

비정렬 격자를 이용한 구 주위의 큰에디 모사

이 경 세,¹ 백 제 현²

LARGE EDDY SIMULATION OF THE FLOW AROUND A SPHERE WITH UNSTRUCTURED MESH

K.S. Lee¹ and J.H. Baek²

A large eddy simulation method with unstructured mesh is presented. Two explicit filtering procedures are adopted for reducing the aliasing error of the nonlinear convective term and measuring the level of subgrid scale velocity fluctuation, respectively. The developed subgrid scale model is basically an eddy viscosity model which depends on both local velocity fluctuation level and local grid scale. As a validation problem, the flows around a sphere at several Reynolds numbers are simulated and some characteristic quantities are compared to experimental data and numerical results in the literature.

Key Words : 큰에디모사기법(Large Eddy Simulation), 비정렬격자(Unstructured mesh), 외재적 필터링(Explicit Filtering), 구 주위 유동(Flow around a Sphere)

1. 서 론

난류유동은 레이놀즈수가 증가하면서 큰 구조와 작은 구조의 크기 차이가 현격하게 벌어지기 때문에, Navier-Stokes 방정식이 유체 운동을 완전히 모사할 수 있다고 하더라도 이에 대한 정확한 수치해결을 얻는 것은 전산자원의 한계로 인해 불가능하다고 여겨진다. 이로 인해 전통적으로 RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes)에 기반한 난류모델이 많이 사용되어 왔으나 비등방성이 강하거나 큰 박리를 수반하는 난류유동 등에서 적용성의 한계를 지니고 있어 이러한 유동에 있어 상대적으로 강점을 지니는 큰에디모사기법(large eddy simulation, LES)이 기존의 RANS 난류모델의 대안으로 본격적으로 연구되고 있다.

그러나 비교적 최근까지도 단순한 형상(채널유동, 실린더 주위 유동)에서의 난류 유동장에 대한 연구가 주로 연구되었으며 점차 실질적인 공학적인 응용을 위해 복잡한 형상에서의 LES 기법에 대한 연구가 늘고 있는 추세이다[1,2].

본 연구에서는 복잡한 형상에서의 난류유동해석을 위해

최근 개발한 LES 기법[3]을 구 주위의 비압축성 난류 유동장에 적용하여 그 타당성을 검증한다.

2. 수치해석 기법

2.1 시공간 차분

본 연구에서는 공간차분을 위해 셀중심 유한차분법을 사용하였으며 셀의 버텍스에서 주위 셀 값들의 선형보간을 통해 변수를 재구성하고 이를 기반으로 완전한 이차 정확도를 보장하는 기법을 개발하여 공간차분에 사용하였다. 보다 상세한 설명은 참고문헌[4]를 참조한다.

유동장의 시간진진을 위해서는 fractional step 방법을 사용하였다. 공간차분과 같은 2차 시간 진진을 위해 점성항은 Crank-Nicolson 방법으로 차분하고 비선형 항은 Adams-Bashforth 방법을 사용한 준내재적 기법을 사용하였다.

2.2 LES 기법

2.2.1 LES 방정식의 유도

LES를 위한 방정식은 일반적으로 Navier-Stokes 방정식에 격자로 해상할 수 있는 크기보다 작은 스케일의 유동성분을 제거하기 위하여 적절한 필터링을 가하여 얻게 된다. 이때 제거되는 작은 스케일의 유동은 그 영향만이 방정식에 모델링

1 학생회원, 포스텍 기계공학과 대학원

2 정회원, 포스텍 기계공학과

* Corresponding author E-mail: jhbaek@postech.ac.kr

되어 반영된다. 현실적으로 수치적으로 계산할 수 있는 한계 크기는 주어진 격자의 크기가 제한 조건이 되므로 큰 스케일과 작은 스케일을 구분자는 흔히 국소적인 격자크기 정도로 설정된다. 무차원화된 Navier-Stokes 방정식에 격자 크기보다 작은 유동성분을 제거하도록 grid filter (2Δ cutoff)를 적용했을 때 필터링과 미분연산자 사이에 교환이 본 연구에서와 같이 이차 정확도 내에서의 오차를 가지면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1)$$

위 식은 사용된 필터와 차분법등의 정확도 내에서 정확한 것이지만 비선형항의 형태로 인해 변수가 늘게 되어 이대로는 방정식이 닫히지 않게 된다. 본 연구에서는 외재적 필터를 사용하여 비선형 항을 모델링하였다. 먼저 비선형 항을 4Δ cutoff 필터로 스케일 분리한 유동성분으로 표현하면 다음과 같이 4Δ 성분간의 상호작용과 4Δ 성분과 그 이하 크기의 상호작용, 그리고 4Δ 이하 성분들 간의 세 부류의 항으로 구분할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} + \overline{\hat{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \hat{u}_j} + \overline{u'_i u'_j}) \\ = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (2)$$

먼저 4Δ 성분간의 상호작용의 결과는 모두 격자 상에서 표현될 수 있는 2Δ 성분 이상의 크기이므로 grid filter에 의해 제거되지 않게 된다. 따라서 필터효과를 무시할 수 있으며 $\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} \approx \overline{\hat{u}_i} \overline{\hat{u}_j}$ 으로 가정할 수 있다. 이 때, \hat{u}_i 은 2Δ 성분까지 포함되어 있는 유동장인 $\overline{u_i}$ 에 4Δ 필터를 적용하여 얻을 수 있다. 이제 남은 세 항은 두가지 종류로 구분할 수 있다. 즉 큰 스케일과 작은 스케일의 상호작용과 작은 스케일들 간의 상호작용이다. 먼저 큰 스케일과 작은 스케일의 상호작용은 그 물리적인 의미를 작은 스케일의 유동성분의 빠른 혼합으로 인한 큰 유동 성분의 구배완화 효과에서 찾을 수 있으며, 이를 표현하기 위해 본 연구에서는 잘 알려진 혼합길이 모형 가정을 써서 난류점성으로 모델링한다.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\hat{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \hat{u}_j}) \approx \nu_i^{gs} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \nu_i^{gs} = C_1 \alpha |u'|_{gs} \end{aligned} \quad (3)$$

작은 스케일간의 상호작용은 위의 혼합길이 모형에서의 속도스케일을 격자 크기에 비례하다고 가정하여 작은 스케일간의 난류점성이 격자크기에만 의존하도록 모델링하였다.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) \approx \nu_i^{ss} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j}, \\ \nu_i^{ss} = C_1 \left(\frac{1}{2} \alpha \right) |u'|_{gs} = C_2 \alpha^2 \end{aligned} \quad (4)$$

작은 스케일간의 상호작용 효과는 국소적 격자크기에 의존하는 이차 수치점성을 삽입하는 효과를 지니며 본 연구에서 단순히 2차 중심차분을 사용하고 후류 및 구에서 근거리 영역을 제외한 지역에서 비물리적인 해의 진동을 억제하고 안정된 해석을 할 수 있게 한다. 즉 전자는 유동장과 격자의 국소적 특성에 의존하고 후자는 단순히 국소적 격자 특성에만 의존하게 된다. 비선형항 및 각 스케일간의 상호작용에 대한 모델링을 가하여 최종 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \left[\frac{1}{\text{Re}} + \nu_i^{gs} + \nu_i^{ss} \right] \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5)$$

난류점성항의 계수는 본 연구에서 C_1 은 1, C_2 는 0.25를 사용하였다.

2.2.2 필터

본 연구에서는 비물리적인 운동에너지 증대를 완화하기 위하여 매 시간간격 마다 외재적으로 필터링된 속도장을 사용하여 대류항을 계산하며(식 (3)) 이 때 필터링은 다음과 같이 미분형 필터인 diffusion type의 필터를 사용한다.

$$\overline{\phi} = \phi + \alpha^2 \nabla^2 \phi \quad (6)$$

여기에서 α 는 필터 크기를 결정하는 상수로서 길이 dimension이며 필터링 형태가 갖는 온도장의 외재적 시간전진 기법과의 유사성에서 유추 가능하듯이 안정적인 필터링을 위한 한계값을 갖는다. 본 연구에서 사용한 α 는 ∇^2 의 이산화 과정에서 도출되는 계수들의 절대값의 총합으로부터 정해지며 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sum |c_i|} \quad (7)$$

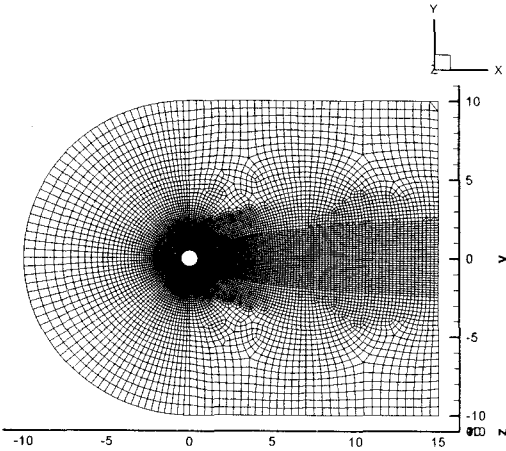


Fig. 1 Unstructured mesh used in the simulations

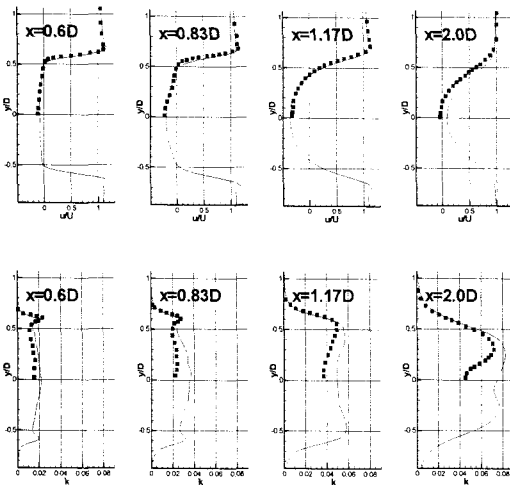


Fig. 2 Comparison of mean streamwise velocity and turbulent kinetic energy profiles at Re=10000. Symbols from ref.[5](LES results with a dynamic model on a dedicated special structured grid)

이와 같이 정의되면 일차원상에서는 2Δ 의 작은 스케일을 완전히 제거할 수 있는 필터 사이즈가 되나 삼차원상에서는 대략 일차원상에 비해 반 정도의 필터링 효과를 가져 큰 구조에 과도한 영향을 주지 않는다. 또한 필터링이 선형적인 유동장을 보존하기 때문에 commutation 에러 및 필터링을 가하여 생기는 에러가 이산화 에러인 이차를 유지한다.

$|u'|$ 는 대류항에 적용한 필터를 사용하면 격자크기에 비해 과소한 필터링 효과를 가지므로 버텍스에 재구성된 유동장을 셀 중심에서 최소사승법으로 선형 재구성한 값과 본래의 유

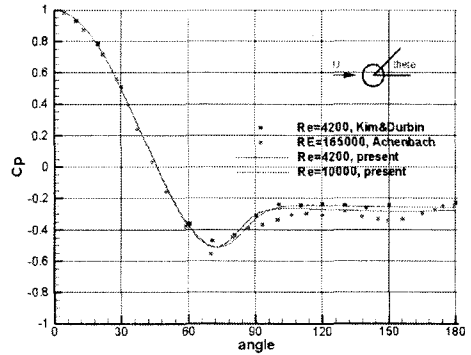


Fig. 3 Pressure coefficient distribution at Re=4200 and 10000

동장과의 차이로부터 구한다. 이 필터는 이전에 설명한 diffusion 필터와 같이 필터링으로부터 야기 되는 에러가 이차로 유지된다. 그러나 상대적으로 필터링의 크기가 크고 격자의 스트레칭에 따라서 비등방적인 필터링이 될 수 있기 때문에 두 종류의 필터를 각기 다른 용도로 사용한다.

3. 구 주위 유동장 해석

3.1 해석 대상 및 계산 조건

구 주위의 난류 유동 해석을 위한 격자는 Fig. 1과 같이 폭 10, 길이 15의 원통형 후류영역과 반구형 입구영역으로 구성되어 있으며 약 57만개의 육면체 셀로만 이루어져 있다. 해석은 레이놀즈수 4200과 10000에 대하여 수행하였다. 모든 계산은 공히 같은 격자와 같은 무차원 시간간격 0.005를 사용하였으며 최대 CFL수는 0.5를 넘지 않았다. 평균유동 특성치 및 RMS 값을 얻기 위해 무차원 시간 100~200 정도의 초기 발달 구간을 버리고 무차원 시간 400 정도 동안의 해석을 평균하였다.

3.2 계산결과

Table 1에는 Re=10000에서의 유동 특성치들을 참고문헌[5]와 비교하였으며 Fig.2에 후류영역의 몇 지점에서의 유동방향의 속도 및 난류에너지 분포를 비교하였다. 참고문헌[5]는 구

Table 1 Comparison of characteristic quantities at Re=10000

	present	LES ^[5]	DES ^[5]
separation length	1.90	1.98	2.05
max $u'_{x,rms}$	0.27	0.25	0.24
recirculation center	1.23/0.42	1.22/0.41	1.21/0.39
max negative u_x	-0.38	-0.4	-0.35

주위 유동을 위한 특수한 정렬격자에서 dynamic 모델을 사용한 반면 본 연구에서는 비정렬 격자를 사용하였고 외재적 필터 및 새로운 LES 모델을 사용하였음에도 서로 잘 일치하는 결과를 얻었다. Fig. 3에 레이놀즈 수 4200과 10000에서의 압력계수를 기존 실험[6,7]과 비교하였다.

4. 결 론

최근 개발된 비정렬 격자를 이용한 새로운 형태의 LES 기법을 구 주위의 난류 유동장 해석에 적용하여 그 타당성을 검증하였으며 기존의 결과와 잘 일치하는 결과를 얻었다. 향후 보다 상세한 검토 및 다양한 유동 문제에서의 검증과정 및 모델 수정에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] Mahesh K., Constantinescu G., and Poin, P., 2004, "A numerical method for large-eddy simulation in complex geometries," *Journal of Computational Physics*, Vol.197.
- [2] Yun, G., Kim, D., and Choi, H., 2006, "Vortical structures behind a sphere at subcritical Reynolds numbers," *Physics of Fluids*, Vol.18.
- [3] 이경세, 2006, "비정렬 격자를 이용한 LES기법 개발," *한국전산유체공학회 추계 학술대회 논문집*, pp.106-109.
- [4] 이경세, 2004, "2차 정확도를 가지는 비정상 비압축성 유동장 해석을 위한 비정렬 유한 체적법의 개발," *한국전산유체공학회 춘계 학술대회 논문집*, pp.71-76.
- [5] Constantinescu, G. and Squires, K., 2003, "LES and DES Investigation of Turbulent Flow over a Sphere at $Re=10000$," *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol.70, pp.267-298.
- [6] Kim, H. and Durbin, P., 1988, "Observations of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation," *Physics of Fluids*, Vol.31, pp.3260-3265.
- [7] Achenbach, E., 1972, "Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.54, pp.565-575.