변분법을 이용한 회전축의 스펙트럴요소 모델링

Spectral Element Modeling of Rotating Shafts by Using Variational Method

용석진* 이재상** 이우식***

Yong, Sukjin Lee, Jaesng Lee, Usik

ABSTRACT

In this paper, the vibration of a rotating shaft with a thin rigid disk is considered. It is assumed that the shaft has uniform, circular cross-section. Based on the Timoshenko-beam theory, the transverse displacements and slops in two lateral directions, the axial displacement, and the torsional deformation are considered. A spectral element model is developed by using the variation method for the vibration analysis of the rotating shaft with a thin rigid disk, which is modeled by two shaft elements and a thin rigid disk element. The result of vibration analysis by finite element method is compared to the result of this research.

1. 서 론

회전축은 컴퓨터 하드디스크, 항공기의 가스터빈 엔진, 연마기 및 차량의 동력전달 축 등 현대산업에서 많이 사용된다. 회전축의 주축과 기하학적 축이 서로 떨어져 있을 때 발생하게 되는 질량의 불균형은 진동을 야기하는 일반적인 요소이다. 또한 축의 고속회전은 더욱 큰 불균형 힘의 원인이 되고 최근 고속철도 등의 발달로 동력전달에 이용되는 회전축은 고속회전을 요구하고 있다. 그러므로 진동해석은 베어링의 수명과 고속회전이 요구되는 동력 전달 축 등에서는 필수적이다.

평면운동 회전체 모델(planar rotor model)은 1919년 Jeffcott[1]에 의해서 처음 소개되었다. Jeffcott의 모델은 고정된 강체 베어링에 물려있는 회전체를 질량이 없는 탄성축에 의해 지지된 강체 디스크였다. 좀 더 복잡한 회전체로 유연한 회전체 모델이 개발되었는데 이는 회전하는 동안 회전체의 탄성변형이 고려된 모델로 강체 회전체 모델보다 더욱 정확하다.

회전체를 해석하는 방법에는 크게 두 가지 방법이 사용되었다. 이는 유한요소법과 전달행렬법이다. 1972년 Ruhl과 Booker[2]는 회전체의 동역학적 특성 연구에 유한요소방법을 사용하였다. 이 연구에서는 탄성 굽힘과 병진운동에너지는 포함하였지만 회전관성효과, 회전효과(gyroscopic effect), 축방향 토크, 축방향력, 그리고 내부 감쇠는 무시하였다. Dimaragonas[3]는 1975년에 회전관성과 회전효과 그리고 내부감쇠가 고려된 좀 더 일반적인 모델을 제시하였고, Gasch[4]는 1976년에 Dimaragonas의 모델에 편심효과를 고려한 모델을 제시하였다. 같은 해에 Nelson과 McVaugh[5]은 회전관성과 회전모멘트(gyroscopic moments)와 축방향력이 포함된 모델을 제시하였고 Zorzi와 Nelson[6]이 내부 감쇠를 포함하여 일반화하였다. 또한 Nelson[7]은 1980년에 전단변형효과가 추가된 모델을 제시하였다. 유한요소방법은 많은 요소를 사용할수록 해가 정확해지지만 이를 계산하는 데 많은 시간이 필요하다는 단점을 가지고 있다. Lund와 Orcutt[8]는 1967년에 처음으로 회전체 동역학에 전달행렬법을 적용하였다. 이 방법은 사용하는 행렬의 사이즈가 유한요소법에 비해 작다는 장점이 있다. 하지만 Kumar와 Sankar[9]는 1984년에 시간

* 인하대학교 기계공학과 석사과정

** 인하대학교 기계공학과 석사과정

*** 교신저자, 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수

E-mail : ulee@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

영역에서와 비선형문제의 해석에 어려움이 있다는 단점을 제시하였다.

본 연구에서는 위 두 방법의 단점을 보완할 수 있는 스펙트럴요소방법에 대하여 변분법을 통해 모델링을 수행하였다.

2. 변분법에 의한 회전축의 스펙트럴요소 행렬 유도

회전축에 대한 축방향 변위, 비틀림 변위, 그리고 티모센코 보이론에 따르는 횡방향 변위와 기울기에 대한 각각의 지배방정식은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\rho A\ddot{u} - EAu'' = p_x(x,t) \\
&\rho J\ddot{\theta} - GJ\theta'' = \tau_x(x,t) \\
&\rho A\ddot{v} - \kappa GA(v'' - \psi') = p_y(x,t) \\
&\rho A\ddot{w} - \kappa GA(w'' + \phi') = p_z(x,t) \\
&\rho I\ddot{\psi} - \Omega\rho J\dot{\phi} - EI\psi'' - \kappa GA(v' - \psi) = \tau_z(x,t) \\
&\rho I\ddot{\phi} + \Omega\rho J\dot{\psi} - EI\phi'' + \kappa GA(w' + \phi) = \tau_y(x,t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 E는 탄성계수, ρ는 질량 밀도, A는 축의 단면적, J는 축의 극 관성모멘트이며 I는 관성모멘트이다. 이 때 위 식 (1)의 해를 조화해로 가정하고 여기에 weak form을 취하면 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left(EAU'' + \omega^2\rho AU + P_x\right)\delta U dx = 0 \\
&\int_0^L \left(GJ\Theta'' + \omega^2\rho J\Theta + T_x\right)\delta\Theta dx = 0 \\
&\int_0^L \left\{\kappa GA(V'' - \Psi') + \rho A\omega^2 V + P_y\right\}\delta V dx = 0 \\
&\int_0^L \left\{EI\Psi'' + i\Omega\rho J\omega\Phi + \kappa GA(V' - \Psi) + \rho I\omega^2\Psi + T_z\right\}\delta\Psi dx = 0 \\
&\int_0^L \left\{\kappa GA(W'' + \Phi') + \rho A\omega^2 W + P_z\right\}\delta W dx = 0 \\
&\int_0^L \left\{EI\Phi'' - i\Omega\rho J\omega\Psi - \kappa GA(W' + \Phi) + \rho I\omega^2\Phi + T_y\right\}\delta\Phi dx = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

위 식 (2)을 가지고 스펙트럴요소행렬식을 유도하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}_L(\omega)\boldsymbol{d}_L = \boldsymbol{f}_L \\
&\boldsymbol{S}_T(\omega)\boldsymbol{d}_T = \boldsymbol{f}_T \\
&\boldsymbol{S}_B(\omega)\boldsymbol{d}_B = \boldsymbol{f}_B
\end{aligned}
\tag{3}
$$

여기서 아래첨자 L은 축방향, T는 비틀림, B는 굽힘에 대한 것이다.

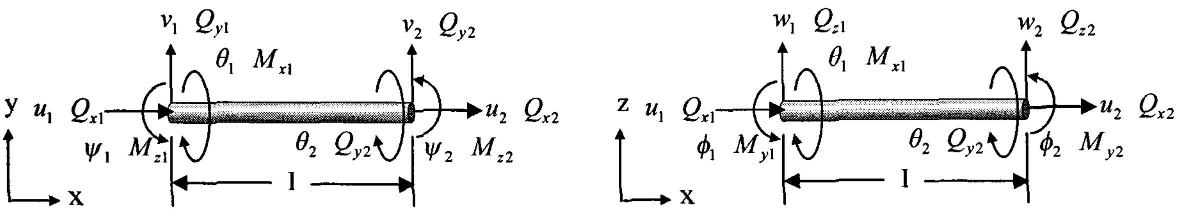


그림 1. 회전축에 대한 자유도와 외력

3. 디스크에 대한 스펙트럴요소 행렬

축의 회전속도인 Ω가 상수일 경우의 디스크에 대한 스펙트럴요소 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 m_D & 0 & 0 & -i\omega\Omega I_D \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^2 I_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 m_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega\Omega I_D & 0 & -\omega^2 I_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Theta \\ V \\ \Psi \\ W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ M_x \\ Q_y + F_{ey} \\ M_z \\ Q_z + F_{ez} \\ M_y \end{Bmatrix} \tag{4}$$

4. 수치 예제

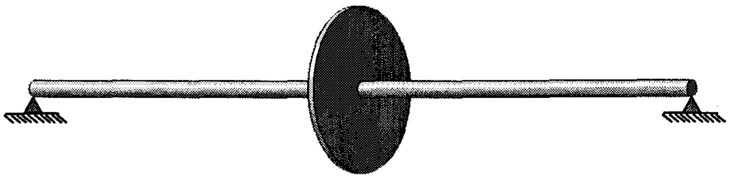
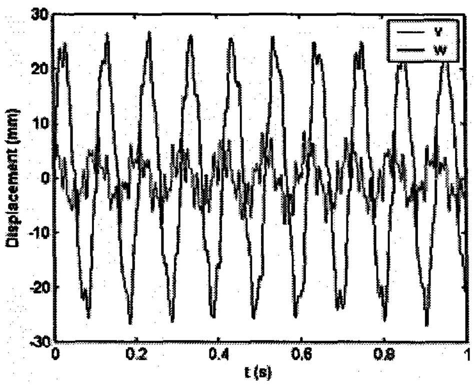
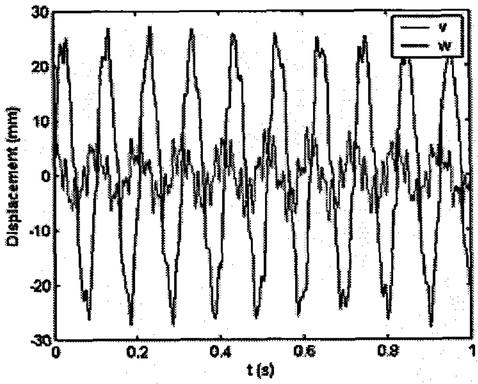


그림 2. 중심에 편심 된 디스크가 있는 단순지지 된 회전축

본 연구에서 유도한 스펙트럴요소 식을 그림 2의 예제에 적용하여 유한요소법의 결과와 비교하여 보았다. 여기서 사용된 물성치는 ρ=7700kg/m^3, E=207GPa, G=77.6GPa, L=2m 이다. 이 때 스펙트럴요소법에서는 2개의 요소를 사용하여 해석하였고 유한요소법에서는 2개의 요소부터 점차 요소 수를 늘여가면서 해석을 수행하였다. 그 결과 유한요소법을 통한 해석에서는 8개 요소부터 time history가 스펙트럴요소법의 해석 결과에 수렴해감을 볼 수 있었고, 이 결과에 대한 연산시간은 유한요소법은 1분 35초가 소요된 반면에 스펙트럴요소법은 28초가 소요되었다.

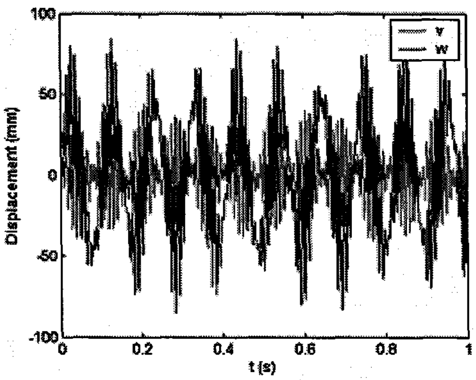


SEM(2)

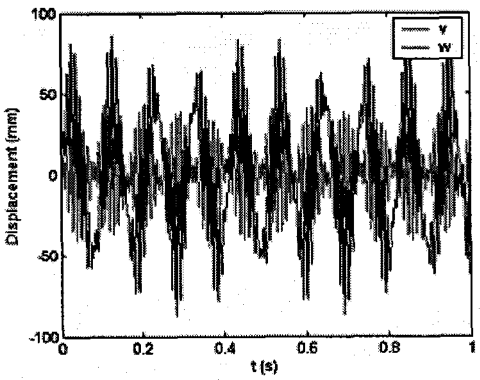


FEM(8)

그림 3. Time history (Ω=50 Hz)



SEM(2)



FEM(8)

그림 4. Time history (Ω=100 Hz)

도표 1. 스펙트럴요소법으로 구한 Natural Frequencies

	No Disk	$\Omega = 0\ Hz$	$\Omega = 50\ Hz$	$\Omega = 100\ Hz$
$\omega_{11b}(Hz)$	10.1793	9.7050	9.7022	9.6994
$\omega_{11f}(Hz)$			9.7078	9.7106
$\omega_{12b}(Hz)$	40.7022	40.6520	40.5162	40.3800
$\omega_{12f}(Hz)$			40.7873	40.9221
$\omega_{13b}(Hz)$	91.5225	87.5697	87.5444	87.5191
$\omega_{13f}(Hz)$			87.5950	87.6203
$\omega_{14b}(Hz)$	162.5707	161.7685	161.2175	160.6597
$\omega_{14f}(Hz)$			162.3129	162.8505
$\omega_{15b}(Hz)$	253.7585	243.5188	243.4485	243.3783
$\omega_{15f}(Hz)$			243.5891	243.6594

5. 결 론

본 연구에서는 변분법을 통하여 스펙트럴요소 모델링을 유도하여 간단한 예제를 가지고 지금까지 널리 사용 되어왔던 유한요소법의 결과와 비교하여 보았다. 이 결과 해석 시간의 비교를 통해 스펙트럴요소법의 이점을 확인할 수 있었다. 앞으로 베어링의 동역학 모델링을 통하여 실제적인 문제에 더욱 다가서는 후행연구가 진행되어야 한다. 또한 축방향 회전속도인 Ω가 시간에 따라 변하는 경우를 고려하는 후행연구도 진행되어야 할 것이다.

참고 문헌

1. Jeffcott, H. H. (1919) "Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed-The Effect of Want of Balance," Philosophical Magazine, Vol. 37, 304-314.
2. Ruhl, R. L., and Booker, J. F. (1972) "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor System," Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, 126-132.
3. Dimaragonas, A. D. (1975) "A General Method for Stability Analysis of Rotating Shafts," Ingenieur-Archieve, Vol. 44, 9-20.
4. Gasch, R. (1976) "Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearings on an Elastic Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 47, 53-73.
5. Nelson, H. D., and McVaugh, J. M. (1976) "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements," ASME Transactions, Journal of Engineering for Industry, Vol. 98, 593-600.
6. Zorzi, E. S., and Nelson, H. D. (1977) "Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping," Journal of Engineering for Power, Series A, Vol. 99, No. 1, 71-76.
7. Nelson, H. D. (1980) "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory," ASME Transactions, Journal of Mechanical Design, Vol. 102, 793-803.
8. Lund, J. W., and Orcutt, F. K. (1967) "Calculations and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor," ASME Transactions, Journal of Engineering for Industry, Vol. 89, 785-796.
9. Kumar, A. S., and Sankar, T. S. (1984) "A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems," Computers and Structures, Vol. 23, 545-552.