

# 지하철 차량운용 문제에 대한 수리적 해법에 관한 연구

## A Study on the Mathematical Programming Approach to the Subway Routing Problem

김경민\*                      홍순흠\*  
Kyung Min Kim    Soon-Heum Hong

---

### ABSTRACT

This paper considers subway routing problem. Given a schedule of train to be routed by a railway stock, the routing problem determines a sequence of trains while satisfying turnaround time and maintenance restrictions. Generally, the solution of routing problem is generated from set partition formulation solved by column generation method, a typical integer programming approach for train-set. However, we find the characteristics of metropolitan subway which has a simple rail network, a few end stations and 13 departure-arrival patterns. We reflect a turn-around constraint due to spatial limitations has no existence in conventional railroad. Our objective is to minimize the number of daily train-sets.

In this paper, we develop two basic techniques that solve the subway routing problem in a reasonable time. In first stage, we formulate the routing problem as a Min-cost-flow problem. Then, in the second stage, we attempt to normalize the distance covered to each routes and reduce the travel distance using our heuristic approach. Applied to the current daily timetable, we could find the subway routings, which is an approximately 14% improvement on the number of train-sets reducing 15% of maximum traveling distance and 8% of the standard deviation.

---

### (국문요약)

차량운용문제 혹은 열차반복문제는 수송계획, 열차운행계획에서 작성된 열차운행시각에 기초하여 편성 유형 또는 차종에 따라 주어진 제약조건(선회조건, 검수조건, 기지복귀조건 등)을 반영하여 최적의 차량운용 다이어, 운용순서를 구성하는 문제이다. 일반적으로 이 문제는 집합분할(Set Partition)문제로 모델링하여 열생성(Column Generation) 기법을 사용하여 제약조건에 맞는 운용을 생성하였다. 하지만, 본 연구에서는 지하철과 같이 열차운행의 빈도는 높고 물리적 네트워크는 간단하며 시종착역의 수가 적을 경우 많은 대안 경로(Alternative Routing)들이 생성되는 특징 및 일반 철도와는 다른 역에서의 공간적 제약에 따른 차량 선회 제약을 고려하여 차량운용수를 최소화할 수 있는 지하철 차량운용 문제에 대한 수학적 모델을 제시하고자 한다. 먼저, 차량선회제약만을 고려하여 최소비용 흐름 모형으로 네트워크 모형을 구성하였다. 최소비용 흐름 모형을 결과로 생성된 운용을 바탕으로 각 운용의 운행거리를 정규화(Normalize)하는 휴리스틱 기법을 제안하였다. 또한, 이 방법론을 실제와 유사한 지하철 열차 스케줄에 적용하였고 약 14%의 차량소요 감소 및 최대 영업거리 약 11%, 표준영업거리편차 약 5% 감소를 통하여 본 연구결과의 유용성을 확인하였다.

---

\* 한국철도기술연구원 철도정책물류연구본부  
E-mail : kmkim@krii.re.kr (김경민)  
TEL : (031)460-5491 FAX : (031)460-5499

## 1. 서론

일반적으로 차량운용문제 혹은 열차반복문제는 수송계획, 열차운행계획에서 작성된 열차운행시간에 기초하여 편성유형 또는 차종에 따라 주어진 제약조건(선회조건, 검수조건, 기지복귀조건 등)을 반영하여 최적의 차량운용 다이어, 운용순서를 구성하는 문제이다.

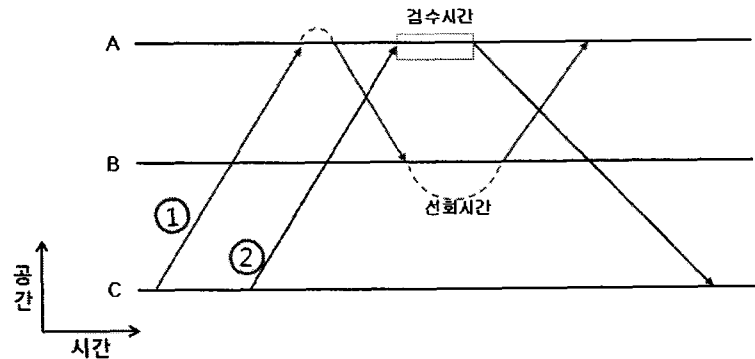


Fig. 1. Routing diagram of a railway network

본 연구에서는 물리적 네트워크와 열차 시종착 패턴은 간단하지만 열차운행의 횟수가 높은 지하철 차량운용 문제에 대해서 다루고자한다. 일반적인 광역열차 스케줄이 일주일 단위로 작성 되는 것과 달리 지하철 스케줄은 주중, 토요일, 일요일 운행열차 수는 다르지만 일간 각 역에서 시종착하는 열차의 수가 같으므로 승객을 태우지 않고 역간을 운행하는 회송열차(Deadhead Train) 없이 일간 운행계획을 작성할 수 있는 특징을 가지고 있다. 또한, 하나의 차량이 어떤 운용에 투입되었을 때, 다양한 검수 조건들과 차량 운행 및 검수 이력에 의해 차량의 교체가 불가피하므로 그 차량이 그 운용에 있는 모든 열차를 소화한다고는 볼 수 없고 일간 운행계획이므로 검수조건은 고려하지 않았다. 하지만, 지하철 운용계획의 특징인 기지로 회송된 열차는 다시 일간운행을 하지 않는 제약을 검수 특성으로 대신하였다. 차량 운용 계획 문제의 응용을 통해서 실제 차량 소요량을 정량적으로 계산 할 수 있고 운행 효율성을 극대화시킬 수 있으며 외란 발생시 열차 스케줄 변경에 능동적으로 대처할 수 있을 것이라고 생각된다.

## 2. 기존연구

일반적으로 차량 운용계획 문제는 집합분할(Set Partition)문제로 모델링하여 열생성(Column Generation) 기법을 사용하여 제약조건에 맞는 운용을 생성하는 방법으로 접근되어져 왔다. 즉, 첫 단계는 한 차량이 하루에 운행할 수 있는 조건을 만족하는 몇 개의 열차를 조합하는 문제이며, 두 번째 단계는 하루 운행들을 여러 개 연결하여 실제로 한 차량의 운용을 생성하는 것이다. 하지만 두 번째 단계에서 만들어지는 운행 가능한 운용의 수는 하루 열차 수에 비례해 조합적으로 증가해 문제의 최적해를 구하는 것을 어렵게 하는 것으로 알려져 있다.

이러한 차량 운용계획 문제는 여러 분야에서 적용되고 있으며 특히 대형항공사나 철도회사의 경우에 있어서 많은 연구가 수행되어 왔다. 차량 운용계획 문제와 관련하여 다양한 해법들이 개발되어져 왔다. Gopalan *et al.*[1]는 하루 운용을 FIFO나 LIFO등의 간단한 규칙을 사용하여 구한 후에 이러한 일간 운용들이 3일 검수 조건을 만족시키면서 연결되도록 하였다. Kabbani *et al.*[2]는 일주일 주기를 가지는 Aircraft 운용문제를 집합 분할(set partitioning)문제로 모형화 하였으며 3일 주기의 검수조건을 다루고 있다. 이들은 하루 운용에 대한 pseudo-costs to penalize 일간운용을 개발하였고 이러한 일간 운용을 연결하는 방법으로 제시하였다. 또한 Barnhart *et al.*[3]은 검수 조건을 만족시키는 String들을

구하고 Branch and Price 방법으로 String들을 연결시켰다.

Clarke et al.[4]은 Traveling salesman 문제로 모형화 하였으며 문제 해결시 생성되는 Subtour에 대해서는 Lagrangian relaxation과 휴리스틱 방법을 이용하여 해결 하였다. Talluri[5]는  $k$ -Maintenance Euler Tour를 정의 하고 3-MET 문제에 대해서는 다항시간 알고리즘을 제시하였으며  $k \geq 4$ ,  $k$ -MET 문제는 NP-complete임을 증명하였다. 또한 Zhao et al.[6]는 일간 검수를 random choice하는 TSP 휴리스틱 기법을 사용 하였다. 이 연구들은 차량 순환계획으로 분류 할 수 있다. 또한 Schrijver[7]는 철도 차량의 하루 운용에 대하여 차량 유형에 따라 최소비용흐름(Min-cost-flow) 문제로 모형화 하였다.

국내의 경우는 수리적 기법을 적용한 사례가 아직 미미한 실정이다. 김동희 et al.[8]은 철도차량 운용계획 문제에 최적화 기법을 적용시키기 위한 사전 연구로서 일반철도의 차량운용 문제의 관련 제약을 분석하고 주간 차량할당을 고려하는 실용적 기법을 제시하였다. 그리고 홍성필 et al.[9]은 다양한 차량 운용문제에 대한 문제유형을 주기성과 순환성에 따라서 분석하였으며 시간과 거리 두 가지 제약 조건을 고려하는 일주일 단위의 차량운용문제에 대한 실용적 해법을 제시하였고 한국고속철도에 적용한 사례가 있다.

### 3. 지하철 차량운용 문제를 위한 수리모형 수립

본 연구에서는 지하철 차량운용 문제를 위한 수리모형을 수립하였다. 이 모형은 홍성필 et al.[9]에서 제시하는 검수조건 완화시 차량 소요량을 최소화하는 모형을 토대로 일반 철도와는 다른 역에서의 공간적 제약에 따른 차량 선회 제약을 고려하여 최소비용흐름모형으로 구성되었다.

#### 3.1 지하철 차량운용 문제를 위한 네트워크 모형

<그림 2, 3>과 같이 4개의 열차가 있고 열차사이의 출도착 시간 차이가 당고개역의 선회시간 보다 큰 경우에 가능한 차량운용의 가지 수는 2가지이다. 이때, 각 역에서의 현실적 선회용량제한 및 운전자의 운행시간 평균화를 생각하면 1번 가능운용의 결과가 2번 가능운용의 결과보다 더 낫은 해가 된다. 그러므로 본 연구에서는 이를 고려하여 차량운용수를 최소화하면서 각 역에서의 선회순서는 운영 효율성이 높은 FIFT(First In First Turnaround) 방식을 따르도록 네트워크 모형을 설계하였다.

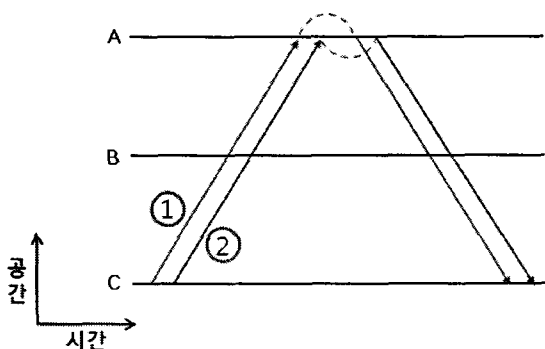


Fig. 2. Feasible Routing 1

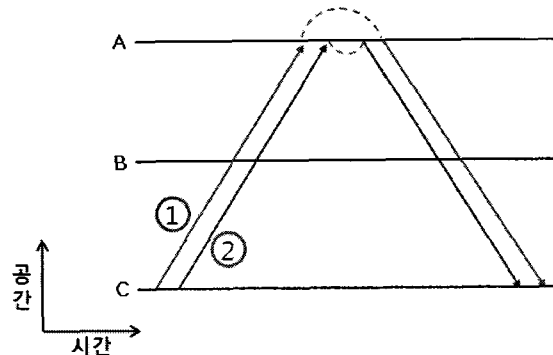


Fig. 3. Feasible Routing 2

최소비용 흐름 모형을 위한 그래프  $G=(V,E_1,E_2,E_3)$ 를 다음과 같이 구성한다. 하나의 열차를 출발 노드, 도착 노드 두 개로 나눈다. 각 노드에는 역과 시간 정보를 가지고 있다. 노드 사이에는 아래와 같은 3가지 종류의 호(arc) 집합이 존재한다.

- 1)  $E_1$ (열차호 집합) : 하나의 열차를 나눈 두 개의 노드 사이를 연결한다.  $(c_{ij}, l_{ij}, u_{ij})$ 값은  $(0, 1, 1)$ 로서 운용수와 무관하므로 비용은 없으며 항상 흐름이 생겨야하므로 하한, 상한의 값이 모두 1이다.
- 2)  $E_2$ (선회가능호 집합) : 차량이 선회하여 연결 가능한 노드사이에 연결된다. 즉, 역에서의 출도착시간 차이가 선회시간보다 큰 경우에 생성된다. 선회가능호 중 하나의 열차에만 흐름이 생겨야 하므로 호의 하한 값은 0 상한 값은 1이다. 단, <그림 4>와 같이 하나의 열차 T에 선회가능한 집합이  $\{T_{c_1}, T_{c_2}, T_{c_3}, \dots, T_{c_n}\}$ 일 때  $c_{ij}$ 값은 시간 순으로 증가하도록 하여 FIFT를 따르는 것이 이익이 되도록 한다.
- 3)  $E_3$ (주기반복호 집합) : 주기반복호는 차량운용수를 계산하는 호이다. 역의 정보가 같고 시간 정보가 앞선 노드 사이에 연결된다. 운용을 만들 때 주기반복호 흐름이 생긴다면 이는 실제로 다음 주기 운용과 연결된다고 생각한다. 선회가능호의  $c_{ij}$ 값에 영향을 받지 않으면서 최소차량 운용수 계산을 위해  $c_{ij}$ 값은 충분히 큰 수(Big M)를 가진다.

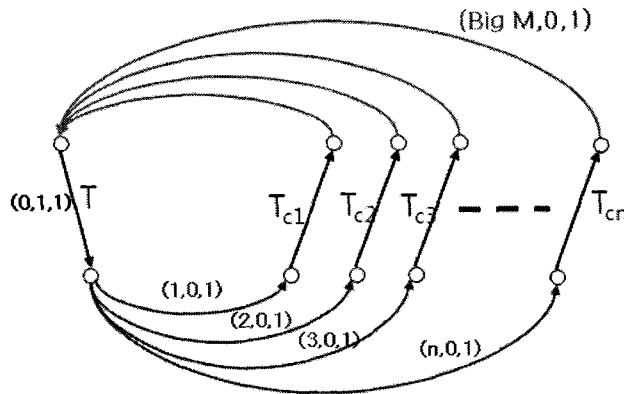


Fig. 4. Network Model

### 3.2 지하철 차량운용 문제를 위한 수리 모형

최소비용 흐름 모형으로 차량운용 문제를 수리모형화하면 Totally Unimodularity의 성질을 만족 시키므로 정수해를 얻을 수 있는 장점을 가진다. 이에 관한 내용은 Wolsey[10]에 나와 있다. 또한 최소비용 흐름 모형은 다항시간안에 최적해를 구할 수 있다는 장점을 가진다. 수리모형은 다음과 같다.

$$\min \sum_{(i,j) \in E_2 \cup E_3} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ji} = 0, i \in N \quad (3.1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in E_2 \cup E_3 \quad (3.2)$$

$$1 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in E_1 \quad (3.3)$$

where,  $E_1$  : 열차호집합

$E_2$  : 선회가능호집합

$E_3$  : 주기반복호집합

제약식 (3.1)은 각 노드의 Flow Balance에 관한 제약식으로 들어오는 흐름의 양과 나가는 흐름의 양의 합이 0을 만족 시켜야한다. 제약식 (3.2)와 (3.3)는 앞에서 설명한 호의 집합별로 만족시켜야하는 하한, 상한의 값에 관한 제약식이다.

### 3.3 운행거리 정규화(Normalization) 알고리즘

앞서 3.2절에서 설명한 바와 같이 최소비용흐름모형 기반의 수리모형의 결과로써 차량운용수를 최소화하면서 선회시간을 가능한 짧게 함으로써 운영시간을 줄이는 일간 차량운용을 구할 수 있다. 본 절에서는 지하철과 같이 열차운행의 빈도는 높지만 물리적 네트워크는 간단하며 시종착역의 수가 적을 경우 많은 대안 경로(Alternative Routing)들이 생성되는 특징을 이용하여 각 운용의 운행거리를 정규화 하는 알고리즘을 제안하여 보다 운행시간 및 운행거리에서 효율성이 높은 해를 얻고자 한다. 이를 위하여 만약  $R_{ex1}, R_{ex2}$  두 개의 운용에서  $(i_{ex1} \rightarrow j_{ex1}), (i_{ex2} \rightarrow j_{ex2})$ 인 열차가 다음과 같은 두 가지 조건을 만족시키면 호 교환  $(i_{ex1} \rightarrow j_{ex2}), (i_{ex2} \rightarrow j_{ex1})$ 이 가능하다.

(1)  $i_{ex1}, i_{ex2}$ 의 도착역이 같다.

(2)  $i_{ex1}$ 의 도착시간 + 선회시간  $\leq j_{ex2}$ 의 출발시간 and  $i_{ex2}$ 의 도착시간 + 선회시간  $\leq j_{ex1}$ 의 출발시간

<정규화 알고리즘>

단계 1(초기화) : 최소흐름 비용 모형으로 지하철차량운용 계획 문제를 풀어 운용을 생성한다.

단계 2(정렬) : 운행거리 순으로 운용을 정렬한다.  $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_n, ex1 = 0, ex2 = n + 1$ .

단계 3( $R_{ex1}$  선택) : 만약  $ex1 = n$ 이면 단계 6으로

그렇지 않으면  $ex1$  값 1 증가 후  $R_{ex1}$  선택

단계 4( $R_{ex2}$  선택) : 만약  $ex2 = ex1$ 이면  $ex2 = n + 1$ , 단계 3으로

그렇지 않으면  $ex2$  값 1 감소 후  $R_{ex2}$  선택

단계 5(호 교환) :  $R_{ex1}, R_{ex2}$  두 개의 운용에서 호 교환을 통해서 운행거리의 표준편차가 교환전보다 적어지면 호 교환 후 단계 2로 그렇지 않으면 단계 4로.

단계 6(종료) : 알고리즘 종료

#### 4. 모형수행 및 결과

앞에서 설명한 수리모형과 알고리즘을 실제와 유사한 지하철 열차 스케줄에 적용해 보았다. 총 460개(상행 183, 하행 183, 회송 94)의 열차 스케줄을 실험 대상으로 하였다. 11개의 시종착역과 13개의 시종착 패턴을 가지고 있으며 각 시종착역의 최소 선회시간은 기존운영사의 운영을 분석하여 구하였으며 기지에서 선회시간을 무한대로 함으로써 기지로 회송된 열차는 다시 일간운행을 하지 않도록 하였다. 이는 <그림 5>와 <표 1>에 정리되어있다. 문제의 선형식의 풀이와 네트워크 구성은 Pentium(R) 4 CPU 2.80GHz, 504MB RAM, CPLEX 9.1의 라이브러리와 Visual C++ 6.0을 사용하였다.

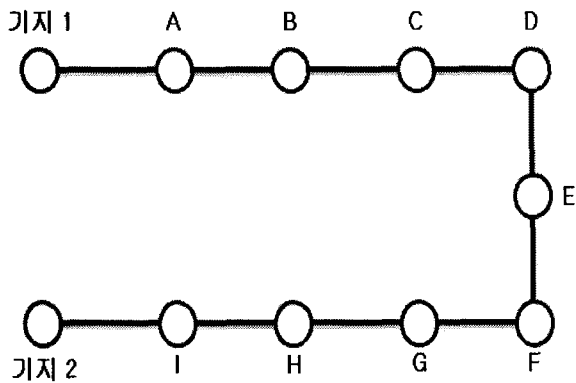


Fig. 5. Subway Line Network

시종착역	선회시간	시발역		종착역	
		일반	회송	일반	회송
기지 1	$\infty$	-	45	-	43
A	5	159	40	180	21
B	2	1	1	1	2
C	2	21	2	-	22
D	2	2	-	2	-
E	2	2	-	2	-
F	5	123	-	123	-
G	2	2	-	2	-
H	5	18	-	18	-
I	5	38	3	38	3
기지 2	$\infty$	-	3	-	3
합계	-	366	94	366	94

Table. 1. Schedule Data

본 연구에서 제시한 수리모형을 바탕으로 지하철 차량운용문제를 풀어 본 결과가 <표 2>에 요약되어 있다. 목적함수인 차량운용수 최소화 및 운영 효율성을 비교하기 위하여 운용수 뿐만 아니라 영업거리, 운행시간 등을 비교하였으며 최대, 최소, 평균, 표준편차 등을 함께 계산하였다. 또한, 기지선회를 허용할 때 차량운용수를 구하여 향후 정책 변화에 대응할 수 있도록 하였다.

평일	유사운영	기지선회 시간 $\infty$		기지선회 시간 480분	기지선회 시간 360분
		FIFT 미적용	FIFT 적용		
운용수	61	52	52	44	41
평균 영업거리(km)	236.3	277.2	277.2	327.5	351.5
표준편차 영업거리(km)	170.4	158.8	162.3	143.8	145.8
최대 영업거리(km)	698	593	618.5	606	581
최소 영업거리(km)	35.8	39.4	39.4	39.4	13
평균 운행시간	9:36:23	10:02:30	9:41:06	13:00:52	14:23:04
표준편차 운행시간	5:18:59	5:29:00	5:19:56	5:13:54	5:28:21
최대 운행시간	19:59:00	18:48:00	18:10:00	19:41:00	19:41:00
최소 운행시간	1:59:00	2:09:00	1:00:00	1:59:00	0:27:00
계산시간(sec)	-	1.04	1.15	1.27	1.31

Table. 2. Experiment Result

실험결과 유사운영과 비교하여 약 14%정도의 차량감소 및 최대 영업거리 약 11%감소, 표준영업거리편

차 약 5% 감소된 운영을 얻을 수 있었다. 또한, 똑같은 최소비용흐름 모형이라도 FIFT를 따르는 것이 이익이 되도록 선회가능호 집합의 비용을 조정한 경우는 그렇지 않은 경우를 비교하였을 때 평균운행시간은 약 20분, 최대 운행시간은 약 38분 감소시키는 결과를 나타내었다. 계산시간은 2초 내로 이는 본 연구의 수리모형의 계산복잡도가 다항시간의 계산 복잡성을 가지고 있기 때문이다.

## 5. 결론 및 향후 연구과제

본 연구에서는 지하철과 같이 열차운행의 빈도는 높지만 물리적 네트워크는 간단하며 시종착역의 수가 적을 경우 많은 대안 경로들이 생성되는 특징 및 일반 철도와는 다른 역에서의 공간적 제약에 따른 차량 선회 제약을 고려하여 차량운용수를 최소화할 수 있는 지하철 차량운용 문제에 대한 수학적 모델을 제시하였다. 향후 3.3에서 제안한 알고리즘의 효과를 실험하는 연구와 지하철의 특성상 발생 빈도가 높은 외란에 의한 지연발생시 차량운용을 통한 지연 확대 감소 및 스케줄의 강인성에 대한 연구가 필요하다고 생각된다.

## 참고 문헌

- [1] R. Gopalan, K.T. Talluri, "The Aircraft Maintenance Routing problem" Operations research, Vol.46(1992).
- [2] N.M. Kabani and B.W. Patty, "Aircraft Routing at American Airlines" Proceedings of the Thirty-Second Annual Symposium of AGIFORS, Budapest, Hungary(1992)
- [3] C. Barnhart, N.L. Boland, "Flight String Models for Aircraft Fleeting and Routing," Alogrithica, Vol.20(1998), pp.151-174.
- [4] L. Clarke, E.L. Johnson, G.L. Nemhauser, "The Aircraft Rotation Problem," Ann. Oper. Res. Math. Ind. Syst, Vol.69(1997), pp.33-46.
- [5] T.Talluri, "The four-day aircraft maintenance routing problem," Transportation Science, Vol32(1998),
- [6] P. Zhao, P. N. Tomii, N. Fukumura, T. Sakaguchi, "An algorithm for train-set scheduling based on probabilistic local search" Computers in railways, 2002, pp.817-826
- [7] Schrijver, "Minimum circulation of railway stock," technical notes
- [8] 김재희, 오석문, 홍순흠, "유지보수를 고려한 철도차량 운용계획에 관한 연구", 한국철도학회 2003 춘계학술대회 논문집.
- [9] 홍성필, 김경민, 이경식, 박범환, 홍순흠, "최소차량운용문제에 대한 실용적 해법", 대한산업공학회/한국경영과학회 2006 춘계공동학술대회 논문집.
- [10] L. A. Wolsey, (1999), *Integer Programming*, John Wiley and Sons, INC.