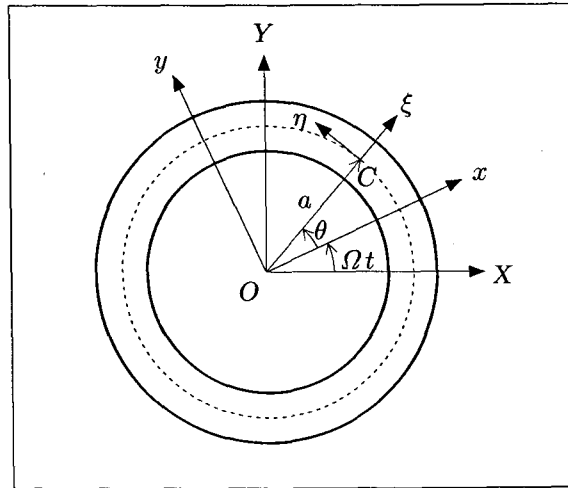


그림1. Geometry of a rotating ring

그림1에서처럼 링의 회전좌표계  $Oxyz$ 는 링과 함께 고정좌표계  $OXYZ$ 의  $Z$ 축 방향으로 일정한 각속도  $\Omega$ 로 회전하고 있다. 링의 원주방향에 수직인 단면의 면적  $A$ 는 일정하고 단면의 중심점을 지나는 중심선의 반경은  $a$ 이다.  $x$ 축에서 원주방향으로  $\theta$ 만큼 떨어진 단면의 기준 좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 는 단면의 중심점  $C$ 를 원점으로 하고 반경방향  $\xi$ , 접선방향  $\eta$ , 축방향  $\zeta$ 의 축을 갖는다. 단면은  $\xi$  및  $\zeta$ 축에 대하여 대칭이다.

링이 변형할 때에 단면은 모양이 변하지 않고 평면을 유지한다고 가정한다. 단면에 고착되어 움직이는 단면 좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 는 좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 와 일치한 상태에서  $\eta$ 축에 대하여  $\phi_\eta$ ,  $\zeta$ 축에 대하여  $\phi_\zeta$ ,  $\xi$ 축에 대하여  $\phi_\xi$  만큼 순차적으로 회전되고,  $\xi$ 축 방향으로  $u_\xi$ ,  $\eta$ 축 방향으로  $u_\eta$ ,  $\zeta$ 축 방향으로  $u_\zeta$  만큼 변위된다.

따라서 링 중심선에 수직한 단면상에서  $(\zeta, \xi)$ 에 위치한 질점  $P$ 의 변위는 다음과 같다.

$$\vec{u}_P = u_r \vec{e}_\xi + u_\theta \vec{e}_\eta + u_z \vec{e}_\zeta \quad (1)$$

여기서

$$\begin{aligned} r &= a + \xi \\ u_r &= u_\xi + \xi(c_\eta c_\zeta - 1) + \zeta(c_\eta s_\zeta s_\xi + s_\eta c_\xi) \\ u_\theta &= u_\eta + \xi(s_\zeta) + \zeta(-c_\zeta s_\xi) \\ u_z &= u_\zeta + \xi(-s_\eta c_\zeta) + \zeta(-s_\eta s_\zeta s_\xi + c_\eta c_\zeta - 1) \\ c_i &= \cos \phi_i, \quad s_i = \sin \phi_i \quad \text{for } i = \xi, \eta, \zeta \end{aligned}$$

변형 후의 질점  $P$ 의 절대속도, 절대가속도 및 가상변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{v}_P = \{-\Omega u_\theta + \dot{u}_r\} \vec{e}_\xi + \{\Omega(r+u_r) + \dot{u}_\theta\} \vec{e}_\eta + \dot{u}_z \vec{e}_\zeta \quad (2)$$

$$\vec{a}_P = \{-\Omega^2(r+u_r) - 2\Omega\dot{u}_\theta + \ddot{u}_r\} \vec{e}_\xi + \{-\Omega^2 u_\theta + 2\Omega\dot{u}_r + \ddot{u}_\theta\} \vec{e}_\eta + \ddot{u}_z \vec{e}_\zeta \quad (3)$$

$$\delta \vec{u}_P = \delta u_r \vec{e}_\xi + \delta u_\theta \vec{e}_\eta + \delta u_z \vec{e}_\zeta \quad (4)$$

따라서 밀도가  $\rho$ 인 회전하는 링의 가속도량(acceleration quantity)에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta A = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_A (\delta \vec{u}_P \cdot \rho \vec{a}_P) r dA d\theta \quad (5)$$

좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 에 대한 변위 구배(displacement gradient)행렬  $[h]$ 의 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_{\xi\xi} &= \frac{\partial u_r}{\partial \xi}, & h_{\xi\eta} &= \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}, & h_{\xi\zeta} &= \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \\ h_{\eta\xi} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi}, & h_{\eta\eta} &= \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & h_{\eta\zeta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \\ h_{\zeta\xi} &= \frac{\partial u_z}{\partial \xi}, & h_{\zeta\eta} &= \frac{\partial u_z}{r \partial \theta}, & h_{\zeta\zeta} &= \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (6)$$

좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 에 대한 Lagrange 변형도 행렬은 다음과 같다.

$$[\epsilon] = \frac{1}{2}([h] + [h]^T) + \frac{1}{2}[h]^T[h] \quad (7)$$

$\epsilon_{\xi\xi}, \epsilon_{\zeta\zeta}, \gamma_{\zeta\xi} (= \epsilon_{\zeta\xi} + \epsilon_{\xi\zeta})$ 는 0이 되므로 Kirchhoff응력과 Lagrange변형도의 관계를 Young계수  $E$ , Poisson 비  $\nu$ , 전단계수  $G = E/2(1+\nu)$ 로서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= E \epsilon_{\eta\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} &= G \gamma_{\eta\xi} = G(\epsilon_{\eta\xi} + \epsilon_{\xi\eta}) \\ \sigma_{\eta\zeta} &= G \gamma_{\eta\zeta} = G(\epsilon_{\eta\zeta} + \epsilon_{\zeta\eta}) \end{aligned} \quad (8)$$

따라서 링의 가상변형에너지는 다음과 같다.

$$\delta V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_A (\delta \epsilon_{\eta\eta} \sigma_{\eta\eta} + \delta \gamma_{\eta\xi} \sigma_{\eta\xi} + \delta \gamma_{\eta\zeta} \sigma_{\eta\zeta}) r dA d\theta \quad (9)$$

외력을 받지 않으면서 일정한 각속도로 회전하고 있는 링에 대한 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\delta A + \delta V = 0 \quad \forall \delta u_\xi, \delta u_\eta, \delta u_\zeta, \delta \phi_\xi, \delta \phi_\eta, \delta \phi_\zeta \quad (10)$$

단면을 가로지르는 곡률의 변화 효과를 무시하는 얇은 링 모델에서는  $\xi$ 를  $a$ 에 비하여 무시한다. 즉 식(5)과 식(9)에서  $r$ 대신에  $a$ 를 사용한다.

### 3. 회전하는 링의 운동방정식

#### 3.1 정상상태(steady state)에서의 평형 방정식

일정한 각속도  $\Omega$ 로 회전하고 있는 링의 정상상태에서의 변위는 링 형상의  $z$ 축에 대한 축대칭성 및 단면의  $\zeta$  및  $\xi$ 축에 대한 대칭성을 고려하면 다음과 같다.

$${}^s u_\xi = \text{constant}, {}^s u_\eta = 0, {}^s u_\zeta = 0, {}^s \phi_\xi = 0, {}^s \phi_\eta = 0, {}^s \phi_\zeta = 0 \quad (11)$$

변수의 왼쪽 윗 첨자  $s$ 는 정상상태에서의 변수 값을 나타낸다.

외력을 받지 않으면서 회전하는 얇은 링의 정상상태에서의 가상일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$${}^s \delta A + {}^s \delta V = 0 \quad \forall \delta u_\xi \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} {}^s \delta A &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \delta u_\xi [-\rho A \Omega^2 a^2 (1+Z+e)] d\theta \\ {}^s \delta V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \delta u_\xi {}^s N_\eta^* d\theta \\ {}^s N_\eta^* &= E \left[ A_1 e + \frac{3}{2} A_2 e^2 + \frac{1}{2} A_3 e^3 \right], \quad e = {}^s u_\xi / a, \quad Z = I_\zeta / (A a^2) \\ I_\zeta &= \int_A \xi^2 dA, \quad A_n = \int_A \frac{a^n}{(a+\xi)^n} dA \end{aligned}$$

따라서  $\eta$ 방향의 선형 인장 변형도  $e$ 는 다음과 같은 비선형방정식을 만족해야 한다.

$$\frac{A_1}{A} e + \frac{3}{2} \frac{A_2}{A} e^2 + \frac{1}{2} \frac{A_3}{A} e^3 = \frac{\rho \Omega^2 a^2}{E} (1+Z+e) \quad (13)$$

얇은 링 모델의 경우에는  $Z$ 는 0이 되고  $A_1, A_2$  및  $A_3$ 는 각각  $A$ 가 되므로 식(13)을 만족하는 선형 인장 변형도는 다음과 같고 참고문헌<sup>(7)</sup>의 식과 일치한다.

$$e = \sqrt{1 + 2\rho \Omega^2 a^2 / E} - 1 \quad (14)$$

### 3.2 교란상태(disturbed state)에서의 고유진동 방정식

정상상태로부터 교란된 변위는 다음과 같이 정의된다.

$${}^d u_i = u_i - {}^s u_i, \quad {}^d \phi_i = \phi_i - {}^s \phi_i \quad \text{for } i = \xi, \eta, \zeta \quad (15)$$

상기 식에서 변수의 왼쪽 윗 첨자  $d$ 는 정상상태로부터 교란된 변수 값을 나타내며, 정상상태에서의 미분연산자(differential operator)처럼 사용된다.

교란상태에서 선형화된 운동방정식은 면내진동 변위  ${}^d u_\xi, {}^d u_\eta, {}^d \phi_\zeta$ 와 면외진동 변위  ${}^d \phi_\xi, {}^d \phi_\eta, {}^d u_\zeta$ 에 관한 운동방정식으로 분리될 수 있으며 가상일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$${}^d \delta A_I + {}^d \delta V_I = 0 \quad \forall \delta u_\xi, \delta u_\eta, \delta \phi_\zeta \quad (16)$$

$${}^d \delta A_O + {}^d \delta V_O = 0 \quad \forall \delta \phi_\xi, \delta \phi_\eta, \delta u_\zeta \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} {}^d \delta A_I &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \delta u_\xi \left\{ \rho A ({}^d \ddot{u}_\xi - 2\Omega {}^d \dot{u}_\eta - \Omega^2 {}^d u_\xi) - \rho A a Z 2\Omega {}^d \dot{\phi}_\zeta \right\} + \delta u_\eta \left\{ \rho A ({}^d \ddot{u}_\eta + 2\Omega {}^d \dot{u}_\xi - \Omega^2 {}^d u_\eta) + \rho A a Z ({}^d \ddot{\phi}_\zeta - \Omega^2 {}^d \phi_\zeta) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \delta \phi_\zeta \left\{ \rho A a Z ({}^d \ddot{u}_\eta + 2\Omega {}^d \dot{u}_\xi - \Omega^2 {}^d u_\eta) + \rho I_\zeta ({}^d \ddot{\phi}_\zeta - \Omega^2 {}^d \phi_\zeta) + \rho A a^2 Z \Omega^2 {}^d \phi_\zeta + \rho A a Z (a + {}^s u_\xi) \Omega^2 {}^d \phi_\zeta \right\} \right] a d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^d\delta A_O &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \delta u_\zeta \left\{ \rho A {}^d\ddot{u}_\zeta - \rho A a Z {}^d\ddot{\phi}_\eta \right\} + \delta \phi_\xi \left\{ \rho I_\xi \left( {}^d\ddot{\phi}_\xi - 2\Omega {}^d\dot{\phi}_\eta - \Omega^2 {}^d\phi_\zeta \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \delta \phi_\eta \left\{ -\rho A a Z {}^d\ddot{u}_\zeta + \rho A a^2 Z {}^d\ddot{\phi}_\eta + \rho I_\zeta \Omega^2 {}^d\phi_\eta + \rho A a Z (a + {}^s u_\xi) \Omega^2 {}^d\phi_\eta + \rho I_\xi a \left( {}^d\ddot{\phi}_\eta + 2\Omega {}^d\dot{\phi}_\xi - \Omega^2 {}^d\phi_\eta \right) \right\} \right] a d\theta \\
{}^d\delta V_I &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \left\{ -\delta \phi_\zeta {}^d\phi_\zeta \right\} {}^s M_\zeta^* + \left\{ (\delta u_{\xi,\theta} - \delta u_\eta) ({}^d u_{\xi,\theta} - {}^d u_\eta) + (\delta u_{\eta,\theta} + \delta u_\xi) ({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi) \right\} {}^s N_\eta^{**}/a \right. \\
&\quad \left. + \left\{ -(\delta u_{\xi,\theta} - \delta u_\eta) {}^d\phi_\zeta - \delta \phi_\zeta ({}^d u_{\xi,\theta} - {}^d u_\eta) + (\delta u_{\eta,\theta} + \delta u_\xi) {}^d\phi_{\zeta,\theta} + \delta \phi_{\zeta,\theta} ({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi) \right\} {}^s M_\zeta^{**}/a \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \delta \phi_\zeta {}^d\phi_\zeta + \delta \phi_{\zeta,\theta} {}^d\phi_{\zeta,\theta} \right\} {}^s B_\zeta^{**}/a \right] d\theta \\
&\quad + \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ (\delta u_{\eta,\theta} + \delta u_\xi) {}^d N_\eta^* + \delta \phi_{\zeta,\theta} {}^d M_\zeta^* + \left\{ (\delta u_{\xi,\theta} - \delta u_\eta) + (a + {}^s u_\xi) \delta \phi_\zeta \right\} {}^d N_\xi \right] d\theta \\
{}^d\delta V_O &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \left\{ -\delta \phi_\eta {}^d\phi_\eta \right\} {}^s M_\zeta^* + \left\{ \delta u_{\zeta,\theta} {}^d u_{\zeta,\theta} \right\} {}^s N_\eta^{**}/a + \left\{ -\delta u_{\zeta,\theta} {}^d\phi_{\eta,\theta} - \delta \phi_{\eta,\theta} {}^d u_{\zeta,\theta} \right\} {}^s M_\zeta^{**}/a \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \delta \phi_{\eta,\theta} {}^d\phi_{\eta,\theta} \right\} {}^s B_\zeta^{**}/a + \left\{ (\delta \phi_{\eta,\theta} + \delta \phi_\xi) ({}^d\phi_{\eta,\theta} + {}^d\phi_\xi) + (\delta \phi_{\xi,\theta} - \delta \phi_\eta) ({}^d\phi_{\xi,\theta} - {}^d\phi_\eta) \right\} {}^s B_\xi^{**}/a \right] d\theta \\
&\quad + \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ (\delta \phi_{\xi,\theta} - \delta \phi_\eta) {}^d M_\xi^* + \left\{ \delta u_{\zeta,\theta} - (a + {}^s u_\xi) \delta \phi_\xi \right\} {}^d N_\zeta + (\delta \phi_\xi + \delta \phi_{\eta,\theta}) {}^d M_\eta \right] d\theta \\
{}^s N_\eta^{**} &= \int_A \left[ \frac{a}{(a+\xi)} {}^s \sigma_{\eta\eta} \right] dA = E \left\{ A_2 e + \frac{1}{2} A_3 e^2 \right\} \\
{}^s M_\zeta^{**} &= \int_A \left[ \frac{a}{(a+\xi)} \xi {}^s \sigma_{\eta\eta} \right] dA = -EA a \left\{ X_2 e + \frac{1}{2} X_3 e^2 \right\} \\
{}^s B_\zeta^{**} &= \int_A \left[ \frac{a}{(a+\xi)} \xi^2 {}^s \sigma_{\eta\eta} \right] dA = E \left\{ I_{\zeta 2} e + \frac{1}{2} I_{\zeta 3} e^2 \right\} \\
{}^s B_\xi^{**} &= \int_A \left[ \frac{a}{(a+\xi)} \xi^2 {}^s \sigma_{\eta\eta} \right] dA = E \left\{ I_{\xi 2} e + \frac{1}{2} I_{\xi 3} e^2 \right\} \\
{}^s M_\zeta^* &= \int_A \left[ \left\{ 1 + \frac{1}{(a+\xi)} {}^s u_\xi \right\} \xi {}^s \sigma_{\eta\eta} \right] dA = -EA a \left\{ X_1 e + \frac{3}{2} X_2 e^2 + \frac{1}{2} X_3 e^3 \right\} \\
{}^d N_\eta^* &= \int_A \left[ \left\{ 1 + \frac{1}{(a+\xi)} {}^s u_\xi \right\} {}^d \sigma_{\eta\eta} \right] dA = EA^* \frac{1}{a} ({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi) - EA a X^* \frac{1}{a} {}^d \phi_{\zeta,\theta} \\
{}^d M_\zeta^* &= \int_A \left[ \left\{ 1 + \frac{1}{(a+\xi)} {}^s u_\xi \right\} \xi {}^d \sigma_{\eta\eta} \right] dA = -EA a X^* \frac{1}{a} ({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi) + EI_\zeta^* \frac{1}{a} {}^d \phi_{\zeta,\theta} \\
{}^d M_\xi^* &= \int_A \left[ -\left\{ 1 + \frac{1}{(a+\xi)} {}^s u_\xi \right\} \zeta {}^d \sigma_{\eta\eta} \right] dA = EI_\xi^* \frac{1}{a} ({}^d \phi_{\xi,\theta} - {}^d \phi_\eta) \\
{}^d N_\xi &= \int_A [{}^d \sigma_{\eta\zeta}] dA = K_\xi GA_1 \frac{1}{a} \left\{ ({}^d u_{\xi,\theta} - {}^d u_\eta) + (a + {}^s u_\xi) {}^d \phi_\zeta \right\} \\
{}^d N_\zeta &= \int_A [{}^d \sigma_{\eta\kappa}] dA = K_\zeta GA_1 \frac{1}{a} \left\{ {}^d u_{\zeta,\theta} - (a + {}^s u_\xi) {}^d \phi_\xi \right\} + K_\zeta GA a X_1 \frac{1}{a} ({}^d \phi_{\eta,\theta} + {}^d \phi_\xi) \\
{}^d M_\eta &= \int_A \left[ \zeta {}^d \sigma_{\eta\kappa} - \xi {}^d \sigma_{\eta\kappa} \right] dA = K_\zeta GA a X_1 \frac{1}{a} \left\{ {}^d u_{\zeta,\theta} - (a + {}^s u_\xi) {}^d \phi_\xi \right\} + K_\eta G I_{\eta 1} \frac{1}{a} ({}^d \phi_{\eta,\theta} + {}^d \phi_\xi) \\
A^* &= A_1 + 2A_2 e + A_3 e^2, \quad X^* = X_1 + 2X_2 e + X_3 e^2, \quad I_\zeta^* = I_{\zeta 1} + 2I_{\zeta 2} e + I_{\zeta 3} e^2, \quad I_\xi^* = I_{\xi 1} + 2I_{\xi 2} e + I_{\xi 3} e^2 \\
X_n &= -\frac{1}{A} \int_A \frac{a^{n-1} \xi}{(a+\xi)^n} dA, \quad I_{\zeta n} = \int_A \frac{a^n \xi^2}{(a+\xi)^n} dA, \quad I_{\xi n} = \int_A \frac{a^n \zeta^2}{(a+\xi)^n} dA \\
I_m &= I_{\zeta n} + I_{\xi n}
\end{aligned}$$

상기 식에서  $I_\xi$ ,  $I_\eta$ ,  $I_\zeta$ 는 각각 링 단면의  $\xi$ 축,  $\eta$ 축,  $\zeta$ 축에 대한 관성모멘트이다. 또한  $K_\xi$ ,  $K_\zeta$  및  $K_\eta$ 는 링 단면에 작용하는 전단응력이 단면경계에서 응력경계조건을 만족하도록 단면의 전단(shearing) 및 뒤틀림(warping)을 고려하여 굽힘 전단력 및 비틀림 모멘트를 수정하기 위한 전단 계수 및 비틀림 계수이다.

얇은 링 모델의 경우에는  $Z$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  및  $X_3$ 는 각각 0이 되고  $A_1$ ,  $A_2$  및  $A_3$ 는 각각  $A$ 가 되며,  $I_{\zeta 1}$ ,  $I_{\zeta 2}$  및  $I_{\zeta 3}$ 는 각각  $I_\zeta$ 가 되고  $I_{\xi 1}$ ,  $I_{\xi 2}$  및  $I_{\xi 3}$ 는 각각  $I_\xi$ 가 되므로 식(16)과 식(17)은 참고문헌<sup>(7)</sup>의 식과 일치하게 된다.

진동수  $\omega_n$ , 절직경수(number of nodal diameters)  $n$ 의 순환대칭모드로 진동하는 링의 면외 진동 변위

는 다음과 같이 표현된다.

$${}^d u_o = ({}^d \phi_\xi, {}^d \phi_\eta, {}^d u_\zeta)^T = \text{Re}[(U_{OC} \cos n\theta + U_{OS} \sin n\theta) e^{j\omega_n t}] \quad (18)$$

식(18)을 가상일의 원리 식(17)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 면의 고유진동 방정식이 얻어진다.

$$\left[ (j\omega_n)^2 \begin{bmatrix} M_{OS} & 0 \\ 0 & M_{OS} \end{bmatrix} + (j\omega_n) 2\Omega \begin{bmatrix} M_{OG} & 0 \\ 0 & M_{OG} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{OS} - \Omega^2 M_{OC} & -K_{OA} \\ K_{OA} & K_{OS} - \Omega^2 M_{OC} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} U_{OC} \\ U_{OS} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서  $j = \sqrt{-1}$ 이며,  $M_{OS}$ ,  $K_{OS}$  및  $M_{OC}$ 는 대칭행렬이고  $M_{OG}$  및  $K_{OA}$ 는 사대칭행렬이다.

식(19)을 만족하는 고유진동수  $\omega_n$ 는 실수이며, 부호가 다른 고유진동수가 존재한다. 고유진동수  $\omega_n > 0$ 에 대한 고유벡터가  $(U_{OC}, U_{OS})$ 이면 고유진동수  $-\omega_n$ 에 대한 고유벡터는  $(U_{OC}, U_{OS})$ 의 공액인  $(\bar{U}_{OC}, \bar{U}_{OS})$ 이다. 따라서 면의 고유진동 변위는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$${}^d u_o = \frac{1}{2} \text{Re}[(U_{OC} - jU_{OS}) e^{j(n\theta + \omega_n t)}] + \frac{1}{2} \text{Re}[(U_{OC} + jU_{OS}) e^{-j(n\theta - \omega_n t)}] \quad (20)$$

상기 식으로부터  $n \geq 1$ 일 때의 면의 고유진동 변위는  $U_{OC} - jU_{OS} = 0$ 이면 전향 진행파(forward traveling wave)이고,  $U_{OC} + jU_{OS} = 0$ 이면 후향 진행파(backward traveling wave)임을 알 수 있다.

고정좌표계에서 본  $\phi = \theta + \Omega t$ 에 위치한 단면의 면의 고유진동 변위는 다음과 같다.

$${}^d v_o(\phi, t) = {}^d u_o(\theta, t) = \frac{1}{2} \text{Re}[(U_{OC} - jU_{OS}) e^{j(n\phi + p_n t)}] + \frac{1}{2} \text{Re}[(U_{OC} + jU_{OS}) e^{-j(n\phi - p_n t)}] \quad (21)$$

여기서  $p_n$ 는 고정좌표계에서의 고유진동수로서 고유진동 변위가 전향 진행파이면  $p_n = \omega_n + n\Omega$ , 후향 진행파이면  $p_n = \omega_n - n\Omega$ 이 된다.

면내 고유진동은 상기한 면의 고유진동과 같은 방법으로 해석된다.

#### 4. 회전하는 링의 고유진동 해석

수치해석에서 사용되는 두께가  $b$ 인 정사각형 단면을 갖는 링의 물성치 및 단면계수는 다음과 같다.

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3, E = 207 \text{ GPa}, G = 80 \text{ GPa}, K_\zeta = 0.85, K_\eta = 0.85, K_\gamma = 0.84346.$$

$a = 0.100 \text{ m}$ ,  $b/a = 0.2$  및  $0.4$ 인 어느 정도 두꺼운 링에 대하여 제시된 두꺼운 링 모델과 얇은 링 모델 및 3차원 유한요소 모델을 각각 사용하여 링의 고유진동을 해석하였다. 유한요소 모델에서는 링을 원주방향으로 30등분하고 등분된 링 단편을 반경방향으로 8등분, 축방향으로 8등분, 원주방향으로 4등분하여 분할된  $8 \times 8 \times 4$ 개의 육면체 20절점 고체요소를 사용하고 링 단편의 순환대칭성을 이용하는 유한요소법<sup>(9)</sup>을 사용하여 고유진동을 해석하였다.  $n=0$ 의 경우에는 3개의 모든 해석모델에 대하여 최저차 면내 및 면의 고유진동수는 0이며 고유모드는 링의  $z$ 축 방향 강제 회전운동 및 강제 병진운동이다.

도표 1 및 도표 2에는  $n=1, 2, 3$ 의 각각의 경우에 각속도  $\Omega$ 가 0, 1000 및 2000 rad/s일 때 계산된 2개의 최저차 면내 및 면의 굽힘 고유진동수를 제시하였다. B는 후향 진행파의 경우이고, F는 전향진행파의 경우이다.

도표 1에서  $n=1$ 의 경우에는 3개의 모든 해석모델에 대하여 2개의 최저차 면내 굽힘 고유진동수는 각속도  $\Omega$ 와 정확히 일치하고 진행파는 모두 후향 진행파이다. 따라서 고정좌표계에서의 2개의 최저차 면내 굽힘 고유진동수는 모두 0이 되며 고유모드는  $X-Y$ 면에서의 강제 병진운동이다.  $n=2, 3$ 의 경우에는 두꺼운 링 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수는 얇은 링 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수에 비해서 3차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수에 매우 근접하고 있다.

도표 2에서  $n=1$ 의 경우에는 3개의 모든 해석모델에 대하여 후향 진행파의 면의 굽힘 고유진동수는

도표 1. Comparison of the natural frequencies of in-plane bending vibration

n	$\Omega$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)					
		b/a = 0.2			b/a = 0.4		
		Thick Ring Model	Thin Ring Model	3D FE Model	Thick Ring Model	Thin Ring Model	3D FE Model
1	0	0	0	0	0	0	0
	1000	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B
	2000	2000 B 2000 B	2000 B 2000 B	2000 B 2000 B	2000 B 2000 B	2000 B 2000 B	2000 B 2000 B
2	0	7811	7746	7812	14870	14420	14880
	1000	7109 F 8697 B	7034 F 8640 B	7111 F 8696 B	14140 F 15700 B	13660 F 15280 B	14160 F 15710 B
	2000	6585 F 9762 B	6499 F 9712 B	6586 F 9758 B	13510 F 16630 B	12990 F 16240 B	13530 F 16630 B
3	0	21440	21250	21460	38260	37090	38410
	1000	20990 F 22160 B	20770 F 21990 B	21010 F 22180 B	37770 F 38900 B	36530 F 37800 B	37920 F 39040 B
	2000	20800 F 23150 B	20550 F 22990 B	20820 F 23160 B	37440 F 39700 B	36110 F 38660 B	37590 F 39820 B

도표 2. Comparison of the natural frequencies of out-of-plane bending vibration

n	$\Omega$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)					
		b/a = 0.2			b/a = 0.4		
		Thick Ring Model	Thin Ring Model	3D FE Model	Thick Ring Model	Thin Ring Model	3D FE Model
1	0	0	0	0	0	0	0
	1000	986.9 F 1000 B	986.8 F 1000 B	986.9 F 1000 B	950.0 F 1000 B	948.7 F 1000 B	950.0 F 1000 B
	2000	1974 F 2000 B	1974 F 2000 B	1974 F 2000 B	1900 F 2000 B	1898 F 2000 B	1900 F 2000 B
2	0	7344	7373	7320	13600	13780	13430
	1000	7577 F 7623 B	7610 F 7656 B	7553 F 7599 B	13650 F 13800 B	13830 F 13990 B	13480 F 13630 B
	2000	8276 F 8367 B	8317 F 8410 B	8249 F 8341 B	13940 F 14250 B	14140 F 14460 B	13770 F 14080 B
3	0	20600	20710	20520	35620	36190	35050
	1000	20770 F 20850 B	20880 F 20950 B	20690 F 20770 B	35610 F 35840 B	36190 F 36420 B	35030 F 35270 B
	2000	21340 F 21490 B	21460 F 21610 B	21250 F 21400 B	35810 F 36270 B	36410 F 36870 B	35220 F 35690 B

각속도  $\Omega$ 와 정확히 일치하고 있으며 전향 진행파의 면외 굽힘 고유진동수는  $\Omega$ 보다 약간 작다. 따라서 고정좌표계에서의 후향 진행파의 면외 굽힘 고유진동수는 0이 되고 전향 진행파의 면외 고유진동수는 약  $2\Omega$ 보다 약간 작게 되며 고유모드는 강체 세차운동이며 축대칭 팽이의 느린 세차운동(slow precession) 및 빠른 세차운동(fast precession)<sup>(10)</sup>과 유사하다.  $n=2, 3$ 의 경우에는 면내 고유진동과 마찬가지로 두꺼운 링 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수는 얇은 링 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수에 비해서 3차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 고유진동수에 매우 근접하고 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 일정한 각속도로 회전하고 있는 링의 면내 및 면외 고유진동을 정밀하게 해석하기 위

하여 Lagrange 변형도를 사용하는 유한변형 이론 및 가상일의 원리를 이용하여 단면을 가로지르는 곡률의 변화 효과를 고려할 수 있는 두꺼운 링 모델을 체계적으로 유도하였다. 어느 정도 두꺼운 링에 대해서는 두꺼운 링 모델이 곡률의 변화 효과를 무시하는 얇은 링 모델에 비해서 해석 결과가 정밀함을 알 수 있었다.

## 참 고 문 헌

1. P. Chidamparam, and A.W. Leissa(1993), "Vibrations of Planar Curved Beams, Rings, and Arches," *Appl. Mech. Rev.*, ASME, Vol.46, No.9, pp.467-483.
2. G.F. Carrier(1945), "On the Vibration of the Rotating Ring," *Quarterly of Applied Mechanics*, Vol.3, pp.235-245.
3. C.W. Bert, and T.L.C. Chen(1978), "On Vibration of a Thick Flexible Ring Rotating at High Speed," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.61, No.4, pp.517-570.
4. M. Endo, K. Hatamura, M. Sakata, and O. Taniguchi(1984), "Flexural Vibration of a Thin Rotating Ring," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.92, No.2, pp.261-272.
5. W.B. Bickford, and E.S. Reddy(1985), "On the In-plane Vibrations of Rotating Ring," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.101, No.1, pp.13-22.
6. W.B. Bickford, and S.P. Maganty(1986), "Out-of-plane Vibrations of Thick Rotating Rings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.110, No.1, pp.121-127.
7. 김창부, 김세희(2006), "회전하는 얇은 링의 고유진동 해석을 위한 모델링," 한국소음진동공학회논문집, 제16권 1호, pp.57-65.
8. K. Washizu(1982), "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, Oxford.
9. 김창부, 심수섭(1998), "회전하는 순환대칭 구조물의 유한요소 진동해석 기법," 한국소음진동공학회지, 제8권 6호, pp.1150-1157.
10. L. Meirovitch(1970), "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill, New York.