

개선된 일차전단변형이론을 이용한 지능구조평판의 거동해석

The Analysis of Smart Plate Using Enhanced First Shear Deformation Theory

오진호* · 김홍수** · 이승윤*** · 조맹효****

Oh, Jin-Ho · Kim, Heung-Su · Rhee, Seung-Yun · Cho, Maeng-Hyo

ABSTRACT

An enhanced first shear deformation theory for composite plate is developed. The detailed process is as follows. Firstly, the theory is formulated by modifying higher order zig-zag theory. That is, the higher order theory is separated into the warping function representing the higher order terms and lower order terms. Secondly, the relationships between higher order zig-zag field and averaged first shear deformation field based on the Reissner-Mindlin's plate theory are derived. Lastly, the effective shear modulus is calculated by minimizing error between higher order energy and first order energy. Then the governing equation of FSDT is solved by substituting shear modulus into effective shear modulus. The recovery processing with the nodal unknown obtained from governing equation is performed. The accuracy of the present proposed theory is demonstrated through numerical examples. The proposed method will serve as a powerful tool in the prediction of laminated composite plate.

Keywords: *Enhanced First Shear Deformation Theory, Finite Element Formulation, Higher Order Zig-Zag Theory.*

1. 서론

최근에 들어, 고강도와 강성을 요구하는 항공기, 잠수함, 자동차등의 발전으로 인해, 복합재료 구조물에 대한 해석, 설계, 제작 등이 중요한 문제가 되었다. 특히, 복합재료는 일반적으로 사용되는 등방성 재료와는 달리, 이방성 특성으로 인해, 해석에 어려움이 많았으나, 최근에 들어 효율성과 정확성을 겸비한 다양한 해석 기법들이 보고되고 있다. 해석기법으로는 다음과 같은 해석모델들이 있다. 먼저, 근사 단층이론 (Lo, 1997; Levinson, 1980)을 들 수 있는데, 이 방법은 복합재 구조물의 두께방향으로의 횡 전단응력 연속조건을 만족하지 못하기 때문에 해석의 정확도를 보장할 수 없는 단점을 가지고 있다. 이를 보완하기 위해 적층 구조물의 두께 방향으로 각 층마다 자유도를 부과하는 층별 이론(Reddy, 1987)이 제안되었다. 이 이론 또한 해석하고자 하는 시스템의 자유도가 적층 수에 의존하기 때문에, 계산량과 주자유도의 수가 적층 수의 증가에 따라

* 정회원 · POSCO 기술연구소 Email: jinhooh@posco.co.kr

** 정회원 · 인하대학교 기계공학과 연구 교수

*** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 박사과정

**** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 교수 Email: mhcho@snu.ac.kr

급격히 증가하는 단점을 보이게 된다. 이에 따라 상기된 두 이론이 가지는 단점들을 해결하기 위해 여러 종류의 지그재그 이론이 제안되었다. 자세한 내용은 참고문헌(Cho, 1992; Carrera, 2003; Cho, 2000)에 주어진다. 본 연구에서 제안된 방법은 변위의 횡 전단 응력 연속조건을 층 경계면 마다 만족시킬 수 있으며 또한, 변위장의 기술에 있어서 층의 수와 상관없이 7개 변수만을 사용하게 되므로 계산상에 있어서 많은 장점을 가지고 있다. 그러나 지그재그 이론을 이용하여, 유한 요소를 구현 하는 경우 c^0 연속조건을 만족하는 형상함수가 필요하게 되어, 결과적으로는 sub-parametric 요소를 사용하는 경우가 된다. 이는 일반적인 상업용 패키지에서 사용되는 등매개 요소에 적용되는 c^0 요소와 다르다는 문제점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해, 후처리 기법들이 제안 되었으며, 가장 널리 사용되고 있는 방법으로는 전단 수정계수(Whitney, 1972)를 구하여 FSDT(First-order shear deformation theory)의 해를 향상 시키는 방법이 있다. 그러나, 전단 수정계수를 구하는 방법 역시 해석 모델과 경계 조건에 따라 계산과정이 매우 복잡해지는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는, 이러한 여러 문제점을 해결하면서, 효율적으로 해석을 수행 할 수 있는 개선된 일차 전단 변형(EFSDT) 이론을 개발하였다. 제안된 이론은 고차 지그재그 이론의 정확도를 확보할 수 있을 뿐만 아니라, 유한요소 해석 시 c^0 연속조건을 만족하는 형상 함수만으로 정식화 할 수 있다. 현재 이론의 타당성을 검토하기 위해, 현재이론에 기초를 둔 유한요소 해석 결과를 상용소프트웨어(ANSYS)의 해석 결과와 비교하였다. 그 결과, ANSYS의 해석 결과는 고차 지그 재그 이론의 해석 결과와 차이가 있지만, 본 연구에서 제안된 이론의 해석 결과는 거의 일치함을 확인할 수 있다. 결국, 현재 제안된 이론에 기초를 둔 유한 요소 해석 기법은 지금까지, 제안된 어떤 이론보다도 높은 해의 정확도를 확보 할 수 있다.

2. 개선된 일차 전단변형 이론의 정식화

개선된 일차 전단 변형이론을 정식화하기 위해서는 우선 고차 이론과 일차 이론의 매개적인 역할을 하는 와핑함수(Warping function)를 계산하여야 한다. 이 함수는 고차 이론의 변위장을 변형시켜서 얻을 수 있다. 자세한 내용은 아래에 기술 하였다. 본 연구에서 사용된 고차이론은 지금까지 제안된 고차 이론 중에서 효율적이면서 정확히 해를 예측할 수 있는 고차 지그재그 이론(Cho, 2004; Oh, 2004)을 사용하였다. 사용된 이론의 면내 변위장은 두께방향으로 매끈하게 변하는 3차 변위장에 1차 지그재그 변위장을 증첩하여 얻는다. 이를 수식으로 표현하면, 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 u_\alpha(x_\beta, z, t) &= u_\alpha^0(x_\beta, t) + \psi_\alpha(x_\beta, t)x_3 + \xi_\alpha(x_\beta, t)x_3^2 \\
 &\quad + \varphi_\alpha(x_\beta, t)x_3^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta, t)(x_3 - x_3^{(k)})H(x_3 - x_3^{(k)}) \\
 u_3(x_\alpha, z, t) &= u_3^0(x_\alpha, t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, u_α^0 와 u_3 는 기준면에서의 면내 변위와 면내 수직변위를 나타낸다. ψ_α 는 x_3 축에 대한 회전각도를 나타낸다. $H(x_3 - x_3^{(k)})$ 는 단위 계단함수이다. 위에 가정된 변위장을 보다 단순화 하기 위해, 스마트 평판의 아랫면과 윗면에서 무전단 응력조건을 적용하여 다음과 같은 횡 전단 변형률을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3} = & -\frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^k(x_{\beta}, t)(h+2z) - 3\varphi_{\alpha}(x_{\beta}, t) \left(-\frac{h}{2}\right)^2 \\ & + 3\varphi_{\alpha}(x_{\beta}, t)x_3^2 + \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^k(x_{\beta}, t)H(x_3 - x_3^{(k)}) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, S_{α}^k 는 각 층에서의 기울기의 변화를 나타낸다. 이 값은 횡방향 전단 응력 연속 조건으로부터 계산 되어 식(3)과 같이 전단 강성 계수와 기준면에서 정의되는 변수만의 함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^k &= a_{\alpha\gamma}^{(k)} \phi_{\gamma} \\ \phi_{\alpha} &= 3\varphi_{\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

위의 식들을 이용하여, 최종적인 변위장을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(x_i) &= u_{\alpha}^{\circ}(x_{\alpha}) - u_{3,\alpha}^{\circ}(x_{\alpha})x_3 + \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3)\phi_{\gamma}(x_{\alpha}) \\ u_3(x_i) &= u_3^{\circ}(x_{\alpha}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3) &= T_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3) + C_{\alpha\gamma}^{(0)w} \\ T_{\alpha\gamma}^{(0)} &= -x_3 \left(\frac{1}{4} h^2 \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} a_{\alpha\gamma}^k \right) - x_3^2 \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{N-1} a_{\alpha\gamma}^k \\ &+ x_3^3 / 3\delta_{\alpha\gamma} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{\alpha\gamma}^k (x_3 - x_3^{(k)}) H(x_3 - x_3^{(k)}) \\ C_{\alpha\gamma}^{(0)w} &= -\frac{1}{h} \langle T_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3) \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

위의 식(4)과 식(5)로부터, 면내 와핑함수를 얻을 수 있다. 면내 와핑함수는 효율적인 횡전단 변형률 ϕ_{γ} 로 구성된다. 최종적인, 면내 와핑함수는 다음과 같다.

$$W_{\alpha}(x_i) = \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3)\phi_{\gamma}(x_{\beta}) \quad (k=1, 2, \dots, N_{\phi}) \quad (6)$$

위의 변위장에서 와핑함수를 제거하면, 식(4)의 면내 변위장은 고전평판 이론의 변위장이 된다. 결국, 이 함수가 고차 이론과 저차 이론의 매개적 역할을 하면서 해의 정확도를 보장한다.

기하학적 구속조건으로부터, 평균 변위를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{u}_{\alpha}^{\circ} = \frac{1}{h} \langle u_{\alpha}(x_i) \rangle, \quad \bar{u}_3^{\circ}(x_{\beta}) = \frac{1}{h} \langle u_3(x_i) \rangle \quad (7)$$

식(4)과 식(7)로부터, 다음과 같은 평균 면내 변위와 면내 수직 변위가 유도 된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha}^{\circ} &= u_{\alpha}^{\circ} + C_{\alpha\gamma}^{(0)} \phi_{\gamma} \\ C_{\alpha\gamma}^{(0)} &= \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)} \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{u}_3^{\circ} = u_3^{\circ} \quad (9)$$

식(8)은 평균 면내 변위와 고차 지그재그 면내 변위 사이의 관계식을 보여준다. 이 관계식은 본 연구의 후반부에서 최소 오차 자승법을 이용하여 다시 한번 유도된다. 식(8)과 식(9)로 주어지는 기하학적 관계식을 도출하는 것이 제안하고자 하는 저차 평판이론의 핵심 사항이다.

고차이론의 면내 변형률과 횡 방향 전단 변형률은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta}(x_i) &= \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}(x_\alpha) + x_3 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}(x_\alpha) + x_3^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}(x_\alpha) \\
&\quad + x_3^3 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)}(x_\alpha) + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)}(x_i), \\
\gamma_{3\alpha}(x_i) &= u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha} \\
&= \Phi_{\alpha\gamma,3}^{(0)}(x_3) \phi_\gamma(x_\beta) + W_{3,\alpha}
\end{aligned} \tag{10}$$

여기서,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0), \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{1}{2}(u_{3,\alpha\beta}^0 + u_{3,\beta\alpha}^0), \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)} = \frac{1}{2}(W_{\alpha,\beta} + W_{\beta,\alpha}) \tag{11}$$

면내 수직 와평 함수 W_3 는 효율적 횡 진단 변형률 ϕ_γ 에 비해 상당히 작은 값이므로 생략 할 수 있다. 결국, 횡 방향 진단 변형률은 아래와 같이 표현 될 수 있다.

우선, 고차 지그재그 이론과 평균화된 저차 진단 변형이론의 변위와 변형률에 최소 오차 차승법을 적용하면, 아래에 주어진 관계식이 유도된다.

$$\begin{aligned}
\min_{\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}} \langle \|\varepsilon_{\alpha\beta} - \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\|_2 \rangle &= 0 \rightarrow \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^0 = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + \frac{1}{h} \langle x_3^2 \rangle \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{1}{h} \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)} \rangle \\
\min_{\kappa_{\alpha\beta}} \langle \|\varepsilon_{\alpha\beta} - \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\|_2 \rangle &= 0 \rightarrow \kappa_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{12}{h^3} \langle x_3^4 \rangle \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)} + \frac{12}{h^3} \langle x_3 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)} \rangle \\
\min_{\bar{u}_\alpha} \langle \|\mathbf{u}_\alpha - \bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_2 \rangle &= 0 \rightarrow \bar{\mathbf{u}}_\alpha^0 = \mathbf{u}_\alpha^0 + \frac{1}{h} \langle W_\alpha \rangle \\
\min_{\theta_\alpha} \langle \|\mathbf{u}_\alpha - \bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_2 \rangle &= 0 \rightarrow \theta_\alpha = -u_{3,\alpha} + \frac{12}{h^3} \langle x_3 W_\alpha \rangle \\
\min_{\bar{u}_3} \langle \|\mathbf{u}_3 - \bar{\mathbf{u}}_3\|_2 \rangle &= 0 \rightarrow \bar{\mathbf{u}}_3^0 = \mathbf{u}_3^0 + \frac{1}{h} \langle W_3 \rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

위의 식(12)를 3차원 탄성에너지 식에 대입을 하여, 고차 이론과 저차이론의 에너지를 최소화 하여, 개선된 진단 강성계수가 아래와 같은 식으로 계산되어 진다.

$$\hat{G} = \hat{\Gamma}^T G \hat{\Gamma}, \quad \hat{e}_o^j = \Gamma^{-T} e_o^j \tag{13}$$

후 처리 과정에서 사용된, 변위장과 변형률은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_\alpha &= \bar{\mathbf{u}}_\alpha^0 - \bar{u}_{3,\alpha}^0 x_3 - C_{\alpha\gamma}^{(0)} \phi_\gamma + \Phi_{\alpha\gamma}(x_3) \bar{\Gamma}_{\gamma\mu} \bar{\gamma}_{3,\mu}, \\
\mathbf{u}_3 &= \bar{\mathbf{u}}_3^0
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta} &= \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{h} \langle x_3^2 \rangle \bar{\varepsilon}_{1,\alpha\beta} - \frac{1}{h} \langle \tilde{\Phi}_{\alpha\gamma}^e \hat{\Gamma} \bar{\gamma}_{\beta} \rangle \\
\varepsilon_{3\alpha} &= \tilde{\Phi}_{\alpha\beta}^s \hat{\Gamma} \bar{\gamma}
\end{aligned} \tag{15}$$

3. 유한요소 해석결과

개발된 이론의 성능을 검증하기 위해서, 본 연구에서 제안된 이론을 기반으로 한 유한요소 해석을 수행하여, 고차 지그재그 이론의 해와, ANSYS의 해를 직접 비교 하여, 이론의 타당성을 검증하였다. 두 가지 모델에 대해서 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 물성치는 참고문헌(Cho, 1992)에 주어진다.

첫번째 해석모델의 적층 배열은 [90/0/90/0/0/90/0/90]이다. 하중은 판 전 영역에 대해 균일 분포하중을 부과 하였다. 경계 조건은 단순 지지 경계 조건을 부과되었다. 최대 처짐에 대한 비교는 표 1

에 주어진다. 표의 결과는, 제안된 이론이 일반 상용 소프트웨어(ANSYS)의 결과보다 고차 지그재그이론에 매우 잘 일치 함 을 보여준다. 그림 1은 현재 이론의(EFSDT) 해석결과를 ANSYS를 이용하여, 후처리 하여 출력한 결과를 보여준다.

두번째 해석모델 적층 배열은 [0/90/45/-45/-45/45/90/0]이다. 하중은 판의 모서리 부분에 균일 분포 하중을 부과 하였다. 보강재가 내재된 두번째 해석모델은 그림 2에서 보여준다. 한 쪽 단 고정 경계 조건을 적용 하였다. 그림 3는 현재 이론의 유한 요소 해석 방법을 이용하여, 보강재가 내재된 복합재료의 두께 방향으로 변의 전단 응력을 도시한 결과이다. 두께 방향으로 응력을 자세하게 모사함을 알 수 있다.

표 1 복합재 평판의 최대 처짐 비교

$S=ah$	HOZT_FEM	EFSDT	ANSYS	FSDT
4	2.78	2.77	2.32	2.054
10	1.025	1.025	0.96	0.915

$$\bar{u}_3 = u_3 100 E_2 h^3 / (Pa^4)$$

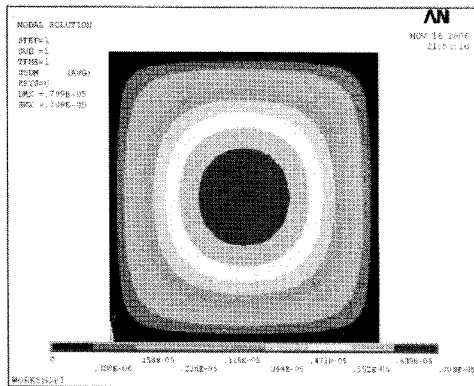


그림 1 복합재 판의 유한요소 면외 변위 해석 결과(EFSDT S=4)

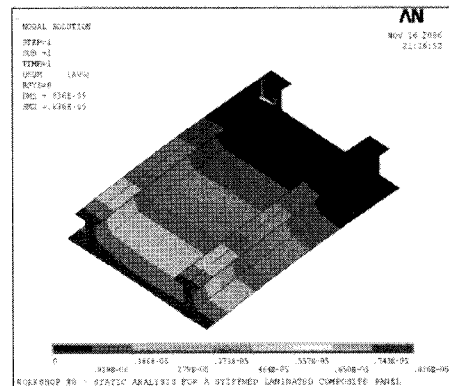


그림 2 보강재가 내재된 복합재 구조물의 유한요소 면외 변위 해석 결과(EFSDT)

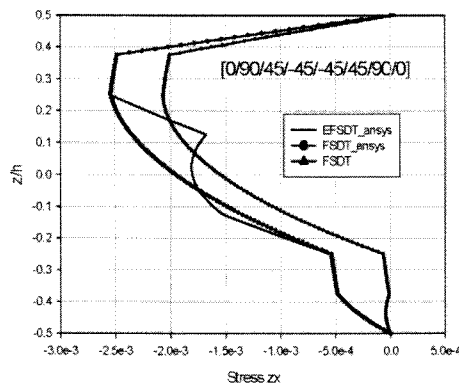


그림 3 보강재가 내재된 복합재 구조물의 두께방향 횡전단 응력 분포

4. 결론

본 연구에서는, 개선된 일차 전단 변형 이론에 기반을 둔 유한요소 해석기법을 개발하였다. 본 이론의 장점은 유한 요소 정식화를 수행할 때, 연속 조건을 만족하는 형상함수만을 필요로 하기 때문에, 유한 요소의 구현에 편리성이 있고 다양한 상용 유한요소 소프트웨어에서도 구현이 가능하다는 점이다. 이러한 사실은 여러 수치예제를 통해 타당성을 검증 하였다. 특히, 본 논문에서 제안한 이론에 기초한 유한 요소 해석 결과는 ANSYS(상용 소프트웨어) 보다 높은 정확도를 보장해 줌을 확인 할 수 있었다.

참고문헌

- Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, F. M., (1977), A higher-order theory of plate deformation part 2: laminated plates, *Transaction of the ASME J. App. Mech.*, 44, pp.669~676.
- Levinson, M., (1980), An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mech Research Communications*, 7, pp.343~350.
- Reddy, J. N., (1987), A generalization of two-dimensional theories of laminated plates, *Comm. in Num. Meth. In Eng.*, 3, pp.173~180.
- Cho, M., and Parmerter, R. R., (1992), An efficient higher-order plate theory for laminated composites, *Composite Structures*, 20, pp.113~123.
- Carrera, E., (2003), Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells, *Applied Mechanics Review*, 56, pp.287~308.
- Cho, Y. B., and Averill, R. C., (2000), First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels, *Composite Structures*, 50(1), pp.1~15.
- Whitney, J. M., (1972), Stress analysis of thick laminated composites and sandwich plates, *J. of Comp. Mat.*, 6, pp.426~440.
- Cho, M., and Oh, J., (2004), Higher order zig-zag theory for fully coupled thermo-electric - mechanical smart composite plates, *Int. J. of Solids & Structures*, 41(5-6), pp.1331~1356.
- Oh, J., and Cho, M., (2004), A finite element based on cubic zig-zag plate theory for the prediction of thermo-electric-mechanical behaviors, *Int. J. of Solids & Structures*, 41(5-6), pp.1357~1375.