

# 곡선 경사 선로상 차륜-윤축셋에 대한 수정 운동방정식

## Corrected equations of motion for a wheel-axle set negotiating an arbitrarily changing radius curve

최 성 규\*  
한국철도기술연구원

---

### ABSTRACT

It is found that there are many serious errors in deriving the existing governing equations of motion for a wheel-axle set negotiating an arbitrarily changing radius curve by Vijay K. Garg and Rao V. Dukkipati.

Among other things, despite the hypothesis on arbitrarily changing radius of curve, there had been no taking a time derivative of the radius  $R$  in the first half of the derivation. Even if the D’Lambert force arising from the centrifugal acceleration of vehicle body or bogie was appropriately taken into account while calculating cant deficiency, it is unnecessarily duplicated in the force vectors of governing equations. The graphical model given in Fig. 5.15 is not enough to follow those developed expressions from both physical and structural points of view. Besides, there are some blunders in assigning plus or minus sign not to be regarded as simple typographic ones and similar mistakes are committed in deriving creep force expressions as in the case of a wheel-axle set on a tangent track.

---

### 1. 서론

철도차량 동역학 해석에 관한 저서 Dynamics of Railway Vehicle Systems (Vijay K. Garg & Rao V. Dukkipati 共著) [1]은 진동소음, 탈선, 충돌 그리고 궤도토목 분야에 종사하는 상당수의 연구자들이 차륜-윤축 관련 동역학적 설계 시 많이 참조 되고 있다.

철도차량의 동역학적 거동 분석 및 설계를 위해서는 모델의 기본이라 할 수 있는 강체 차륜-윤축 시스템을 정확히 이해하고 운동방정식을 유도하는 과정이 필수적이다. 하지만 기존 저서 [1]에 기술된 곡선구간에서의 차륜-윤축시스템의 동역학적 운동방정식 유도과정은 명확하지 않을 뿐만 아니라, 그림 및 각종 notation 등이 불확실하다. 심지어는 유도과정에 오류를 담고 있고 관련 종사자들에게 적지 않은 혼란을 주고 있어 이에 대한 검증 및 수정요구가 있어왔다.

최근 들어 ADAMS, VAMPIRE, SIMPACK,, NUCARS 등 철도차량 동역학 해석 관련 수치시뮬레이션 도구가 개발되어 이를 이용한 해석 및 설계가 이루어지고 있다. 하지만 동역학적 또는 물리적인 개념 및 기구를 충분히 이해하고 있을 때라야 오류가 없는 계산을 할 수 있을 뿐만 아니라 새로운 구조의 시스템을 개발할 수 있는 가능성이 높다. 이러한 이해를 돕는 확실한 방법 중 하나가 해석적인 운동방정식 유도과정을 통해 기본 메커니즘을 파악하는 것이다. 특히 곡선구간에서의 차륜-윤축시스템의 운동방정식은 휠과 레일의 접촉 메커니즘뿐만 아니라, 차량의 동적 성능에 직접적으로 영향을 미치는 요소들이 작용하므로 철도차량 운동방정식 중 가장 중요하다. 더구나 틸팅열차의 도입으로 곡선구간에서 동역학적 거동에 대한 관심이 더욱 높아지고 있다.

본 논문의 2장에서는 기존 해석해의 유도과정을 검토하고 이해하기 위해 가장 필수적인 좌표계 및

---

\* 한국철도기술연구원, 철도시스템안전연구본부, 정회원  
E-mail : skchoi@krri.re.kr  
TEL : (031)460-5108 FAX : (031)460-5449

운동자유도를 기술하였다. 또한 앞에서도 언급했지만, 선로의 곡선반경이 진행거리 또는 시간에 따라 변하는데도 불구하고 이에 대한 시간 미분이 전혀 이루어져 있지 않기 때문에 이에 대한 수정을 했다. 그 결과 가속도 식이 획기적으로 달라졌는데 이는 운동방정식 전체가 달라질 수 있음을 의미한다. 그리고 차체 및 대차 중량에 의한 외력 및 모우멘트를 구할 때 외력에 대한 기본 개념의 혼동으로 인한 오류가 있음을 지적하고 역시 수정을 했다. 3장의 크리프힘 및 크리프모멘트를 구하는 과정에서 크리피지를 구하면서 차량의 진행방향 성분은 물론 차륜-레일 접촉면 내와 접촉면에 수직인 성분 모두에 대해 역시 기본 개념에 대한 불확실한 이해로 인해 많은 오류가 발생하고 있음을 역시 지적하고 이에 대해 수정을 했는데, 역시 기존의 해석 해와는 많이 달라진 모습을 볼 수 있다. 맺음말에서는 완전한 해석모델을 얻기 위해서는 아직 진행해야 할 부분이 남아 있음을, 그리고 향후 진행해야 할 제반사항에 대해서 언급했다.

## 2. 운동방정식의 도출

### 2.1. 좌표계와 모델의 정의 및 거동

그림 1에 나타난 곡선선로는 경사각이  $\phi_{SE}$  이고 곡선반경은  $R$  이며 이들은 진행 거리 또는 경과시간에 따라 변한다고 가정한다. 또한, 이러한 곡선선로를 정상속도  $V$  로 진행하는 차륜-윤축을 가정한다. 이 때 관성좌표계에 대해 평면과 만나는 지점을 중심으로 하는 평면좌표계  $x_g y_g z_g$  를 정의한다. 따라서 평면좌표계는 관성좌표계에 다음과 같이 각속도를 가진다.

$$\overset{r}{\omega}_g = \begin{pmatrix} -\frac{V}{R} \end{pmatrix} \overset{r}{k}_g \quad (1)$$

또한 선로좌표계는 대해 경사각을 매개로 평면좌표계에 대해 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \overset{r}{i}_T \\ \overset{r}{j}_T \\ \overset{r}{k}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{SE} & \sin \phi_{SE} \\ 0 & -\sin \phi_{SE} & \cos \phi_{SE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{r}{i}_g \\ \overset{r}{j}_g \\ \overset{r}{k}_g \end{bmatrix} \quad (2)$$

윤축의 무게중심에 부착되어 있는  $x_w y_w z_w$  좌표계는  $\overset{i}{k}_T$  축을 중심으로  $\psi$  만큼, 그리고 추가로 변환된 축을 중심으로 물변위  $\phi$  만큼의 각 변위를 포함하고 있는 윤축 이동좌표계로 정의한다.

$$\begin{bmatrix} \overset{r}{i}_w \\ \overset{r}{j}_w \\ \overset{r}{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{r}{i}_T \\ \overset{r}{j}_T \\ \overset{r}{k}_T \end{bmatrix} = T_{w/T} \begin{bmatrix} \overset{r}{i}_T \\ \overset{r}{j}_T \\ \overset{r}{k}_T \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$T_{w/T} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

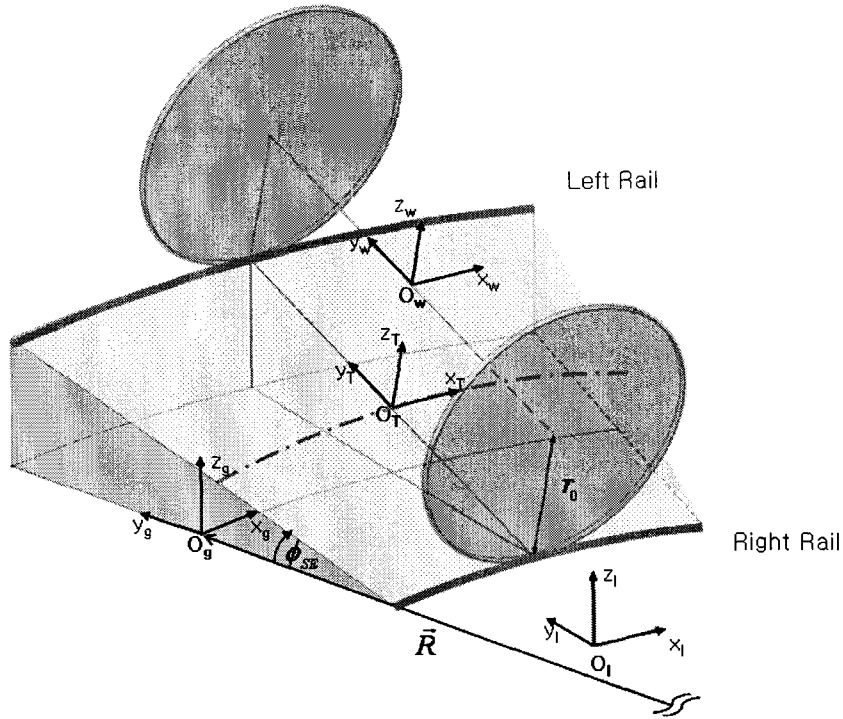


그림 1. 선로와 운측의 좌표계

## 2.2. 각속도와 각모멘텀

운동방정식을 유도하기 위해 필요한 사항으로서 선로좌표계  $x_T y_T z_T$ 의 각속도를 구해야 하는데 이는 먼저 경사면의 회전각의 시간 변화율과 전체적으로 곡선을 따라 돌면서 발생하는 각변화율  $V/R$ 과 이들의 방향성을 고려하고 좌표계의 회전을 반영하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \phi_{SE}^r \dot{\mathbf{r}}_I - \frac{V}{R} \mathbf{k}_I = \phi_{SE}^r \dot{\mathbf{r}}_T - \frac{V}{R} (\phi_{SE}^r \mathbf{j}_T + \mathbf{k}_T) \quad (5)$$

선로 중심의 이동 가속도는 전체적인 회전에 의한 구심가속도 성분과 선로 경사각의 각가속도에 기인하는 가속도 성분을 좌표계의 회전 매트릭스를 고려하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a}_T^r = -\frac{V^2}{R} \mathbf{j}_I + a \phi_{SE}^r \mathbf{k}_I = -\frac{V^2}{R} \mathbf{j}_T + \left( \frac{V^2}{R} \phi_{SE}^r + a \phi_{SE}^r \right) \mathbf{k}_T \quad (6)$$

이번에는 평면상의 좌표계  $x_g y_g z_g$ 를 기준으로 하고 이동좌표계  $x_T y_T z_T$ 를 고려할 경우 기준좌표계에 대한 벡터  $\dot{\mathbf{R}}_w$ 의 가속도는 이는 아래 식 (7)과 같이 쓸 수 있다.

$$\overset{r}{a}_w = \overset{r}{a}_T + \overset{r}{\omega}_T \times \overset{r}{R}_w + \overset{r}{\omega}_T \times (\overset{r}{\omega}_T \times \overset{r}{R}_w) + 2\overset{r}{\omega}_T \times \overset{r}{\dot{R}}_w + \overset{r}{\ddot{R}}_w \quad (7)$$

식 (7)에서 첫 항은 이동좌표계 중심의 가속도를 나타내고 두 번째 항과 세 번째 항은 이동좌표계  $x_T y_T z_T$  의 회전만을 고려한 위치벡터  $\overset{1}{R}_w$  의 가속도 성분을 나타내며, 네 번째 항은 이동좌표계의 회전에 기인하는 Coriolis 가속도 성분 그리고 마지막 항은 이동 좌표계에서의  $\overset{1}{R}_w$  의 가속도 성분을 표시한다. 문헌 [4]의 p. 719를 참조하기 바란다. 식 (7)에 식 (1), (2), (3)를 대입하면 아래와 같은 결과를 얻는데 여기에서 비선형 항 또는 미소 항들을 제거하면 최종적인 가속도 식 (8)을 구할 수 있다.

$$\overset{r}{a}_w = \left[ \frac{2V}{R} r_o \phi_{SE} - \frac{V^2}{R^2} x + 2 \frac{V \dot{\phi}}{R} + \frac{V \ddot{\phi}}{R^2} (r_o \phi_{SE} - y) \right] \overset{r}{i}_T + \left[ \frac{V^2}{R} - r_o \phi_{SE} + \frac{V^2}{R^2} r_o \phi_{SE} - \frac{V^2}{R^2} y - 2 \frac{V \dot{\phi}}{R} + \frac{V \ddot{\phi}}{R^2} x \right] \overset{r}{j}_T + \left[ \frac{V \dot{\phi}}{R} + \frac{V^2}{R} \phi_{SE} \right] \overset{r}{k}_T \quad (8)$$

이 결과는 Garg & Dukkipati [1]의 제안한 것과 많은 차이가 있는 것을 알 수 있는데, 곡선반경이 시간에 따라 변한다고 했으면서 실제로는 상수(일정한 양)로 취급하여 이에 대한 시간미분치를 고려하지 않았기 때문이다.

기준좌표계에 대한 윤축셋의 회전가속도  $\overset{r}{\omega}_w$  를 구하기 위해서는 선로 중심의 회전가속도와 윤축의 선로 중심에 대한 회전가속도를 합치면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\overset{r}{\omega}_w = \overset{r}{\omega}_T + \overset{r}{\omega}_{w/T} = \phi_{SE} \overset{r}{i}_T - \frac{V}{R} \phi_{SE} \overset{r}{j}_T - \frac{V}{R} \overset{r}{k}_T + \phi_{SE} \overset{r}{\omega}_w + \psi \overset{r}{\omega}_w + (\Omega + \beta) \overset{r}{j}_w \quad (9)$$

이 식에서 단위벡터의 일관성을 유지하기 위해 식 (4)를 이용하여 아래 식 (10)을 얻을 수 있는데 이 또한 Dukkipati & Gary[1]가 제안한 것과 다른 것을 알 수 있다.

$$\overset{r}{\omega}_w = (\phi_{SE} + \phi) \overset{r}{i}_w + \left[ \Omega + \beta - \frac{V}{R} (\phi_{SE} + \phi) \right] \overset{r}{j}_w + \left( \psi - \frac{V}{R} \right) \overset{r}{k}_w \quad (10)$$

윤축셋의 각모멘텀과 이에 대한 시간 미분치는 각각 다음의 두 식과 같다.

$$\overset{1}{H} = I_{wx} \omega_{wx} \overset{1}{i}_w + I_{wy} \omega_{wy} \overset{1}{j}_w + I_{wz} \omega_{wz} \overset{1}{k}_w \quad (11)$$

$$\frac{d\overset{1}{H}}{dt} = I_{wx} \dot{\omega}_{wx} \overset{r}{i}_w + I_{wy} \dot{\omega}_{wy} \overset{r}{j}_w + I_{wz} \dot{\omega}_{wz} \overset{r}{k}_w + \overset{r}{\omega}_{axis} \times \overset{r}{H} \quad (12)$$

식 (11)에서  $\overset{1}{\omega}_{axis}$  는 윤축셋에 부착된 이동좌표계의 회전속도로서 다음과 같이 쓸 수 있다

$$\overset{r}{\omega}_{axis} = \omega_{wx} \overset{r}{i}_w + \omega_{wz} \overset{r}{k}_w = \left( \phi_{SE}^{\& \circ} + \phi \right) \overset{r}{i}_w + \left( \psi_{\& \circ} - \frac{V}{R} \right) \overset{r}{k}_w \quad (13)$$

식 (12)에 식 (10)과 (13)을 대입하면 다음과 같은 각모멘트에 대한 시간 미분치를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & \left[ I_{wx} \left( \phi_{SE}^{\& \circ} + \phi \right) - I_{wy} \left\{ \Omega + \beta_{\& \circ} - \frac{V}{R} \left( \phi_{SE}^{\& \circ} + \phi \right) \right\} \left( \psi_{\& \circ} - \frac{V}{R} \right) \right] \overset{r}{i}_w + I_{wy} \left[ \beta_{\& \circ} + \frac{VR^{\& \circ}}{R^2} \left( \phi_{SE}^{\& \circ} + \phi \right) - \frac{V}{R} \left( \phi_{SE}^{\& \circ} \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi \right) \right] \overset{r}{j}_w + \left[ I_{wx} \left( \psi_{\& \circ} - \frac{V}{R^2} R^{\& \circ} \right) + I_{wy} \left\{ \Omega + \beta_{\& \circ} - \frac{V}{R} \left( \phi_{SE}^{\& \circ} + \phi \right) \right\} \left( \phi_{SE}^{\& \circ} + \phi \right) \right] \overset{r}{k}_w \end{aligned} \quad (14)$$

### 2.3. 뉴턴의 제 2법칙 적용과 운동방정식

뉴턴의 제2법칙으로부터 직선 운동 또는 회전운동에 기인하는 운동방정식들을 얻기 위해 물체계에 가해지는 힘과 모멘트 성분을 그림 2에 표시했는데 켄트 부족을 고려할 경우 원심력은  $W_{ext}(\phi_d - \phi)$ 로 표시된다. 원심력의 방향은 Dukkipati & Gary [1]의 그림 5.16에 주어지는 것과 반대방향임을 알 수 있다. 그림이  $y_w z_w$  평면에 대한 것이기 때문에 각 힘들이 평면상에 나타난 것처럼 보이지만 실제로는 진행 방향 즉  $x_w$  방향 성분도 있음을 잊지 말아야 한다.

그림 3을 상세히 살펴보면 모멘트를 구하기 위한 팔의 길이를 다음과 같이 각각 좌우편의 차륜에 대해 표시할 수 있다.

$$\overset{1}{R}_R = -(a + \Delta_R) \overset{1}{j}_w - r_R \overset{1}{k}_w, \quad \overset{1}{R}_L = (a - \Delta_L) \overset{1}{j}_w - r_L \overset{1}{k}_w \quad (15)$$

여기에 식 (3)을 대입하면 다음과 같이 위치벡터  $\overset{1}{R}_R$ 과  $\overset{1}{R}_L$ 의 각각의 성분을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{Rx} &= (a + \Delta_R) \cos \phi \sin \psi - r_R \sin \phi \sin \psi = (a + \Delta_R) \psi \\ R_{Ry} &= -(a + \Delta_R) \cos \phi \cos \psi + r_R \sin \phi \cos \psi = -(a + \Delta_R) + r_R \phi \\ R_{Rz} &= -(a + \Delta_R) \sin \phi - r_R \cos \phi = -(a + \Delta_R) \phi - r_R \end{aligned} \quad (15a-c)$$

$$\begin{aligned} R_{Lx} &= -(a - \Delta_L) \cos \phi \sin \psi - r_L \sin \phi \sin \psi = -(a - \Delta_L) \psi \\ R_{Ly} &= (a - \Delta_L) \cos \phi \cos \psi + r_L \sin \phi \cos \psi = (a - \Delta_L) + r_L \phi \\ R_{Lz} &= (a - \Delta_L) \sin \phi - r_L \cos \phi = (a - \Delta_L) \phi - r_L \end{aligned} \quad (16a-c)$$

뉴턴의 제 2법칙으로부터 운동방정식을 구하기 위하여 직선 운동에 대해서는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m \overset{r}{a}_w = \overset{1}{F}_R + \overset{1}{F}_L + \overset{1}{F}_S + \overset{1}{N}_R + \overset{1}{N}_L + \overset{1}{L}_A \quad (17)$$

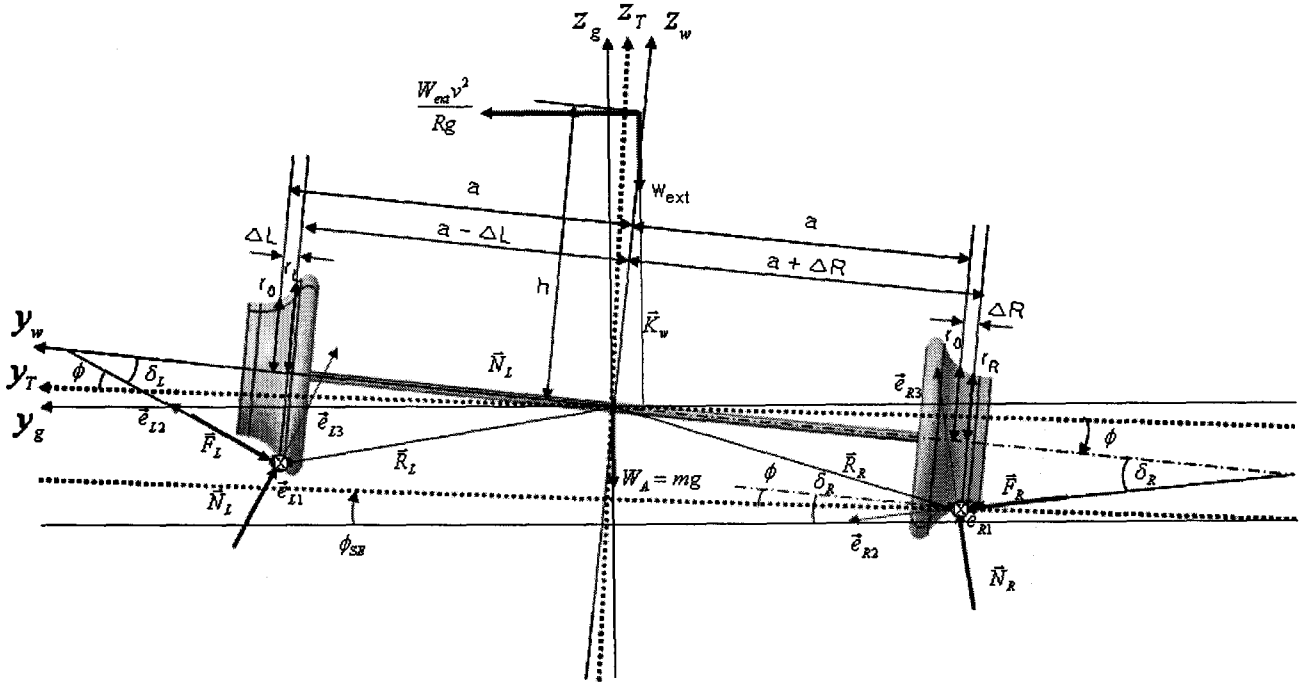


그림 2 윤축의 운동자유도

여기에서  $\dot{L}_A$ 는 대차 중량과 차체 중량에 의한 외력을 표시하고 있는데 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{L}_A &= (W_A + W_{ext})(\phi_d - \phi) j_1 - (W_A + W_{ext}) k_1 \\
 &= (W_A + W_{ext}) \left[ (\phi_d - \phi) \left( j_T^r - \phi_{SE} k_T^r \right) - \left( \phi_{SE} j_T^r + k_T^r \right) \right] \\
 &= (W_A + W_{ext}) \left[ (\phi_d - \phi - \phi_{SE}) j_T^r - (\phi_d \phi_{SE} - \phi \phi_{SE} + 1) k_T^r \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

식 (16)에서 이 관계식과 그림 3에 나타난 외력들을 고려하여, 각 성분별로 정리를 하면 다음의 세 식과 같이 직선운동에 대한 운동방정식을 구할 수 있다.

$$m \ddot{x} - \frac{mV^2}{R^2} x + \frac{2mV}{R} \dot{x} - \frac{mV\dot{\phi}}{R^2} y = \frac{2mVr_o\dot{\phi}_{SE}}{R} - \frac{mV\dot{\phi}_o\phi_{SE}}{R^2} + F_{Rx} + F_{Lx} + N_{Rx} + N_{Lx} + F_{sx} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 m \ddot{y} - \frac{mV^2}{R^2} y + \frac{mV\dot{\phi}}{R^2} x - \frac{2mV}{R} \dot{x} + (W_{ext} + W_A)\phi = \frac{mV^2}{R} - \frac{mV^2 r_o \phi_{SE}}{R^2} + mr_o \ddot{\phi}_{SE} + F_{Ry} + F_{Ly} \\
 + N_{Ry} + N_{Ly} + F_{sy} + (W_{ext} + W_A)(\phi_d - \phi_{SE}) \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$m \left( \ddot{\phi} - \dot{\phi} \frac{\dot{\phi}}{R} \right) = -\frac{V^2}{R} \phi_{SE} + F_{Rz} + F_{Lz} + F_{sz} + N_{Rz} + N_{Lz} + F_{sz} - (W_A + W_{ext})(\phi_d \phi_{SE} - \phi \phi_{SE} + 1) \quad (21)$$

이 결과를 Garg & Dukkipati [1]의 식 (5.75)-(5.77)과 비교를 해 보면 상당히 많은 부분이 추가되거나 표현이 다른 것을 알 수 있는데, 그 이유는 앞서서도 언급을 했지만 곡선반경을 일정한 상수로 보고 시간 미분치를 취하지 않은 점과 차체 및 대차 그리고 윤축 중량과 이에 기인하는 원심력과 반영부분이 다소 다르기 때문인 것을 알 수 있다.

다음에는 각모멘트의 시간미분치는 외력에 기인하는 모멘트들의 합과 같다는 정의에 의해 회전운동에 대한 운동방정식을 구하기 위해 정의에 의해 우선 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{r}_R \times (\mathbf{F}_R + \mathbf{N}_R) + \mathbf{r}_L \times (\mathbf{F}_L + \mathbf{N}_L) + \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_{ext} \quad (22)$$

식 (22)에서 좌편의 각모멘트의 시간 미분치를 구하여 비선형 항 및 미소항 처리를 하여 정리를 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}}{dt} = & \left[ I_{wx} (\dot{\phi}_{SE} + \dot{\phi}) - I_{wy} \left\{ \Omega \psi + \frac{V}{R} (\Omega + \beta) + \frac{V^2}{R^2} (\phi_{SE} + \phi) \right\} - I_{wy} \frac{V\dot{\kappa}}{R^2} \phi_{SE} \psi - \frac{V}{R} \dot{\phi}_{SE} \psi \right] \mathbf{i}_T \\ & + \left[ I_{wy} \left\{ -\frac{V}{R} \Omega \psi + \beta + \frac{V\dot{\kappa}}{R^2} (\phi_{SE} + \phi) - \frac{V}{R} (\dot{\phi}_{SE} + \dot{\phi}) \right\} - I_{wx} \frac{V\dot{\kappa}}{R^2} \phi \right] \mathbf{j}_T \\ & + \left[ I_{wx} \left( \frac{V\dot{\kappa}}{R^2} \phi_{SE} + \frac{V}{R^2} \dot{\kappa} \right) + I_{wy} \left\{ \Omega (\dot{\phi}_{SE} + \dot{\phi}) \right\} \right] \mathbf{k}_T \end{aligned} \quad (23)$$

식 (22)의 우편 첫 항과 둘째 항에 대해 식 (15)와 (16)을 대입해서 얻어지는 결과와 식 (23)을 등치해서 성분별로 정리를 하면 다음과 같은 회전운동에 대한 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_{wx} \dot{\phi} \left( \frac{V^2}{R^2} I_{wy} + 2hW_{ext} \right) \phi - \Omega I_{wy} \psi + \frac{V}{R} I_{wy} \beta = & -I_{wx} \dot{\phi}_{SE} - \frac{V}{R} \Omega I_{wy} + \frac{V^2}{R^2} I_{wy} \phi_{SE} + R_{Ry} (F_{Rz} + N_{Rz}) \\ & - R_{Rz} (F_{Ry} + N_{Ry}) + R_{Ly} (F_{Lz} + N_{Lz}) - R_{Lz} (F_{Ly} + N_{Ly}) + hW_{ext} (\phi_{SE} - \phi_d) + M_{Lx} + M_{Rx} + M_{sx} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} I_{wy} \dot{\phi} \frac{V\dot{\kappa}}{R^2} (I_{wx} - I_{wy}) \phi - \frac{V}{R} I_{wy} \dot{\phi} \frac{V}{R} I_{wx} \Omega \psi = & \frac{V}{R} I_{wy} \dot{\phi}_{SE} - \frac{V\dot{\kappa}}{R^2} I_{wy} \phi_{SE} - R_{Rx} (F_{Rz} + N_{Rz}) + R_{Rz} \\ & (F_{Rx} + N_{Rx}) - R_{Lx} (F_{Lz} + N_{Lz}) + R_{Lz} (F_{Lx} + N_{Lx}) + M_{Ly} + M_{Ry} + N_{sy} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} I_{wx} \left( \frac{V\dot{\kappa}}{R^2} \dot{\kappa} \right) + \Omega I_{wy} \dot{\phi} = & -I_{wy} \Omega \dot{\phi}_{SE} + R_{Rx} (F_{Ry} + N_{Ry}) - R_{Ry} (F_{Rx} + N_{Rx}) + R_{Lx} (F_{Ly} + N_{Ly}) - R_{Ly} (F_{Lx} + \\ & N_{Lx}) + M_{Lz} + M_{Rz} + M_{Sz} \end{aligned} \quad (26)$$

## 2.4. 차륜-레일에 작용하는 수직반력

다음에는 좌우 차륜-레일 접촉평면에 수직으로 작용하는 차륜-레일 접촉력  $\overset{I}{N}_L$  과  $\overset{I}{N}_R$  을 얻기 위하여 차륜-레일 접촉점을 원점으로 하고 이 점에서 차륜 방향으로 수직인 축( $\overset{I}{e}_{3R}$  과  $\overset{I}{e}_{3L}$ )과 차량의 진행 방향에 평행인 축( $\overset{I}{e}_{1R}$  과  $\overset{I}{e}_{1L}$ ) 그리고 이 접촉점에 대한 접선방향 축( $\overset{I}{e}_{2R}$  과  $\overset{I}{e}_{2L}$ )을 각각 정의한다. 우측 차륜을 생각해 보면,  $x_w y_w z_w$  좌표계를  $x_w$  을 중심 반시계방향으로  $\delta_R$  만큼 회전을 했으므로 다음과 같은 좌표변환 매트릭스를 생각할 수 있다. 참고로 지면에서 들어가는 방향이  $\overset{I}{e}_{1R}$  축임을 유의해서 회전시키는 방향임을 유의해야 한다.

$$\begin{bmatrix} \overset{r}{e}_{1R} \\ \overset{r}{e}_{2R} \\ \overset{r}{e}_{3R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_R & -\sin \delta_R \\ 0 & \sin \delta_R & \cos \delta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{r}{i}_w \\ \overset{r}{j}_w \\ \overset{r}{k}_w \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기에서 식 (3)과 식 (27)을 이용하여 선로좌표계로부터 접촉평면좌표계에 대한 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overset{r}{e}_{1R} \\ \overset{r}{e}_{2R} \\ \overset{r}{e}_{3R} \end{bmatrix} = T_R \begin{bmatrix} \overset{I}{i}_T \\ \overset{I}{j}_T \\ \overset{I}{k}_T \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$T_R = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos(\delta_R - \phi) \sin \psi & \cos(\delta_R - \phi) \cos \psi & -\sin(\delta_R - \phi) \\ -\sin(\delta_R - \phi) \sin \psi & \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi & \cos(\delta_R - \phi) \end{bmatrix} \quad (29)$$

다음에는 좌측 차륜의 경우에는 동일한 과정을 거쳐서 다음과 같은 결과들을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overset{r}{e}_{1L} \\ \overset{r}{e}_{2L} \\ \overset{r}{e}_{3L} \end{bmatrix} = T_L \begin{bmatrix} \overset{I}{i}_T \\ \overset{I}{j}_T \\ \overset{I}{k}_T \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$T_L = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos(\delta_L + \phi) \sin \psi & \cos(\delta_L + \phi) \cos \psi & \sin(\delta_L + \phi) \\ \sin(\delta_L + \phi) \sin \psi & -\sin(\delta_L + \phi) \cos \psi & \cos(\delta_L + \phi) \end{bmatrix} \quad (31)$$

이들 관계식을 고려해서  $x_T y_T z_T$  좌표계에서의 각각의 성분을 좌우 차륜에 대해 구할 수 있다.

$$\overset{r}{N}_L = N_L \overset{r}{e}_{3L} = N_L \left[ \sin(\delta_L + \phi) \sin \psi \overset{r}{i}_T - \sin(\delta_L + \phi) \cos \psi \overset{r}{j}_T + \cos(\delta_L + \phi) \overset{r}{k}_T \right] \quad (32)$$

$$\overset{r}{N}_R = N_R \overset{r}{e}_{3R} = N_R \left[ -\sin(\delta_R - \phi) \sin \psi \overset{r}{i}_T + \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi \overset{r}{j}_T + \cos(\delta_R - \phi) \overset{r}{k}_T \right] \quad (33)$$



이들은 그림 2를 참조하여 구할 수 있다. 즉  $y_w-z_w$  평면에서 접촉력  $\dot{N}_L$  과  $\dot{N}_R$  의  $z_w$  축 방향 성분  $N_L \cos(\delta_L + \phi)$  과  $N_R \cos(\delta_R - \phi)$  은  $z_w$  축에 대한 회전각  $\psi$  영향을 받지 않지만 방향으로의 접촉력 성분은 회전에 영향을 받지 않지만  $x_w y_w$  성분은  $\psi$  회전을 고려해서 구하면 같은 결과를 얻을 수 있다.

다음에는 좌우 차륜-레일 간 반력들의  $z_w$  축 방향 성분들을 과 을 가속도항과 크리프힘 등을 포함한 간편한 식으로 표현을 하기 위해서 식 (32)과 (33)의  $N_{Rz}$  와  $N_{Lz}$  을 식 (21)에 대입하여 정리를 하면 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$N_R \cos(\delta_R - \phi) + N_L \cos(\delta_L + \phi) = F_z^* \quad (34)$$

$$F_z^* = m \left( \frac{V^2}{R} + a\phi \right) + (W_{ext} + W_A) (\phi_d \phi_{SE} - \phi \phi_{SE} + 1) + \frac{V^2}{R} \phi_{SE} - F_{Rz} - F_{Lz} - F_{Sz} \quad (35)$$

마찬가지로 식 (24)에 식 (32)과 (33)에서 얻은  $N_{Rz}$  와  $N_{Lz}$  성분들을 대입해서 유사한 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$R_{Ry} N_R \cos(\delta_R - \phi) - R_{Rz} N_R \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi + R_{Ly} N_L \cos(\delta_L + \phi) + R_{Lz} N_L \sin(\delta_L + \phi) \cos \psi = M_\phi^* \quad (36)$$

$$M_\phi^* = I_{wx} \left( \frac{V^2}{R} + \phi \right) - I_{wy} \left( \Omega v \frac{V}{R} - \Omega - \frac{V}{R} \beta^2 + \frac{V^2}{R^2} \phi_{SE} + \frac{V^2}{R^2} \phi \right) - W_{ext} (2\phi - \phi_d - \phi_{SE}) h \\ + R_{Ry} F_{Rz} - R_{Rz} F_{Ry} + R_{Ly} F_{Lz} - R_{Lz} F_{Ly} - M_{Rx} - M_{Lx} - M_{Sx} \quad (37)$$

두 개의 식 (35)와 (37)를 이용하여 다음과 같은 좌우 차륜에 작용하는 수직반력을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$N_R \cos(\delta_R - \phi) = \frac{F_z^* \left[ R_{Ly} + R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) \cos \psi \right] - M_\phi^*}{R_{Ly} - R_{Ry} + R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) \cos \psi + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \cos \psi} \quad (38a)$$

$$N_L \cos(\delta_L + \phi) = \frac{F_z^* \left[ -R_{Ry} + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \cos \psi \right] + M_\phi^*}{R_{Ly} - R_{Ry} + R_{Rz} \tan(\delta_R - \phi) \cos \psi + R_{Lz} \tan(\delta_L + \phi) \cos \psi} \quad (38b)$$

### 3. 크리프힘과 크리프모멘트

#### 3.1. 크리프힘의 정의

차륜-레일 접촉면 사에서 발생하는 크리프힘  $\dot{F}$  과 크리프모멘트  $\dot{M}$  들은 다음과 같이 정의된다.

$$\overset{r}{F} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & 0 \end{bmatrix} = F_1 \overset{v}{e}_1 + F_2 \overset{v}{e}_2 \quad (39)$$

$$\overset{u}{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} = M_1 \overset{v}{e}_1 + M_2 \overset{v}{e}_2 + M_3 \overset{v}{e}_3 \quad (40)$$

이들을 좌표 변환 매트릭스를 이용하여  $x_T, y_T, z_T$  좌표계 상에서의 각 크리프힘과 모멘트 성분들을 좌우 차륜-레일 접촉점에 대해서 구하기 위해 식 (29)과 (31)의 역을 구하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$T_R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\cos(\delta_R - \phi) \sin \psi & -\sin(\delta_R - \phi) \sin \psi \\ \sin \psi & \cos(\delta_R - \phi) \cos \psi & \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi \\ 0 & -\sin(\delta_R - \phi) & \cos(\delta_R - \phi) \end{bmatrix} \quad (41a)$$

$$T_L^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\cos(\delta_L + \phi) \sin \psi & \psi \sin(\delta_L + \phi) \sin \psi \\ \sin \psi & \cos(\delta_L + \phi) \cos \psi & -\sin(\delta_L + \phi) \cos \psi \\ 0 & \sin(\delta_L + \phi) & \cos(\delta_L + \phi) \end{bmatrix} \quad (41b)$$

이들 관계식을 이용하여  $x_T, y_T, z_T$  좌표계에서 크리프힘 및 크리프모멘트 성분들을 좌우 차륜에 대해서 각각 구하면 다음과 같다.

$$F_{Rx} = F_{R1} \cos \psi - F_{R2} \cos(\delta_R - \phi) \sin \psi = F_{R1} - F_{R2} \psi \cos(\delta_R - \phi)$$

$$F_{Ry} = F_{R2} \psi + F_{R2} \cos(\delta_R - \phi), \quad F_{Rz} = F_{R2} \sin(\delta_R - \phi) \quad (42a-c)$$

$$M_{Rx} = -M_{R3} \psi \sin(\delta_R - \phi), \quad M_{Ry} = M_{R3} \psi \sin(\delta_R - \phi), \quad M_{Rz} = M_{R3} \cos(\delta_R - \phi) \quad (43a-c)$$

$$F_{Lx} = F_{L1} - \psi F_{L2} \cos(\delta_L + \phi), \quad F_{Ly} = \psi F_{L1} \sin \psi + F_{L2} \cos(\delta_L + \phi), \quad F_{Lz} = F_{L2} \cos(\delta_L + \phi) \quad (44a-c)$$

$$M_{Lx} = M_{L3} \psi \sin(\delta_L + \phi), \quad M_{Ly} = -M_{L3} \sin(\delta_L + \phi), \quad M_{Lz} = M_{L3} \cos(\delta_L + \phi) \quad (45a-c)$$

### 3.2 크리피지

종방향, 횡방향 그리고 스핀방향 크리피지는 다음과 같이 정의된다.

$$\xi_{1R} = \frac{\text{차량 속도 종방향성분} - \text{차륜 구름에 의한 진행속도 종방향성분}}{\text{차량의 정상 진행속도}(V)} \quad (46)$$

$$\xi_{2R} = \frac{\text{차량 속도 횡방향성분} - \text{차륜 구름에 의한 진행속도 횡방향성분}}{\text{차량의 정상 진행속도}(V)} \quad (47)$$

$$(48)$$

$$\xi_{3R} = \frac{\text{차량 속도 수직방향성분-차륜 구름에 의한 진행속도 수직방향성분}}{\text{차량의 정상 진행속도}(V)} \quad (49)$$

$$\xi_{spR} = \frac{\text{차륜의 회전 각속도-차륜 레일 접촉면의 상대 각속도}}{\text{차량의 정상 진행속도}(V)}$$

이들 세 식 (46)부터 (48)까지 분자의 첫 항은 물체좌표계에서 윤축중심의 정상진행 속도  $V$ 에 대하여  $\overset{v}{e}_1$  또는  $\overset{v}{e}_2, \overset{v}{e}_3$  방향 성분에 평행좌표계 위치벡터  $\overset{1}{R}'_R$  또는  $\overset{1}{R}'_L$ 의 시간 미분치의  $\overset{v}{e}_1$  또는  $\overset{v}{e}_2, \overset{v}{e}_3$  방향 성분을 더하여 얻은 속도들이다. 이들 위치벡터  $\overset{1}{R}'_R$  또는  $\overset{1}{R}'_L$ 는 그림 3에서 벡터  $\overset{1}{R}_R$  또는  $\overset{1}{R}_L$ 과 식 (1)로 표현된 그림 2의 벡터  $\overset{1}{R}_w$ 의 합으로 구해진다. 이와 같은 정의에 의해서 식 (46)은 다음과 같이 표현된다.

$$\xi_{1R} = \frac{1}{V} \left[ \left( 1 - \frac{a}{R} \right) V + \overset{R}{R}_R \cdot \overset{r}{e}_{1R} - \left( \frac{r_R}{r_o} V + r_R \beta \right) \cos \psi \right] \quad (50)$$

이 식에서 분자의 두 번째 항은 다음과 같이 얻어지는데,

$$\begin{aligned} \overset{R}{R}_R \cdot \overset{r}{e}_{1R} &= \left[ \{ \overset{x}{x} + (a + \Delta_R) \overset{r}{\psi} \} i_T + \{ \overset{x}{x} + r_R \overset{r}{\phi} \} j_T + \{ \overset{x}{x} - (a + \Delta_R) \overset{r}{\phi} \} k_T \right] \cdot (i_T \cos \psi + j_T \sin \psi) = \left( 1 - \frac{a}{R} \right) V + \\ & \left[ \overset{x}{x} + (a + \Delta_R) \overset{r}{\psi} \right] \cos \psi + \left( \overset{x}{x} + r_R \overset{r}{\phi} \right) \sin \psi = \left( 1 - \frac{a}{R} \right) V + \overset{x}{x} + (a + \Delta_R) \overset{r}{\psi} \end{aligned}$$

이를 식 (50)에 대입해서 미소항 처리를 하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\xi_{1R} = \frac{1}{V} \left[ \overset{x}{x} + \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{r_R}{r_o} \right) V + (a + \Delta_R) \overset{r}{\psi} - r_R \beta \right] \quad (51)$$

횡방향의 크리피지를 구할 때는 신중을 기해야 한다. 왜냐하면 Garg & Dukkipati [1]가 제안한 식에서 고려하지 않은 다음 식에서 첫 항이 있기 때문이다. 이 항은 단순히 생각해서 직진을 한다는 생각만을 하면 횡방향 성분을 무시하기 쉽지만 차량 정상진행 속도  $V$ 에 대하여 차륜의 접촉지점과 윤축 중심과의 거리(또는 곡선반경 중심으로부터 접촉 지점까지의 거리)를 고려한 속도의  $\overset{1}{e}_{3R}$  방향 성분을 구하여 앞서서와 마찬가지로  $\overset{1}{e}_{2R}$  방향의 크리피지를 다음과 같이 구한다.

$$\xi_{2R} = - \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi \cos \delta_R + \frac{1}{V} \left( \overset{x}{x} + r_R \overset{r}{\phi} \right) \cos \delta_R - \frac{1}{V} \left[ \overset{x}{x} - (a + \Delta_R) \overset{r}{\phi} \right] \sin \delta_R \quad (52)$$

마찬가지로 수직방향 크리피지에 대한 결과도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\xi_{3R} = - \left[ \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{r_R}{r_o} \right) \psi - \frac{1}{V} (\mathcal{X} + r_R \phi) \right] \sin \delta_R + \frac{1}{V} [\mathcal{X} - (a + \Delta_R) \phi] \cos \delta_R \quad (53)$$

마지막으로 스펀크리피지에 대해서 구하여 미소항 처리를 하면 다음과 같은 결과를 얻는다. 이 과정에서는 식 (49)에서 분자의 두 번째 항을 고려하지 않았는데 이에 대해서는 Garg & Dukkipati[1]의 4.4절 설명과 더불어 그 의미를 연구 중인데 4.4절 자체의 설명이 완벽하지 않은 점이 있어 아직 결론을 얻지 못하고 있다.

$$\xi_{spR} = \frac{1}{V} \bar{\omega}_w \cdot \bar{e}_{3R} = \frac{1}{V} \left[ \left\{ \Omega + \beta \frac{V}{R} (\phi_{SE} + \phi) \right\} \sin \delta_w + \left( \psi \frac{V}{R} \right) \cos \delta_R \right] \quad (54)$$

왼쪽 차륜의 경우에는 역시 동일한 과정을 그대로 반복해서 구할 수 있으므로 상기의 제반 과정을 생략하고 결과만 소개하기로 한다.

$$\xi_{1L} = \frac{1}{V} \left[ \mathcal{X} + \left( 1 + \frac{a}{R} - \frac{r_L}{r_o} \right) V - (a - \Delta_L) \psi \frac{V}{R} - r_L \beta \right] \quad (55)$$

$$\xi_{2L} = -V \left( 1 + \frac{a}{R} - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi \cos \delta_L + \frac{1}{V} \left[ (\mathcal{X} + r_L \phi) \cos \delta_L + \{ \mathcal{X} - (a - \Delta_L) \phi \} \sin \delta_L \right] \quad (56)$$

$$\xi_{3L} = \left[ \left( 1 + \frac{a}{R} - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi - (\mathcal{X} + r_L \phi) \right] \sin \delta_L + \frac{1}{V} [\mathcal{X} - (a - \Delta_L) \phi] \cos \delta_R \quad (57)$$

$$\xi_{spL} = \frac{1}{V} \left[ - \left\{ \Omega + \beta \frac{V}{R} (\phi_{SE} + \phi) \right\} \sin \delta_w + \left( \psi \frac{V}{R} \right) \cos \delta_R \right] \quad (58)$$

정의에 의해 차륜이 수직 방향으로 들리지 않을 경우  $\xi_{3R} = \xi_{3L} = 0$  이므로 오른 쪽 차륜에 대해 다음과 같은 결과를 얻을 수 있고 이를 식 (52)에 대입하면 역시 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

$$\mathcal{X} - (a - \Delta_L) \phi = \left[ V \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi - (\mathcal{X} + r_R \phi) \right] \tan \delta_R$$

$$\xi_{2R} = \left[ - \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\mathcal{X} + r_R \phi) \right] \sec \delta_R \quad (59)$$

마찬가지로 왼 쪽 차륜에 대해서도 동일한 방법으로 유사한 결과를 얻을 수 있다.

$$\xi_{2L} = \left[ - \left( 1 + \frac{a}{R} - \frac{r_L}{r_o} \right) \psi + \frac{1}{V} (\mathcal{X} + r_L \phi) \right] \sec \delta_L \quad (60)$$

### 3. 맺음말

본 논문에서는 곡선경사선로 상에서의 차륜-윤축의 동력학적 기구를 규명한 기존 운동방정식에 대한 오류를 지적하고 수정을 했다. 비록 적지 않은 오류가 있기는 하지만 적절한 해석모델을 제공한 원저자들의 노력과 공은 매우 귀한 것임을 언급하고 싶다. 단지 단순화된 닫힌 해에 대한 지나친 가정이 가끔은 좀 지나친 것이 다소 안타까운 일이었다. 예를 들면 대차나 차체의 영향을 고려하면서 그들의 운동이 차륜-윤축과 평행하다고 한 것은 이들을 별도 질량으로 취급할 경우 현가장치의 변위를 별도로 고려해 운동자유도가 많아지기 때문인 듯하다.

그리고 직선선로에 대한 논문에 비해 아직 추가로 해야 할 일이 후반부에서 구한 크리피지를 이용하여 크리프힘 및 크리프모우멘트를 구하여 그 결과들을 운동방정식에 대입을 해서 최종적인 운동방정식을 6자유도 모두에 대해 구하는 일이 남아 있으며 또한 추가로 횡중력강성 및 요중력강성도 구해서 직선선로의 경우와 비교해 보는 것도 바람직할 것으로 사료된다.

또한 제반 오류에 대한 수정을 상세히 수행했지만 나름대로 아직 밝혀지지 않은 부분들이 있고 추가로 필요한 계산들을 충분히 수행해서 다음 기회에 명백히 하고 계산 결과까지도 포함을 해서 다시 발표할 예정이다.

마지막 언급하고 싶은 것은 원저서 Garg & Dukkipati [1]는 철도차량의 진동소음, 탈선, 충돌 그리고 궤도토목의 레일 분야에 종사하는 연구자들이 참조를 하고 있는 만큼 본 논문과 관련된 구체적인 계산 과정 및 제반 연구자료들을 널리 공개를 할 수 있으니, 관심이 있는 연구자들과 함께 지속적으로 같이 검토를 해서 잘못된 부분을 올바르게 잡아갈 수 있기를 바란다.

#### 참고문헌

- [1] V. K. Garg, I. Dukkipati, "Dynamics of Railway Vehicle Systems," Academic Press, 1984.
- [2] J. J. Kalker, "Review of Wheel-Rail Rolling Contact Theories, The General Problem of Rolling Contact" (A.L. Browne and N.T. Tsai, eds.), Applied Mechanics Division, Vol. 40, pp. 77-92, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1980.
- [3] F. W. Carter, On the Action of Locomotive Driving Wheel, Proc. R. Soc. London, ver. A. 112, 151-157, 1926.
- [4] F. P. Beer, E.R. Johnston, Jr., "Vector Mechanics for Engineers." Statics and Dynamics 3rd ed., McGraw-Hill Book Co.
- [5] E. H. Chang, V.K. Garg and P.W. Hartmann, Technical Documentation, Locomotive Response Model, Report R-295, Association of American Railroads, Chicago, Feb., 1978.
- [6] S. M. Krolevski, Model Development for Freight Car Dynamic Curving Simulation, M.S. thesis, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1982.