

타운젠트 방전에서 전자의 충돌

조연찬*, 이은웅*, 조현길**
충남대학교*, LG산전**

The Collision of Electrons in the Townsend's Discharge

Yeon-Chan Cho*, Eun-Woong Lee*, Hyun-Kil Cho**,
Chungnam National University*,
LG Industrial Systems Company**,

Abstract - This paper is to be linked the discharge theory with parameter ϵ the coefficient of restitution used in physics. The collisions is of particular importance in high-voltage engineering, nuclear, and high-energy physics. Here the bodies collided may be atoms, nuclei or various elementary particles, such as electrons, protons, and so on.

1. 서 론

타운젠트 방전론에 앞서, 전기적으로 중성인 탄성구인 기체분자가 연속적인 무질서 운동을 하는 경우, 두 물체가 충돌할 때는 언제나 두 물체를 단일체로 보며 한 쪽 기체분자가 다른 쪽 분자에 접촉하는 동안 작용하는 힘은 외력이 작용하지 않고 내력이 되므로 따라서 운동량은 변하지 않으므로

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1.1)$$

이다. 그리고, 운동량 및 운동에너지가 보존되나, 충돌 시 발생하는 열에너지 및 빛 에너지 등의 내부 에너지의 변화가 일어나 운동에너지가 보존되지 않는 비탄성 충돌이 일어난다.

비탄성 충돌로 에너지 균형이 일어나는 운동에너지와 충돌로 인한 에너지의 증감량의 변화는

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + Q \quad (1.2)$$

로 된다. 충돌의 결과로 생기는 운동에너지의 순 손실 또는 이득을 나타내기 위하여 도입된 물리량 Q 로 탄성충돌인 경우는 총 운동에너지의 변화가 없으므로 $Q=0$ 이며, 에너지 손실이 있으면 Q 는 양으로 발열충돌(exoergic collision)이다. Q 가 음인 경우 흡열충돌(endoergic collision)로 접촉점에서 물체 중의 하나에 에너지 이득이 발생하여 폭발이 일어나는 경우에 해당 된다.

따라서 탄성충돌과 비탄성충돌을 반발계수

$$\epsilon = \frac{|v_1' - v_2'|}{|v_1 - v_2|} \quad (1.3)$$

로 설명된다[1,2].

2. 탄성충돌

탄성충돌(elastic collision)의 식(2.1)과 식(2.2)의 충돌 전 후에서 선운동량과 운동에너지가 보존되는 것이며 반발계수는 접근속력 v 에 대한 분리속력 v 의 비(식(1.3))로 정의된다. 식(1.1) 및 식(1.2) 첨자 1과 2는 두 물체에 대한 것이며 '프라임' 표시는 충돌 후의 각각에 대한 속력을 나타낸다.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2.2)$$

$$\epsilon = \frac{|v_1' - v_2'|}{|v_1 - v_2|} \quad (2.3)$$

식(1.3)의 반발계수 ϵ 는 대부분 실제 물체에서 $\epsilon=1$ 이면 탄성충돌이며 $\epsilon=0$ 이면 완전 비탄성(totally inelastic)충돌로 두 물체가 충돌한 후에 한 물체가 된다[1].

2.1 정면충돌

탄성충돌에 대하여 질량이 m_2 인 입자 2가 정지해 있는(속도 $v_2=0$) 곳에 x 축을 따라 왼쪽에서 질량 m_1 인 입자 1이 속도 v_1 을 가지고 입사되어

정면충돌을 한 후의 입자 1과 2의 속도를 각각 v_1', v_2' 라 하면 $v_2=0$ 이므로, 식(2.1)은 식(2.4)로, 식(2.2)는 식(2.5)로, 식(2.3)은 식(2.6)으로 된다.

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2.5)$$

$$\epsilon = \frac{|v_1' - v_2'|}{|v_1|} \quad (2.6)$$

식(2.4)의 v_2' 는 식(2.7)로 된다.

$$v_2' = v_1 - \frac{m_1}{m_2} v_1' \quad (2.7)$$

식(2.7)를 식(2.5)에 대입하면 식(2.8)로 된다.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1} v_1'^2 - m_2 v_1 v_1' + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2.8)$$

식(2.8)식의 양변에 $\frac{m_1}{m_2 v_2}$ 를 곱하여 정리하면 입자2의 충돌후 속도 v_2' 는 식(2.9)로 된다.

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.9)$$

이 충돌에 의해 입자 1이 잃은 운동에너지 ΔE 는 충돌 후 입자 2가 얻은 에너지 $\frac{1}{2} m_2 v_2'^2$ 과 같으며 충돌 전의 에너지 E_1 과 충돌로 잃은 에너지의 비로 정의되는 입자 1의 에너지 손실계수(energy loss factor) k 는 식(2.10)이 된다.

$$k = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (2.10)$$

식(2.4)에서 충돌전 입자1의 속도와 충돌후 입자1,2의 속도 관계식(2.11)이 얻어진다.

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2' + v_1' \quad (2.11)$$

식(2.5)에서 충돌후의 입자2의 속도 v_2' 는 식(2.12)로 구해진다[2].

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.12)$$

식(2.6)과 식(2.11)에서 반발계수 ϵ 로 나타낸 충돌후의 입자2의 속도 v_2' 와 충돌전 입자1의 속도 v_1 의 관계는 식(2.13)으로 된다.

$$v_2' = \frac{m_1(1 + \epsilon)}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.13)$$

따라서 입자 질량과 반발계수로 나타내지는 손실계수 k 는 식(2.14)이다.

$$k = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{m_1 m_2 (1 + \epsilon)^2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (2.14)$$

탄성충돌, 즉 $\epsilon = 1$ 이면 식(2.14)는 식(2.10)과 같다.

2.2 비탄성 충돌

입자1이 x 축을 기준으로 각도 θ 로 입사하여 좌표축 원점에 정지해 있는 입자2와 충돌하여 직교좌표축 x 와 y 에 나타나는 운동량 보존법칙은식(2.15)와 식(2.16)이고 에너지 보존법칙은 식(2.5)와 같다.

$$m_1 v_1 \cos\theta = m_1 v_1' \cos\phi + m_2 v_2' \quad (2.15)$$

$$m_1 v_1 \sin\theta = m_1 v_1' \sin\phi \quad (2.16)$$

식(2.15), (2.16), (2.5)에서 v_2' 를 구하면 식(2.17)로 된다.

$$v_2' = \frac{2m_1 m_2 \cos\theta}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.17)$$

그리고 에너지 손실계수 k 는 식(2.18)로 되며 정면 충돌시 식(2.10)과 다르다.

$$k = \frac{\Delta E}{E_1} = \frac{4m_1 m_2 \cos^2\theta}{(m_1 + m_2)^2} \quad (2.18)$$

모든 경사 각에 대하여 평균을 취하면 평균 에너지 손실계수는 θ_{av} 는 식(2.19)로 된다[3,4].

$$\begin{aligned} \theta_{av} &= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta k d\theta \\ &= \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

3 비탄성충돌

비탄성 충돌시 입자1,2의 선운동량 보존법칙은 식(2.4)와 같지만 운동에너지 보존의 법칙은 내부에너지 변화인 Q , 발열충돌(exoergic collision)이나 흡열충돌(endoergic collision)에너지를 고려하여야 하기 때문에 탄성충돌 식(2.5)와 달리 식(3.1)로 된다.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + Q \quad (3.1)$$

그리고 반발계수 ϵ 는 식(2.6)이 된다.

내부에너지 변화 Q 로 $v_2' = \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_1')$ 를 식(2.6)에 대입하면 식(3.2)로 된다.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{m_1^2}{2m_2} (v_1 - v_1')^2 + Q \quad (3.2)$$

$\frac{dQ}{dv_1} = 0$ 을 계산하면 입자1의 충돌후의 속도 v_1' 의 식(3.3)을 얻는다.

$$\frac{dQ}{dv_1} = -m_1 v_1' + \frac{m_1^2}{m_2} (v_1 - v_1') = 0$$

$$v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (3.3)$$

식(3.3)을 식(3.1)에 대입하면

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_1^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기서 m 은 환산질량, 즉 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ [5]

반발계수 ϵ 를 사용하여 내부에너지 변화 Q 를 나타내려면식(2.4)와 식(2.6)에서 입자1,2의 충돌후의 속도 v_1' , v_2' 는 식(3.5)와 식(3.6)이 된다.

$$v_1' = \frac{(m_1 - \epsilon m_2) v_1}{m_1 + m_2} \quad (3.5)$$

$$v_2' = \frac{m_1 (1 + \epsilon) v_1}{m_1 + m_2} \quad (3.6)$$

완전 비탄성 충돌인 경우 $\epsilon = 0$ 이므로, $v_1' = v_2'$ 이므로, 띄워지지 않으며, $m_1 = m_2$ 이고, $\epsilon = 1$ 인 경우 $v_1' = 0$, $v_2' = v_1$ 으로 두 물체는 속도를 서로 교환한다. 식(3.5)과 식(3.6)을 식(3.1)에 대입하여 Q 를 구하면식(3.7)이 된다.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 (1 - \epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} m v_1^2 (1 - \epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

만약, $\epsilon = 1$ 즉, 탄성충돌이면 $Q = 0$ 이며,
 $\epsilon = 0$ 즉, 완전 비탄성 충돌이면
 $Q = m v_1^2$ 으로 식(2.6)과 같다[1].

4. 결 론

본 논문은 전자의 충돌에서 물리학분야에서 사용되고 있는 반발계수 ϵ 를 사용하여 탄성충돌과 비탄성충돌에 대한 에너지 손실계수 k 및 내부에너지 변화 Q 를 구하여 탄성충돌인 $\epsilon = 1$ 경우와 완전 비탄성 충돌인 $\epsilon = 0$ 인 경우, 기존 에너지 손실계수 k 및 내부에너지 변화 Q 가 같음을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] Grant R. Fowles, "ANALYTICAL MECHANICS", Fourth Edition, Saunders College Publishing, pp 177-179, 1986
- [2] 김종일, "고전압 방전 플라즈마 : 이론 및 응용", 도서출판 인터비전, pp 84-88, 2003
- [3] E. Kuffel, W.S. Zaengl, J. Kuffel, "High Voltage Engineering Fundamentals", Second Edition, Butterwrth-Heinemann, pp 291-294, 2000
- [4] 김근호, 양성채, "플라즈마 일렉트로닉스", (주)교학사, pp 34-35, 2006
- [5] 오철환, "기체방전학", 경북대학교출판부, pp 23-26, 1996