

# 반무한 공간에서의 체적 적분방정식법을 이용한 탄성해석 lastic anal sis in a half-plane using volume integral equation method

\*구덕영<sup>1</sup>, #이정기<sup>1</sup>

\*D. Y. Ku, #J. K. Lee(inq3jkl@wow.hongik.ac.kr)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>홍익대학교 기계정보공학과

Key words : Volume Integral Equation Method, Half-Plane, Multiple Orthotropic Inclusions

## 1. 서론

본 논문에서는 이방성 함유체의 배열이 반무한 공간에서의 응력에 미치는 영향에 대하여 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 적용하여, 비교적 간단한 형태의 이방성을 나타내는 직교 이방성 함유체가 등방성 반무한 공간에 포함된 반무한 고체가 정적 무한하중을 받을 때 탄성정역학 응력해석을 수행한다.

즉, 체적 적분방정식법이, 서로 상호작용을 하는 다수의 이방성 함유체<sup>(1,2,3)</sup>을 포함하는 등방성 반무한 고체가 정적 무한하중을 받을 때 반무한 고체 내부에 발생하는 변형, 변형률 및 응력분포 해석에 효과적인 수치해석 방법임을 입증하고, 아울러, 이방성 함유체의 배열이 반무한 고체의 응력에 미치는 영향을 효과적으로 연구한다.

## 2. 체적 적분방정식법

Fig. 1에 있는 탄성정역학 문제해석의 경우에, 직교 이방성 함유체를 포함하는 반무한 고체의 임의의 위치에서의 변위벡터  $u_m(\mathbf{x})$ 가 다음의 방정식을 만족함을 알 수 있다.<sup>(4,5)</sup>

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x}) u_{k,l}(\xi) d\xi \quad (1)$$

식 (1)에서,  $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며, 함유체와 반무한 지지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다.  $g_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x})$ 은 등방성 반무한 지지에서의 탄성정역학 Green 함수<sup>(6)</sup>이다.

등방성 무한 기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 이정기와 Mal<sup>(4,5)</sup>에 잘 나타나 있다.

식 (1)에서  $g_{i,j}^m$ 은 등방성 반무한 지지에서의 탄성정역학 Green 함수이므로, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

## 3. 등방성 반무한 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 포함되어 있는 반무한 고체의 탄성해석

Fig. 1에 있는 다수의 직교 이방성 함유체가 등방성 반무한 기지에 포함되어 있는 반무한 고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 이때 자유면은  $x = 0$ 인 곳에 위치한다고 가정한다. 이 경우는 체적 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다.<sup>(7,8)</sup> 왜냐하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있고, 또한 유한요소법과 달리, 함유체 내부만을 요소분할하면 되기 때문이다.

### 3.1. 다수의 직교 이방성 함유체의 배열이 정사각형 square 형태일 때

다수의 직교 이방성 함유체가 정사각형 형태로 등방성 반무한 기지에 포함되어 있는 반무한 고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 우선, 단일의

직교 이방성 함유체가 등방성 반무한 기지에 포함되어 있는 경우에 단일의 함유체에서의 응력분포를 조사하였다. 다음에, 다수의 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 함유체의 체적비(volume fraction)는 0.35로 가정하고(이때, 인접한 함유체들 사이의 거리는 각각 함유체의 반지름의 2.996배가 됨.), 함유체의 개수를 a) 9개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 자유면에서 가장 가까운 첫 번째 열의 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포를 조사하였다. 등방성 반무한 기지와 직교 이방성 함유체의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 직교 이방성 함유체의  $\nu_1$ 이 등방성 반무한 기지의  $\nu_1$ 보다 큰 경우를 고려해 보았다. Fig. 2는 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델<sup>(9)</sup>의 예를 나타내며, 함유체 내부를 각각 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다. Fig. 3은 서로 다른 개수의 함유체가 포함되어 있을 때, 자유면과 정사각형 배열의 직교 이방성 함유체 사이의 거리가 서로 다른 경우에[(a)  $d = 1.5a$ , (b)  $d = 2.0a$ , 그리고 (c)  $d = 2.5a$ ], 자유면에서 가장 가까운 첫 번째 열의 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 반무한 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분( $\sigma_y/\sigma_0$ )을 나타낸다( $\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$ ). 여기서,  $a$ 는 각각 함유체의 반지름을 나타내고,  $d$ 는 자유면과 자유면으로부터 가장 가까운 열에 위치하는 함유체들의 중심 사이의 거리를 나타낸다.

이때, 단일 직교 이방성 함유체 내부에서의 인장응력 성분이 무한 공간에서는 일정한 값을 갖지만, 반무한 공간에서는 일정하지 않음을 알 수 있다.<sup>(2,3,10,11,12,13)</sup> 특히, 단일 함유체가 자유면에 가깝게 놓일수록, 함유체 내부에서의 인장응력 성분이 위치에 따라 달라지는 것을 알 수 있다. 또한 직교 이방성 함유체의 개수가 증가하면, 자유면에서 가장 가까운 열의 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용에 의하여, 중앙에 위치한 함유체 내부에서의 인장응력 성분이 단일의 함유체 내부에서의 인장응력 성분과 크게 달라지는 것을 알 수 있다. 특히, 직교 이방성 함유체의  $\nu_1$ 이  $\nu_2$ 와 비교하여 상당히 크므로, 함유체 내부에서의 인장응력 성분이  $\theta = 180^\circ$ 에서 최대가 되는 반면에,  $\theta = 90^\circ$  또는  $270^\circ$ 에서 최소가 되는 것을 알 수 있다. 한편, 직교 이방성 함유체의 개수가 증가하여도, 자유면에서 가장 가까운 열의 중앙에 위치한 함유체 내부에서의 인장응력 성분( $\sigma_y/\sigma_0$ )이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 0.35일 때, 자유면에서 가장 가까운 열의 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이, 함유체의 개수가 증가하여도, 그렇게 크게 변화하지 않기 때문으로 판단된다.

## 4. 결론

본 논문에서는 이방성 함유체의 배열이 반무한 고체의 응력에 미치는 영향에 대하여 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 적용하여, 등방성 반무한 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 정적 무한하중을 받을 때 반무한 고체에 발생하는 응력분포에 관한 해석을 수행하였다.

첫째로, 등방성 반무한 기지에 다수의 직교 이방성 함유체가 정사각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에 대하여 고찰해 보았다. 직교 이방성 함유체의 배열이 정사각형 형태인 경우에, 함유체의 체적비가 0.35일 때, 함유체들 사이의 거리가 비교적 멀기 때문에, 함유체의 개수가 증가하여도 자유면에서 가장 가까

운 열의 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 반무한 기지의 경계면에서의 인장응력 분포가 크게 변하지 않는 것을 알 수 있었다.

후기

이 논문은 2006학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었습니다. 지원에 감사드립니다.

Table 1 Material properties of the isotropic semi-infinite matrix and the orthotropic inclusion for the elastostatic problems

Unit:	Pa	Isotropic Matrix	Orthotropic Inclusion
$\lambda$		67.34	—
$\mu$		37.88	—
$c_{11}$		143.10	279.08
$c_{12}$		67.34	7.80
$c_{22}$		143.10	30.56
$c_{66}$		37.88	11.80

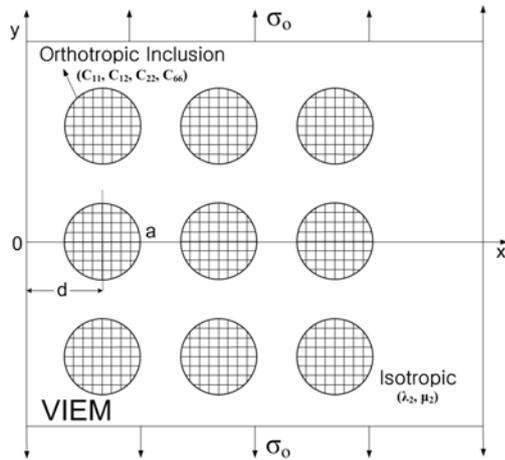


Fig. 1 Multiple orthotropic cylindrical inclusions in isotropic semi-infinite matrix under uniform remote tensile loading

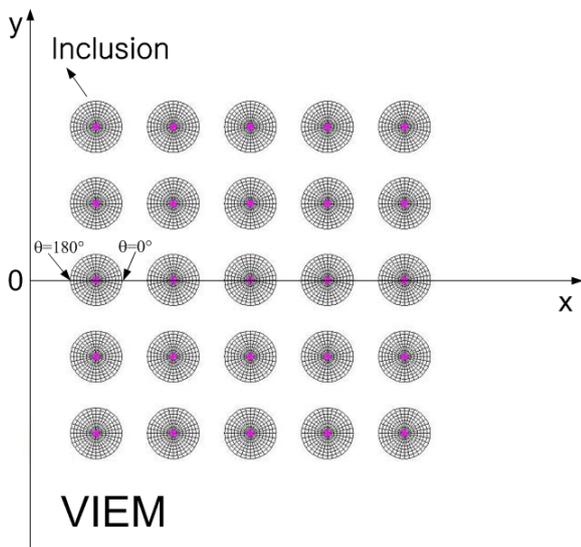
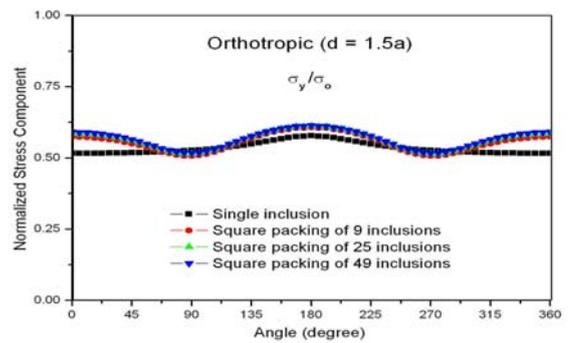


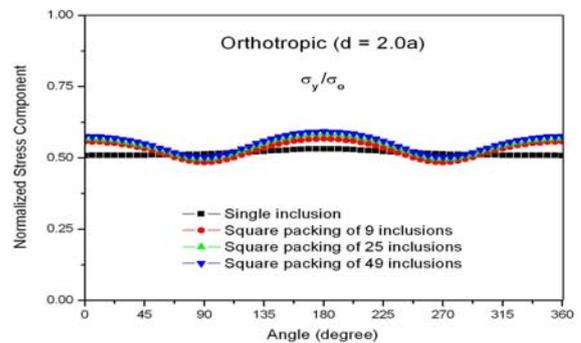
Fig. 2 A typical discretized model in the volume integral equation method

참고문헌

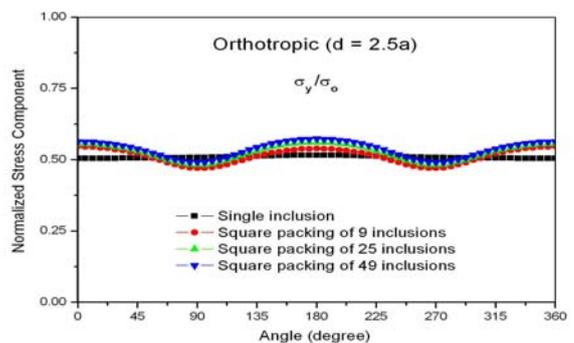
[4] Lee, J. K. and Mal, A. K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," Applied Mathematics and Computation, Vol. 67, pp. 135 ~ 159.  
 [5] Lee, J. K. and Mal, A. K., 1997 (Mar.), "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, pp. 23 ~ 31.  
 [6] Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A., 1981, "Boundary element solution for half-plane problems," Int. J. Solids. Struct., Vol. 17, pp. 1149~1158.



(a)



(b)



(c)

Fig. 3 Normalized tensile stress component ( $\sigma_y/\sigma_0$ ) at the interface between the central orthotropic inclusion in the first column of square packing and the isotropic semi-infinite matrix under uniform remote tensile loading