

직선 선로상 차륜-윤축에 대한 기존운동방정식의 수정

Corrections to the conventional equations of motion of a wheel-axle set on a tangent track

최성규*
Choi, Sung-Kyou

ABSTRACT

This paper concerns dynamics of a wheel-axle set on a tangent track which was already published in a book titled "Dynamics of Railway Vehicle Systems" authored by Garg and Dukkipati [1], pointing out several missing terms and erroneous parts in the derived expressions on the conventional governing equations of motion.

It is indicated that the x-direction components of normal forces at left and right wheel-rail contact points in the equilibrium axis were missed. Another point is that in deriving the creepages the disturbed velocity components in both x and y directions in the equilibrium axis should not be disregarded in the first term of the numerators. When considering the creepage in the y direction in the body coordinate system, the second term of lateral velocity at the contact point also cannot be neglected. Besides, the hyper-assumptions in the final expressions of vertical components of normal forces at left and right wheel-rail contact points have been recovered in reaching the final stage of analytical model development. Finally it is noteworthy that the process of applying creep theory is deemed to contain a little bit inconsistencies and ambiguities to be clear.

1. 서론

철도차량 동력학 해석에 관한 저서 Dynamics of Railway Vehicle Systems (Vijay K. Garg & Rao V. Dukkipati 저) [1]은 진동소음, 탈선, 충돌 그리고 궤도토목 분야에 종사하는 상당수의 연구자들이 차륜-윤축 관련 동역학적 설계 시 많이 참조 되고 있다.

철도차량의 동력학적 거동 분석 및 설계를 위해서는 모델의 기저가 되는 강제 차륜-윤축 시스템을 정확히 이해하고 운동방정식을 유도하는 과정이 필수적이다. 하지만 현재 널리 그리고 가장 많이 참조 되고 있는 저서 Dynamics of Railway Vehicle Systems에 기술된 직선구간에서의 차륜-윤축시스템의 동력학적 운동방정식 유도과정은 명확하지 않을 뿐만 아니라, 그림 및 각종 notation 등이 불확실하다. 심지어는 유도과정에 오류를 담고 있고 관련 종사자들에게 적지 않은 혼란을 주고 있어 이에 대한 검증 및 수정요구가 있어왔다.

최근 들어 ADAMS, VAMPIRE, SIMPACK, NUCARS 등 철도차량 동력학 해석 관련 수치시뮬레이션 도구가 개발되어 이를 이용한 해석 및 설계가 이루어지고 있다. 하지만 동력학적 또는 물리적인 개념 및 기구를 충분히 이해하고 있을 때라야 오류가 없는 계산을 할 수 있을 뿐만 아니라 새로운 구조의 시스템을 개발할 수 있는 가능성이 높다. 이러한 이해를 돕는 확실한 방법 중 하나가 해석적인 운동방정식 유도과정을 통해 기본 메커니즘을 파악하는 것이다. 특히 차륜-윤축시스템의 운동방정식은 휠과 레일의 접촉 메커니즘뿐만 아니라, 차량의 동적 성능에 직접적으로 영향을 미치는 요소들이 작용하므로 철도차량 운동방정식 중 가장 중요하다.

* 한국철도기술연구원, 철도시스템안전연구본부, 정회원
E-mail : skchoi@krrri.re.kr
TEL : (031)460-5108 FAX : (031)460-5449

논문 내용을 각 장별로 정리하면 다음과 같다. 2장에서는 직선 평면선로에서의 윤축의 운동방정식 유도에 필요한 좌표계와 휠-윤축시스템에 작용하는 힘의 관계를 나타내었고, 세 개의 회전운동방정식에서 누락된 항을 추가 보완했다. 3장에서는 열차의 진행속도와 차체 외란에 의한 시간 미분 치들에 대한 혼동으로 놓쳐서는 안 될 중요한 세 개의 크리피지 힘들에 대해 지적을 하고 수정했다. 좌우 차륜 모두에 대해서 그 표현들에 많은 차이가 있음을 알 수 있었다. 이어 4장과 5장에서는 앞에서 지적한 오류들로 인해 계속되는 문제점들을 수정하기 위해 저서 [1]에 주어진 순서대로 유도 과정을 그대로 따라 진행하였는데 중간결과 및 최종 간략화된 운동방정식에 상당한 차이가 있음을 알 수 있었다.

2. 운동방정식의 도출

2.1. 좌표계와 모델의 정의 및 거동

그림 1에서 좌표계 $x^m y^m z^m$ 는 관성좌표계 $x_I y_I z_I$ 에 대해 직선 선로를 따라 회전운동 없이 일정한 속도 V 로 이동하는 평형좌표계를 나타낸 것으로서 본 논문에서 운동방정식 및 기타 거동분석이 이루어지는 기본 평형좌표계이다. 윤축의 무게중심에 부착되어 있는 $x' y' z'$ 좌표계는 z^m 축을 중심으로 ψ 만큼, 그리고 추가로 변환된 x'' 축을 중심으로 ϕ 만큼의 각 변위를 포함하고 있는 윤축 이동좌표계로 정의한다. 따라서 윤축 이동좌표계와 평형좌표계 사이의 관계는 좌표변환매트릭스를 사용하여 아래 식 (1)로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} i' \\ r' \\ f' \\ k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'' \\ r'' \\ f'' \\ k'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'' \\ r'' \\ f'' \\ k'' \end{bmatrix} \quad (1)$$

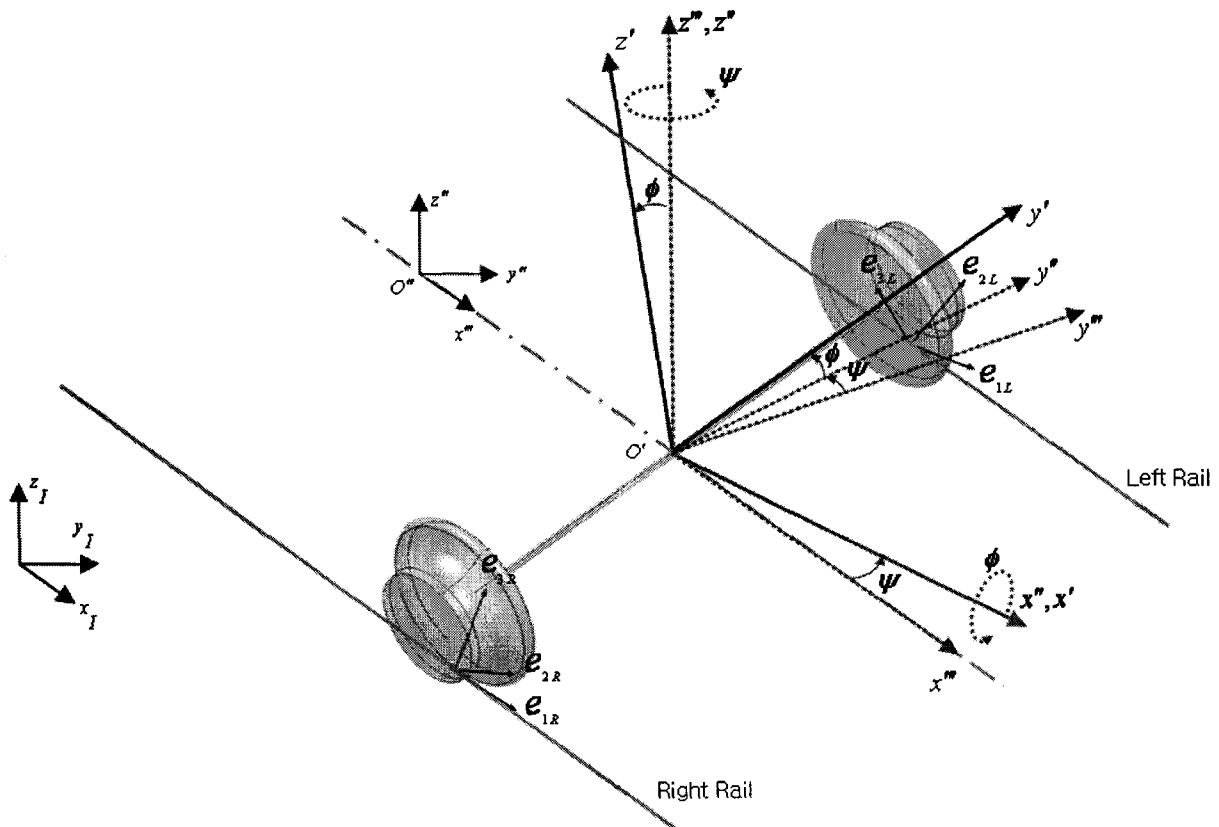


그림 1. 평면 직선선로상에서의 차륜-윤축의 좌표계

2.2. 각속도와 각모멘텀

윤축의 각속도 및 각모멘트를 구하는 첫 단계로 평형좌표계에 대한 윤축 좌표계의 회전속도는 앞에서 언급한 두 종류의 회전을 고려하면 다음과 같다.

$$\dot{\omega}_{axis} = \dot{\phi} \mathbf{i}^m + \psi \dot{\alpha} \mathbf{k}^m \quad (2)$$

따라서 윤축의 회전 속도는 차량의 진행속도에 윤축의 공칭회전속도 Ω 와 차륜의 섭동 각변위로 인한 각속도 β 를 더하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_{axis} + (\Omega + \beta) \mathbf{j}' = \dot{\phi} \mathbf{i}^m + (\Omega + \beta) \mathbf{j}' + \psi \dot{\alpha} \mathbf{k}^m \quad (3)$$

이를 윤축좌표계로 모두 나타내기 위하여 식 (1)을 이용하여 다시 정리를 하면 다음과 같다.

$$\dot{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{i}^m + (\Omega + \beta + \psi \sin \phi) \mathbf{j}' + \psi \dot{\alpha} \cos \phi \mathbf{k}' = \omega_x \mathbf{i}' + \omega_y \mathbf{j}' + \omega_z \mathbf{k}' \quad (4)$$

이 식에서 각 성분별 각속도를 이용하고 대칭성에 의해 관성질량 I_{wx} 은 I_{wz} 값과 같음에 유의하여 회전모멘트를 구하고 이에 대한 시간 미분치를 구한 다음 그 결과에 식 (4)의 시간 미분치를 대입하면 평형좌표계에 대해 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (I_{wx} \dot{\phi} + I_{wy} \Omega \psi \dot{\alpha}) \mathbf{i}^m + I_{wy} \dot{\beta} \mathbf{j}^m + (I_{wy} \Omega \phi \dot{\alpha} + I_{wz} \psi \dot{\alpha}) \mathbf{k}^m \quad (5)$$

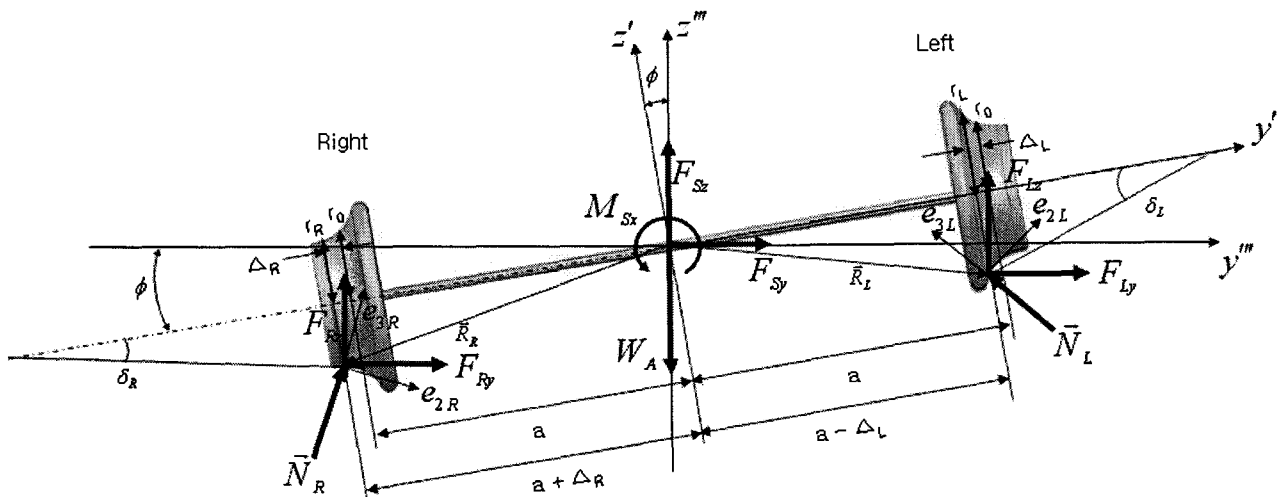


그림 2. 차륜윤축시스템의 운동자유도

여기서 뉴턴의 제2법칙을 적용하여 운동방정식을 구하는 과정에서 차륜-윤축에 가해지는 외력 및 부모멘트 성분을 구하기 위해 그림 1 또는 그림 2에서 표시하고 있는 윤축 중심과 차륜-레일 접촉지점까지의 위치벡터 \mathbf{R}_R 과 \mathbf{R}_L 을 다음과 같이 좌우 차륜에 대해 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \overset{r}{R}_R = & -(a + \Delta_R) \overset{r}{j}' - r_R \overset{r}{k}' = -(a + \Delta_R)(-\cos \phi \sin \psi \overset{r}{i}'' + \cos \phi \cos \psi \overset{r}{j}'' + \sin \phi \overset{r}{k}'') \\ & - r_R(\sin \phi \sin \psi \overset{r}{i}'' - \sin \phi \cos \psi \overset{r}{j}'' + \cos \phi \overset{r}{k}'') \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 각 벡터에 대한 성분은 각각 다음과 같다.

$$R_{Rx} = (a + \Delta_R) \cos \phi \sin \psi - r_R \sin \phi \sin \psi \quad (7a)$$

$$R_{Ry} = -(a + \Delta_R) \cos \phi \cos \psi + r_R \sin \phi \cos \psi \quad (7b)$$

$$R_{Rz} = -(a + \Delta_R) \sin \phi - r_R \cos \phi \quad (7c)$$

같은 방법으로 $\overset{r}{R}_L$ 에 대해서도 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$R_{Lx} = -(a - \Delta_L) \cos \phi \sin \psi - r_L \sin \phi \sin \psi \quad (8a)$$

$$R_{Ly} = (a - \Delta_L) \cos \phi \cos \psi + r_L \sin \phi \cos \psi \quad (8b)$$

$$R_{Lz} = (a - \Delta_L) \sin \phi - r_L \cos \phi \quad (8c)$$

이들 식 (7)과 (8)에서 사용한 문자들 중 a 는 윤축 중심으로부터 차륜의 공칭반경(r_0)지점까지 거리이고, Δ_R 과 Δ_L 은 좌우 차륜에 대해 공칭반경 지점으로부터 레일접촉 지점까지 각각의 거리를 나타낸다.

2.3. 뉴턴의 제 2법칙 적용과 운동방정식

그림 2에서 주어진 외력들을 고려하여 뉴턴의 제2법칙을 적용하면 다음의 두 식과 같다.

$$\Sigma \overset{r}{F} = m \overset{r}{a} = \overset{r}{F}_L + \overset{r}{F}_R + \overset{r}{N}_L + \overset{r}{N}_R + \overset{r}{F}_S - W_A \overset{r}{k}'' \quad (9)$$

$$\Sigma \overset{r}{M} = \frac{d\overset{r}{H}}{dt} = \overset{r}{R}_R \times (\overset{r}{F}_R + \overset{r}{N}_R) + \overset{r}{R}_L \times (\overset{r}{F}_L + \overset{r}{N}_L) + \overset{r}{M}_L + \overset{r}{M}_R + \overset{r}{M}_S \quad (10)$$

그림 2에서 보듯이 식들에서 m 은 차륜-윤축의 질량을 그리고 $\overset{r}{F}_L$ 과 $\overset{r}{F}_R$ 은 좌우 차륜-레일 접촉점에서 발생하는 크리프힘을 나타내며, $\overset{r}{N}_L$ 과 $\overset{r}{N}_R$ 은 레일이 차륜에 가하는 반력을 그리고, $\overset{r}{F}_S$ 는 현가력을, W_A 는 차륜-윤축의 중량을 표시한다. 또한 $\overset{r}{M}_L$, $\overset{r}{M}_R$ 은 좌우 차륜에 걸리는 크리프모멘트를 그리고 $\overset{r}{M}_S$ 는 현가모멘트를 나타낸다. 이들 식을 평형좌표계에 대해 성분별로 풀어 쓰면 다음과 같이 6 자유도의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$m \overset{r}{a}_x = F_{Lx} + F_{Rx} + N_{Rx} + N_{Lx} + F_{sx} \quad (11a)$$

$$m \overset{r}{a}_y = F_{Ly} + F_{Ry} + N_{Ry} + N_{Ly} + F_{sy} \quad (11b)$$

$$m \overset{r}{a}_z = F_{Lz} + F_{Rz} + N_{Rz} + N_{Lz} + F_{sz} - W_A \quad (11c)$$

$$I_{wx} \overset{r}{\alpha} = I_{wy} \Omega \overset{r}{\omega} + R_{Ry}(F_{Rz} + N_{Rz}) - R_{Rz}(F_{Ry} + N_{Ry}) + R_{Ly}(F_{Lz} + N_{Lz}) - R_{Lz}(F_{Ly} + N_{Ly}) + M_{Lx} + M_{Rx} + M_{sx} \quad (12a)$$

$$I_{wy} \ddot{\theta}_z = -R_{Rx}(F_{Rz} + N_{Rz}) + R_{Rz}(F_{Rx} + N_{Rx}) - R_{Lx}(F_{Lz} + N_{Lz}) + R_{Lz}(F_{Lx} + N_{Lx}) + M_{Ly} + M_{Ry} + M_{sy} \quad (12b)$$

$$I_{wz} \ddot{\theta}_x = -I_{wy} \Omega \dot{\phi} + R_{Rx}(F_{Ry} + N_{Ry}) - R_{Ry}(F_{Rx} + N_{Rx}) + R_{Lx}(F_{Ly} + N_{Ly}) - R_{Ly}(F_{Lx} + N_{Lx}) + M_{Lz} + M_{Rz} + M_{sz} \quad (12c)$$

2.4. 차륜-레일에 작용하는 수직반력

그림 1과 2의 좌우 차륜-레일 접촉점을 보면 좌우 차륜-레일 접촉평면에 수직으로 작용하는 차륜-레일 접촉력 $\overset{1}{N}_L$ 과 $\overset{1}{N}_R$ 은 차륜-레일 접촉점을 원점으로 하고 이 접촉평면에 위쪽을 3축 ($\overset{1}{e}_{3R}$, $\overset{1}{e}_{3L}$), 휠의 진행 방향을 1축 ($\overset{1}{e}_{1R}$, $\overset{1}{e}_{1L}$), 접촉점에 대한 접선방향을 2축 ($\overset{1}{e}_{2R}$ 과 $\overset{1}{e}_{2L}$)으로 각각 정의한 것을 알 수 있다. 접촉좌표계에 대해 우측 차륜의 경우 1축을 중심으로 반시계방향으로 δ_R 그리고 좌측 차륜에 대해 시계방향으로 δ_L 만큼 각각 회전시키고 식 (1)을 고려하면 접촉좌표계와 $x''y''z''$ 좌표계 사이의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overset{r}{e}_{1R} \\ \overset{r}{e}_{2R} \\ \overset{r}{e}_{3R} \end{bmatrix} = T_R \begin{bmatrix} \overset{r}{i}'' \\ \overset{r}{j}'' \\ \overset{r}{k}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos(\delta_R - \phi) \sin \psi & \cos(\delta_R - \phi) \cos \psi & -\sin(\delta_R - \phi) \\ -\sin(\delta_R - \phi) \sin \psi & \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi & \cos(\delta_R - \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{r}{i}'' \\ \overset{r}{j}'' \\ \overset{r}{k}'' \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \overset{r}{e}_{1L} \\ \overset{r}{e}_{2L} \\ \overset{r}{e}_{3L} \end{bmatrix} = T_L \begin{bmatrix} \overset{r}{i}'' \\ \overset{r}{j}'' \\ \overset{r}{k}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos(\delta_L + \phi) \sin \psi & \cos(\delta_L + \phi) \cos \psi & \sin(\delta_L + \phi) \\ \sin(\delta_L + \phi) \sin \psi & -\sin(\delta_L + \phi) \cos \psi & \cos(\delta_L + \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{r}{i}'' \\ \overset{r}{j}'' \\ \overset{r}{k}'' \end{bmatrix} \quad (14)$$

식 (13)과 (14)를 이용해서 $x''y''z''$ 좌표계에서의 접촉지점에서의 반력들을 좌우 차륜에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\overset{r}{N}_R = N_R \overset{r}{e}_{3R} = N_R \left[-\sin(\delta_R - \phi) \sin \psi \overset{r}{i}'' + \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi \overset{r}{j}'' + \cos(\delta_R - \phi) \overset{r}{k}'' \right] \quad (15a)$$

$$\overset{r}{N}_L = N_L \overset{r}{e}_{3L} = N_L \left[\sin(\delta_L + \phi) \sin \psi \overset{r}{i}'' - \sin(\delta_L + \phi) \cos \psi \overset{r}{j}'' + \cos(\delta_L + \phi) \overset{r}{k}'' \right] \quad (15b)$$

좌우 차륜-레일 간 반력들의 z'' 축 방향 성분을 가속도항과 크리프힘 등을 포함한 간편한 식으로 표현하기 위해서 식 (15a, b)에서 얻은 결과를 식 (11c)에 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$N_R \cos(\delta_R - \phi) + N_L \cos(\delta_L + \phi) = F_z^* \quad (16)$$

$$F_z^* = m_{\text{eff}} W_A - F_{Lz} - F_{Rz} - F_{sz} \quad (17)$$

마찬가지로 N_{Lz} 와 N_{Rz} 을 식 (12a)에 대입을 해서 다음과 같은 관계식들을 구할 수 있다.

$$R_{Ry}N_R \cos(\delta_R - \phi) - R_{Rz}N_R \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi + R_{Ly}N_L \cos(\delta_L + \phi) + R_{Lz}N_L \sin(\delta_L + \phi) \cos \psi = M_\phi^* \quad (18)$$

$$M_\phi^* = R_{Ry}N_{Rz} - R_{Rz}N_{Ry} + R_{Ly}N_{Lz} - R_{Lz}N_{Ly} \quad (19)$$

식 (11c)와 (12a)로부터 좌우 차륜-레일 접촉점에서의 수직반력들을 구하면 다음과 같다.

$$N_R \cos(\delta_R - \phi) = \frac{F_z^* \left[R_{Ly} + R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) \cos \psi \right] - M_\phi^*}{R_{Ly} - R_{Ry} + R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) \cos \psi + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \cos \psi} \quad (20a)$$

$$N_L \cos(\delta_L + \phi) = \frac{F_z^* \left[-R_{Ry} + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \cos \psi \right] + M_\phi^*}{R_{Ly} - R_{Ry} + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \cos \psi + R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) \cos \psi} \quad (20b)$$

식 (20a, b)에 대해 식(7)과 (8)의 해당 위치벡터 성분들을 대입해서 미소항을 처리하여 정리하면 분모가 $2a$ 가 되고 분자도 단순화 되어 다음과 같이 매우 간편한 식을 얻을 수 있다.

$$N_R \cos(\delta_R - \phi) = \frac{1}{2}W_A - \frac{1}{2}F_{sz} + \frac{1}{2a}(r_R F_{Ry} + r_L F_{Ly}) \quad (21a)$$

$$N_L \cos(\delta_L + \phi) = \frac{1}{2}W_A - \frac{1}{2}F_{sz} - \frac{1}{2a}(r_R F_{Ry} + r_L F_{Ly}) \quad (21b)$$

3. 크리프힘과 크리프모멘트

3.1. 크리프힘의 정의

차륜-레일 접촉면 사이에는 차량이 진행하는 속도와 실제 차륜의 회전에 기인하는 속도와의 차이로 인하여 발생하는 크리프힘 $\overset{\perp}{F}$ 또는 이와 유사한 메커니즘에 의해 발생하는 크리프모멘트 $\overset{\perp}{M}$ 들이 차체의 안전성에 문제를 일으키는 경우가 종종 있는데, 이러한 힘들은 정의 [3, 5]에 의해 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\overset{\perp}{F} = [F_1 \quad F_2 \quad 0] = F_1^{\vee} e_1 + F_2^{\vee} e_2 \quad (22)$$

$$\overset{\perp}{M} = [M_1 \quad M_2 \quad M_3] = M_1^{\vee} e_1 + M_2^{\vee} e_2 + M_3^{\vee} e_3 \quad (23)$$

이들 식에 표현된 힘들은 차륜-레일 접촉점 좌표계 상의 각 축에 대한 성분으로 표시가 되어 있기 때문에 식 (13)과 (14)를 (22)와 (23)에 대입해서 $x''y''z''$ 좌표계 상에서의 각 크리프힘과 크리프 모멘트 성분들을 다음과 같이 구한다.

$$F_{Rx} = F_{R1} \cos \psi - F_{R2} \cos(\delta_R - \phi) \sin \psi = F_{R1} - F_{R2} \psi \cos(\delta_R - \phi) \quad (24a)$$

$$F_{Ry} = F_{R2} \psi + F_{R2} \cos(\delta_R - \phi) \quad (24b)$$

$$F_{Rz} = F_{R2} \sin(\delta_R - \phi) \quad (24c)$$

$$M_{Rx} = -M_{R3}\psi \sin(\delta_R - \phi), \quad M_{Ry} = M_{R3} \sin(\delta_R - \phi), \quad \text{and} \quad M_{Rz} = M_{R3} \cos(\delta_R - \phi) \quad (25a-c)$$

$$F_{Lx} = F_{L1} - \psi F_{L2} \cos(\delta_L + \phi), \quad F_{Ly} = \psi F_{L1} \sin(\delta_L + \phi) + F_{L2} \cos(\delta_L + \phi), \quad \text{and} \quad F_{Lz} = F_{L2} \sin(\delta_L + \phi) \quad (26a-c)$$

$$M_{Lx} = M_{L3}\psi \sin(\delta_L + \phi), \quad M_{Ly} = -M_{L3} \sin(\delta_L + \phi), \quad \text{and} \quad M_{Lz} = M_{L3} \cos(\delta_L + \phi) \quad (27a-c)$$

3.2 크리피지

중방향, 횡방향 그리고 스핀방향 크리피지는 다음과 같이 정의된다[3].

$$\xi_1 = \frac{\text{차량 속도 중방향성분} - \text{차륜 구름에 의한 진행속도 중방향성분}}{\text{차량의 정상 진행속도}(V)} \quad (28)$$

$$\xi_2 = \frac{\text{차량 속도 횡방향성분} - \text{차륜 구름에 의한 진행속도 횡방향성분}}{\text{차량의 정상 진행속도}(V)} \quad (29)$$

$$\xi_{sp} = \frac{\text{차륜의 회전 각속도} - \text{차륜 레일접촉면의 상대 각속도}}{\text{차량의 정상 진행속도}(V)} \quad (30)$$

식 (28)의 분자의 첫 항은 윤축중심에서의 정상진행 속도 V 의 e_1 방향 성분에 윤축중심로부터 차륜의 접촉지점까지의 위치벡터 $\overset{1}{R}'_R$ 시간 미분치의 e_1 방향 성분을 더하여 얻은 속도이다. 이들 위치벡터 $\overset{1}{R}'_R$ 또는 $\overset{1}{R}'_L$ 는 그림 2에서 벡터 $\overset{1}{R}_R$ 또는 $\overset{1}{R}_L$ 과 그림 1에 표시한 벡터 $\overset{0000}{O''O'}$ 의 합으로 구해진다. 우선 오른쪽 차륜에 대해서 위치 벡터 $\overset{1}{R}'_R$ 을 구하면 다음과 같다. 오른쪽 차륜에 대하여 식 (28)의 e_{1R} 방향 크리피지를 구하기 위하여 분자의 첫 항과 두 번째 항을 각각 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$V_{Rx} = V \cos \psi + \overset{R}{R}_R \cdot \overset{r}{e}_{1R}, \quad V'_{Rx} = \frac{r_R}{r_o} V \quad (31a,b)$$

그림 1과 그림 2에서 $\overset{0000}{O''O'}$ 와 $\overset{1}{R}_R$ 의 관계를 살펴보면 다음과 같이 $\overset{1}{R}'_R$ 을 구할 수 있다.

$$\overset{r}{R}'_R = \overset{0000}{O''O'} + \overset{r}{R}_R = xi i'' + yj'' + zk'' - (a + \Delta_R)j' - r_R k' \quad (32)$$

식 (1)을 이용하여 식 (32)를 모두 $i''j''k''$ 에 대한 표현으로 변환하여 e_{1R} 방향에 대한 시간 미분치를 구하면 여기에 단위벡터 e_{1R} 에 대해 다음 결과를 얻는다.

$$\overset{R}{R}_R \cdot \overset{r}{e}_{1R} = x \cos \psi + y \sin \psi + (a + \Delta_R) \psi \cos \phi - r_R \psi \sin \phi \quad (33)$$

따라서 식 (33)을 식 (31a)에 대입하고 그 결과를 식 (28)에 대입하여 다음과 같은 결과를 얻는데, 이는 Garg & Dukkipati [1]가 구한 것과는 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 이는 아마도 열차의 정상진행 속도 V 와 외란 속도 \dot{x} 및 \dot{y} 에 대한 확실한 구분을 하지 않았기 때문인 것으로 판단된다.

$$\xi_{1R} = \left(1 - \frac{r_R}{r_o}\right) \cos \phi + \frac{1}{V} (\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi) + \frac{a - \Delta_R}{V} \dot{\psi} \cos \phi - \frac{1}{V} r_R \dot{\psi} \sin \phi \quad (34)$$

다음에 식 (29)로 주어지는 \vec{e}_{2R} 방향에 해당하는 크리피지를 구하기 위하여 다음과 같이 저서 [1]이 제안한 것과는 차이가 있는 식을 제안한다.

$$\xi_{2R} = \frac{-V \sin \psi \cos(\delta_R - \phi) + \dot{R} \cdot \vec{e}_{2R} - \{(r_R/r_o)V \sin \psi \cos(\delta_R - \phi)\}}{V} \quad (35)$$

차량의 x'' 방향 진행속도 V 의 y'' 방향으로의 속도 성분은 $-V \sin \psi$ 이며 또 이에 대한 \vec{e}_{2L} 방향으로의 성분이 바로 분자의 첫 항임을 알 수 있는데, 저서 [1]에서는 이를 고려하지 않았다. 마찬가지로 접촉점에서 레일의 y'' 방향 속도의 크기는 공칭반경 지점에서의 진행속도 V 에 대해 접촉 지점에서의 속도로 환산한 값은 $(r_R/r_o)V$ 이며, 이에 대한 y'' 방향으로의 속도 성분은 $-(r_R/r_o)V \sin \psi$ 이고 이에 대한 \vec{e}_{2L} 방향으로의 속도성분이 분자의 세 번째 항임을 알 수 있다. 식 (34) 유도 시와 마찬가지로 분자의 중간 항을 계산하여 얻은 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_{2R} = & - \left(1 - \frac{r_R}{r_o}\right) \sin \psi \cos(\delta_R - \phi) + \frac{1}{V} (-\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi) \cos(\delta_R - \phi) + \frac{1}{V} [-\dot{x} \sin(\delta_R - \phi) \\ & + \dot{\phi} (a + \Delta_R) \sin \delta_R + r_R \dot{\phi} \cos \delta_R] \end{aligned} \quad (36)$$

예상했던 대로 이 식 역시 저서 [1]이 얻은 결과와 다른 것을 알 수 있다. 다음에는 스핀 크리피지를 식 (30)에 의하여 구한다.

$$\xi_{spR} = \frac{\dot{\omega} \cdot \vec{e}_{3R}}{V} = \frac{1}{V} [\dot{\psi} \cos(\delta_R - \phi) + (\Omega + \beta) \sin \delta_R] \quad (37)$$

원편 차륜에 대해서도 같은 방법으로 얻어지기 때문에 구체적인 설명은 생략하고 다음과 같은 결과들을 얻는다.

$$\xi_{1L} = \frac{V \cos \psi + \dot{R} \cdot \vec{e}_{1L} - (r_L/r_o)V \cos \psi}{V} = \left(1 - \frac{r_L}{r_o}\right) \cos \psi + \frac{1}{V} (\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi) - \frac{a - \Delta_L}{V} \dot{\psi} \cos \phi - \frac{1}{V} r_L \dot{\psi} \sin \phi \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \xi_{2L} = & - \sin \psi \cos(\delta_L + \phi) \left(1 - \frac{r_L}{r_o}\right) + \frac{1}{V} (-\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi) \cos(\delta_L + \phi) + \frac{1}{V} [\dot{x} \sin(\delta_L + \phi) \\ & + \dot{\phi} (a - \Delta_L) \sin \delta_L + r_L \dot{\phi} \cos \delta_L] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\xi_{spL} = \frac{\dot{\omega} \cdot \vec{e}_{3L}}{V} = \frac{1}{V} [\dot{\psi} \cos(\delta_L + \phi) - (\Omega + \beta) \sin \delta_L] \quad (40)$$

이제까지 얻은 크리피지들에 대해 ψ 및 ϕ 값이 미소하다는 가정 하에 선형화하면 다음과 같은 결

과를 얻을 수 있다.

$$\xi_{1R} = 1 - \frac{r_R}{r_o} + \frac{1}{V}(\psi \delta_R + a\phi \delta_R), \quad \xi_{2R} = -\left(1 - \frac{r_R}{r_o}\right)\psi + \frac{1}{V}\left[\psi \delta_R + \phi(a\delta_R + r_R)\right]$$

$$\xi_{spR} = \frac{1}{V}(\psi \delta_R + \Omega \delta_R) \quad (41a-c)$$

$$\xi_{1L} = 1 - \frac{r_L}{r_o} + \frac{1}{V}(\psi \delta_L + a\phi \delta_L), \quad \xi_{2L} = \left(1 - \frac{r_L}{r_o}\right)\psi + \frac{1}{V}\left[\psi \delta_L + \phi(a\delta_L + r_L)\right]$$

$$\xi_{spL} = \frac{1}{V}(\psi \delta_L - \Omega \delta_L) \quad (42a-c)$$

3.3. 평형좌표계상의 크리프힘과 크리프모멘트

접촉평면의 123 좌표계를 기준으로 좌우 차륜과 레일 사이에서 발생하는 크리프 힘들을 구하기 위하여 Kalker가 제안한 다음과 같은 선형크리프 이론을 적용한다.

$$F_1 = -f_{33}\xi_1, \quad F_2 = -f_{11}\xi_2 - f_{12}\xi_{sp}, \quad \text{and} \quad M_3 = f_{12}\xi_2 - f_{22}\xi_{sp} \quad (43a-c)$$

여기에서 f_{ij} 는 크리프 계수로서 그 값들은 [2]에 실려 있다. 이들 식에 식 (41)과 (42)를 대입해서 크리프 힘들을 다음과 같이 구한다.

$$F_{R1} = -f_{33}\left[1 - \frac{r_R}{r_o} + \frac{1}{V}(\psi \delta_R + a\phi \delta_R)\right]$$

$$F_{R2} = -f_{11}\left[-\left(1 - \frac{r_R}{r_o}\right)\psi + \frac{1}{V}(\psi \delta_R + \phi \delta_R) + \frac{\phi}{V}(a\delta_R + r_R)\right] - f_{12}\frac{\psi \delta_R + \Omega \delta_R}{V}$$

$$M_{R3} = f_{12}\left[-\left(1 - \frac{r_R}{r_o}\right)\psi + \frac{1}{V}(\psi \delta_R + \phi \delta_R) + \frac{\phi}{V}(a\delta_R + r_R)\right] - f_{22}\frac{\psi \delta_R + \Omega \delta_R}{V} \quad (44a-c)$$

$$F_{L1} = -f_{33}\left[1 - \frac{r_L}{r_o} + \frac{1}{V}(\psi \delta_L + a\phi \delta_L)\right],$$

$$F_{L2} = -f_{11}\left[\left(1 - \frac{r_L}{r_o}\right)\psi + \frac{1}{V}(\psi \delta_L + \phi \delta_L) + \frac{\phi}{V}(a\delta_L + r_L)\right] - f_{12}\frac{\psi \delta_L - \Omega \delta_L}{V}$$

$$M_{L3} = f_{12}\left[\left(1 - \frac{r_L}{r_o}\right)\psi + \frac{1}{V}(\psi \delta_L + \phi \delta_L) + \frac{\phi}{V}(a\delta_L + r_L)\right] - f_{22}\frac{\psi \delta_L - \Omega \delta_L}{V} \quad (45a-c)$$

이 크리프힘들은 접촉점 좌표계의 123축 각자의 성분으로 표시된 것으로서, 식 (32)부터 (35)의 모든 식들을 해당된 부분들에 대입함으로써 평형좌표계인 $x^m y^m z^m$ 상의 각각의 성분으로 표현을 다음과 같이 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
F_{Rx} &= -f_{33} \left[1 - \frac{r_R}{r_o} + \frac{1}{V} (\dot{x}_R + a\dot{\phi}) \right] \cos\psi + f_{11} \left[- \left(1 - \frac{r_R}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\dot{x}_R \delta_R \dot{\phi} + \frac{\phi}{V} (a\delta_R + r_R)) \right] \cos(\delta_R - \phi) \sin\psi + f_{12} \frac{\psi \dot{x}_R + \Omega \delta_R}{V} \cos(\delta_R - \phi) \sin\psi \\
F_{Ry} &= -f_{33} \left[1 - \frac{r_R}{r_o} + \frac{1}{V} (\dot{x}_R + a\dot{\phi}) \right] \sin\psi - f_{11} \left[- \left(1 - \frac{r_R}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\dot{x}_R \delta_R \dot{\phi} + \frac{\phi}{V} (a\delta_R + r_R)) \right] \cos(\delta_R - \phi) \sin\psi - f_{12} \frac{\psi \dot{x}_R + \Omega \delta_R}{V} \cos(\delta_R - \phi) \sin\psi \\
M_{Rz} &= M_{R3} \cos(\delta_R - \phi) = f_{12} \left[- \left(1 - \frac{r_R}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\dot{x}_R \delta_R \dot{\phi} + \frac{\phi}{V} (a\delta_R + r_R)) \right] \cos(\delta_R - \phi) - f_{22} \frac{\psi \dot{x}_R + \Omega r_R}{V} \cos(\delta_R - \phi)
\end{aligned} \tag{46a-c}$$

$$\begin{aligned}
F_{Lx} &= -f_{33} \left[1 - \frac{r_L}{r_o} + \frac{1}{V} (\dot{x}_L + a\dot{\phi}) \right] \cos\psi + f_{11} \left[\left(1 - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\dot{x}_L \delta_L \dot{\phi} + \frac{\phi}{V} (a\delta_L + r_L)) \right] \cos(\delta_L + \phi) \sin\psi + f_{12} \frac{\psi \dot{x}_L - \Omega \delta_L}{V} \cos(\delta_L + \phi) \sin\psi \\
F_{Ly} &= -f_{33} \left[1 - \frac{r_L}{r_o} + \frac{1}{V} (\dot{x}_L + a\dot{\phi}) \right] \sin\psi - f_{11} \left[\left(1 - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\dot{x}_L \delta_L \dot{\phi} + \frac{\phi}{V} (a\delta_L + r_L)) \right] \cos(\delta_L + \phi) \cos\psi - f_{12} \frac{\psi \dot{x}_L - \Omega \delta_L}{V} \cos(\delta_L + \phi) \sin\psi \\
M_{Lz} &= f_{12} \left[\left(1 - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\dot{x}_L \delta_L \dot{\phi} + \frac{\phi}{V} (a\delta_L + r_L)) \right] \cos(\delta_L + \phi) - f_{22} \frac{\psi \dot{x}_L - \Omega \delta_L}{V} \cos(\delta_L + \phi)
\end{aligned} \tag{47a-c}$$

4. 중력강성

4.1. 중력강성의 정의

다음에는 지배 운동방정식을 간단한 형태로 얻기 위한 작업의 일환으로 횡중력강성(lateral gravitational stiffness)과 요중력강성(yaw gravitational stiffness)으로 정의되는 양들을 구한다.

먼저 횡중력강성을 얻기 위해서 횡운동방정식과 요운동방정식인 (11b)와 (12a)에서 N_{Ry} 과 N_{Ly} 대신에 식 (20a, b)에서의 해당 값들을 대입해서 정리를 하면 다음과 같다.

$$m\ddot{y}_R = F_{Ly} + F_{Ry} + F_{sy} + N_R \sin(\delta_R - \phi) \cos\psi - N_L \sin(\delta_L + \phi) \cos\psi \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
I_{wx} \ddot{\psi} &= -I_{wy} \Omega \dot{\psi} + (R_{Rx} F_{Ry} - R_{Ry} F_{Rx}) + (R_{Lx} F_{Ly} - R_{Ly} F_{Lx}) + R_{Rx} N_R \sin(\delta_R - \phi) \cos\psi \\
&\quad + R_{Ry} N_R \sin(\delta_R - \phi) \sin\psi - R_{Lx} N_L \sin(\delta_L + \phi) \cos\psi - R_{Ly} N_L \sin(\delta_L + \phi) \sin\psi \\
&\quad + M_{Lz} + M_{Rz} + M_{sz}
\end{aligned} \tag{49}$$

4.2. 횡중력강성

횡중력강성을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$F_g = -N_R \sin(\delta_R - \phi) \cos\psi + N_L \sin(\delta_L + \phi) \cos\psi = -N_R \sin(\delta_R - \phi) + N_L \sin(\delta_L + \phi) \tag{50}$$

이 식의 오른쪽 항은 좌우 차륜-레일 접촉점에서의 횡방향으로 작용하는 반력들의 합을 표시하는데 중력으로 인해 차체의 복원력에 기여를 하기 때문에 붙여진 명칭이다. $\sin\theta = \cos\theta \tan\theta$ 의 관계식을 이용하여 식 (50)을 변형시키고 그 결과에 식 (15a, b)를 이용하여 다시 쓰면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$F_g = F_z^* \frac{-\left[R_{Ly} + R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) \cos \psi \right] \tan(\delta_R - \phi) + \left[-R_{Ry} + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \cos \psi \right] \tan(\delta_L + \phi)}{R_{Ly} - R_{Ry} + \left[R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \right] \cos \psi} + M_\phi^* \frac{\tan(\delta_R - \phi) + \tan(\delta_L + \phi)}{R_{Ly} - R_{Ry} + \left[R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \right] \cos \psi} \quad (51)$$

이 식에서 분모의 $(R_{Ly} - R_{Ry})$ 는 앞에서 적절한 미소항 처리를 통하여 $2a$ 임을 알았다. 분모의 나머지 항에 대해서도 식 (7b)와 (8b)를 대입하고 계산한 다음 $\phi(r_L - r_R)$, $a\phi(\tan \delta_L - \tan \delta_R)$ 등과 같은 항에 대해서 미소항 처리를 하면 $\phi(r_L + r_R)$ 이 남는다. 분자에 대해서도 동일한 과정을 거쳐 정리하면 아래 식의 분자에 주어진 항 이외에 $-2a\phi + (\Delta_R \tan \delta_L + \Delta_L \tan \delta_R)$ 가 추가되지만 이들이 $2a$ 에 비해서 작은 양이라고 가정하여 다음과 같이 제안한 저서 [1]의 식을 그대로 사용하기로 한다.

$$F_g = F_z^* \frac{a \left[\tan(\delta_L + \phi) - \tan(\delta_R - \phi) \right] + (r_L - r_R) \tan(\delta_L + \phi) \tan(\delta_R - \phi)}{2a - r_L \tan(\delta_L + \phi) - r_R \tan(\delta_R - \phi)} + M_\phi^* \frac{\tan(\delta_L + \phi) + \tan(\delta_R - \phi)}{2a - r_L \tan(\delta_L + \phi) - r_R \tan(\delta_R - \phi)} \quad (52)$$

이는 다시 적절한 변수의 정의를 도입할 경우 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$F_g = F_z^* \Delta_L(y) + \frac{F_z^*}{a} \Delta a(y) + \frac{M_\phi^*}{a} \Delta \psi(y) \quad (53)$$

$$\Delta_L(y) = \frac{\tan(\delta_L + \phi) - \tan(\delta_R - \phi)}{2 - \left[r_L \tan(\delta_L + \phi) - r_R \tan(\delta_R - \phi) \right] / a}$$

$$\Delta_c(y) = \frac{(r_L - r_R) \tan(\delta_L + \phi) \tan(\delta_R - \phi)}{2 - \left[r_L \tan(\delta_L + \phi) - r_R \tan(\delta_R - \phi) \right] / a}$$

$$\Delta_\psi(y) = \frac{\tan(\delta_L + \phi) + \tan(\delta_R - \phi)}{2 - \left[r_L \tan(\delta_L + \phi) - r_R \tan(\delta_R - \phi) \right] / a}$$

$$F_z^* = m_{\text{ext}} W_A - F_{Rz} - F_{Lz} - F_{Sz} = m_{\text{ext}} W_A + W_{\text{ext}} - F_{Sz} - \left[F'_{Ly} \sin(\delta_L + \phi) - F'_{Ry} \sin(\delta_R - \phi) \right]$$

평형상태에서는 $F_{Sz} = 0$, $M_{Sz} = 0$ 이고 또한 횡요축에 대한 평형을 가정하면, $M_\phi^* = 0$ 이다. 그러면 수직방향 관성력과 크리프힘의 수직성분을 무시함으로써 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$F_g = W_A \Delta_L(y) = W_A \frac{\tan(\delta_L + \phi) - \tan(\delta_R - \phi)}{2 - a^{-1} \left[r_L \tan(\delta_L + \phi) + r_R (\delta_R - \phi) \right]} \quad (54)$$

따라서 Garg & Dukkipati[1]가 제안한대로 주어진 각들이 작다면 분모의 tangent 성분은 역시 무시 가능하여 분모는 2로 줄고 그 결과 식 (54)는 식 (55)처럼 간략화 된다. 그러나 이 가정은 간략화에 대한 의욕이 너무 강한 탓에 생긴 것으로 수용이 어려운 것으로 판단된다. 따라서 다음 기회에는 이들의 영향을 살펴 볼 예정이다.

$$F_g = \frac{1}{2}(\delta_L + \phi - \delta_R + \phi)W_A = W_A \left[\frac{1}{2}(\delta_L - \delta_R) + \phi \right] \quad (55)$$

4.3. 요중력강성

요중력강성에 대해서도 역시 마찬가지로 과정을 거쳐서 적절한 표현들을 구할 수 있다. 앞에서와 마찬가지로 식 (49)의 오른쪽 항에서 $R_{Rx}N_R \sin(\delta_R - \phi)\cos\psi - R_{Lx}N_L \sin(\delta_L + \phi)\cos\psi$ 을 $-M_g$ 라고 정의 하고 그 결과를 조금 변형시켜서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_g = -R_{Rx}N_R \cos(\delta_R - \phi)\tan(\delta_R - \phi) + R_{Lx}N_L \cos(\delta_L + \phi)\tan(\delta_L + \phi) \quad (56)$$

여기에 식 (20a, b)를 대입해서 횡중력강성에서와 같은 과정을 반복해서 다음과 같은 결과들을 얻는다.

$$M_g = -\alpha\psi F_z^* \Delta_\psi(y) - \frac{M_\phi^*}{a} \Delta_L(y) + \alpha\psi F_z^* \frac{(r_L + r_R)\tan(\delta_L + \phi)\tan(\delta_R - \phi)}{2a - r_L \tan(\delta_L + \phi) - r_R \tan(\delta_R - \phi)} \quad (57)$$

$$M_g = -\alpha\psi W_A \frac{1}{2}(\delta_R - \phi + \delta_L + \phi) = -\alpha\psi W_A \frac{1}{2}(\delta_L + \delta_R) \quad (58)$$

5. 간략화된 운동방정식

횡중력강성 및 요중력강성 식들을 식 (48)과 (49)에 각각 도입해서 다시 쓰면 다음과 같다.

$$m\ddot{y} - F_{Ly} - F_{Ry} - F_g = F_{sy} \quad (59)$$

$$I_{wx}\ddot{\psi} + I_{wy}\frac{V}{r_o}\dot{\phi} + (R_{Ry}F_{Rx} - R_{Rx}F_{Ry}) + (R_{Ly}F_{Lx} - R_{Lx}F_{Ly}) + M_g - M_{Lz} - M_{Rz} = M_{sz} \quad (60)$$

식 (59)에 식 (44b)와 식 (45b) 그리고 식 (55)를 각각 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$m\ddot{y} + f_{33}\left(2 - \frac{r_L + r_o}{r_o}\right)\psi + f_{11}\left[\left(1 - \frac{r_L}{r_o}\right)\psi \cos\delta_L + \frac{1}{V}(a\delta_L + r_L)\cos\delta_L + \frac{\phi}{V}(a\delta_L + r_L)\cos\delta_L - \left(1 - \frac{r_R}{r_o}\right)\psi \cos\delta_R + \frac{1}{V}(a\delta_R + r_R)\cos\delta_R + \frac{\phi}{V}(a\delta_R + r_R)\cos\delta_R\right] + f_{12}\frac{\Omega}{V}\psi(\delta_R \cos\delta_R - \delta_L \cos\delta_L) - W_A\left[\frac{1}{2}(\delta_L - \delta_R) + \phi\right] = F_{sy} \quad (61)$$

다음에는 같은 방법으로 식 (60)에 대해서 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$I_{wx}\ddot{\psi} + I_{wy}\frac{V}{r_o}\dot{\phi} + f_{33}\left[\Delta_R + \Delta_L + \frac{a}{r_o}(r_L - r_R) - \frac{r_R\Delta_R + r_L\Delta_L}{r_o} + \frac{2\alpha\psi}{V}(r_R + r_L)\phi + \frac{1}{r_o}(r_R^2 + r_L^2)\right] + f_{12}\psi \left[-\frac{\Omega}{V}\{a(\delta_R \cos\delta_R + \delta_L \cos\delta_L) + \Delta_R\delta_R \cos\delta_R - \Delta_L\delta_L \cos\delta_L\} + \left(\cos\delta_R + \cos\delta_L - \frac{r_R \cos\delta_R + r_L \cos\delta_L}{r_o}\right)\right] + \frac{f_{22}}{V}\left[\psi\{(\cos\delta_L + \cos\delta_R) + \Omega\{\delta_R \cos\delta_R - \delta_L \cos\delta_L + \phi(\delta_R \sin\delta_R - \delta_L \sin\delta_L)\}\right] = M_{sz} \quad (62)$$

3. 결론 및 향후 계획

이상 평면 직선선로 상에서의 차륜-윤축 시스템의 동력학적 기구를 규명한 기존 운동방정식에 대한 오류를 지적하고 수정하였다. 원저자들의 해에 다소의 오류가 있기는 하지만 적절한 해석모델을 제공한 그들의 노력은 매우 소중한 것임을 언급하고 싶다.

원저자들의 유도과정에 있어서 제반 지적사항을 앞에서 대부분 언급 했지만, 한 가지 더 추가를 한다면 크리피지 유도 시 접촉점 좌표계에 대한 성분인 F'_{Rx} 나 F'_{Ry} 는 마치 윤축좌표계에서의 값으로 오인을 일으키게 한 것 이다. 독자들은 이에 대해 충분히 인지를 하고 있을 것으로 사료되지만 좀 더 배려를 해야 할 항목이다.

제반 유도 과정을 다시 반복하는 가운데 나름대로 상세히 수정을 했지만 아직 밝혀지지 않은 부분들이 있어 이들에 대해서 보다 명백히 하고 주어진 기하학적인 모델에 대한 특성치를 대입하여 계산을 수행한 제반 결과들을 다음 기회에 다시 발표할 예정이다.

최종적으로 언급하고 싶은 것은 원저서인 Garg & Dukkipati [1]는 철도차량의 진동소음, 탈선, 충돌 그리고 궤도토목의 레일 분야에 종사하는 연구자들이 참조를 하고 있는 만큼 본 논문과 관련된 구체적인 계산 과정 및 제반 연구자료 들을 널리 공개를 할 수 있으니, 관심이 있는 연구자들과 함께 지속적으로 함께 검토하여 잘못된 부분을 바르게 잡아갈 수 있기를 바란다.

참고문헌

1. Garg, V. K., Dukkipati, I. "Dynamics of Railway Vehicle Systems," Academic Press, 1984.
2. J. J. Kalker, "Review of Wheel-Rail Rolling Contact Theories, The General Problem of Rolling Contact" (A. L. Browne and N. T. Tsai, eds.), Applied Mechanics Division, Vol. 40, pp. 77-92, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1980.
3. F. W. Carter, "On the Action of Locomotive Driving Wheel," Proc. R. Soc. London, ver. A. 112, 151-157, 1926.
4. F. P. Beer, E.R. Johnston, Jr., "Vector Mechanics for Engineers," Statics and Dynamics 3rd ed., McGraw-Hill Book Co.
5. B. V. Brickle, "The Steady State Forces and Moments on a Railway Wheelset Including Flange Contact Conditions," Ph. D. dissertation, Loughborough University, Loughborough, 1973.