

# 압전재료를 이용한 진동하는 보의 전기력 예측 Estimation of Power Generation from Vibrational Beam with Piezoelectric Material

\*윤지현<sup>1</sup>, 심현진<sup>2</sup>, 이정윤<sup>1</sup>, #오재응<sup>2</sup>

\*J.H. Yoon<sup>1</sup>, H.J. Sim<sup>2</sup>, J.Y. Lee<sup>1</sup>, #J. E. Oh(jeoh@hanyang.ac.kr)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 한양대학교 기계공학과, <sup>2</sup> 한양대학교 기계공학과, <sup>1</sup> 경기대학교 기계시스템디자인공학부, <sup>2</sup> 한양대학교 기계공학과

Key words : Piezoelectric Material, Vibration Energy , Electric Energy

## 1. 서론

진동하는 시스템에 있어 발생하게 되는 진동에너지는 압전재료를 이용하여 전기에너지로 변환이 가능하다. 기존의 시스템은 진동에너지로부터 변환된 전기에너지를 열에너지로 소산시킴으로써 감쇠 효과를 발휘하는데, 이에 따라 가용한 전기에너지가 허비되게 된다. 이를 개선하기 위해 변환된 전기에너지를 축전시키는 방안에 대한 연구가 국내외에서는 이루어지고 있으나, 국내에서는 미진한 실정이다. 본 연구에서는 자가발전 시스템을 개발을 목표로 압전재료로부터 출력되는 전압과 전력을 예측하였다. 또한, 각각의 경계조건을 갖는 보의 진동으로부터 발생하는 에너지를 예측해보고, 그 중 가장 큰 에너지가 발생하는 경계조건을 도출하고자 한다.

## 2. 피에조의 모델링

피에조의 전기적 변위  $D_3(x, y, t)$  는 다음과 같이 정의된다.

$$D_3(x, y, t) = d_{31}\sigma_1(x, y, t) \quad (1)$$

where  $d_{31}$  : the strain constant for the PZT

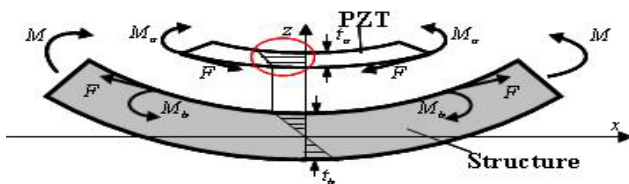
$$D_3(x, t) = d_{31}\sigma_a(x, t) = \frac{6d_{31}E_a M}{b(3E_a t_a t_b - E_b t_b^2)} \quad (2)$$

피에조의 출력전압은,

$$V = \frac{q}{C_p} = \frac{\int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA}{C_p} = \frac{\int_x^{x+L_p} D_3(x, t) b dx}{C_p} = \frac{6g_{31}t_a E_a \int_x^{x+L_p} M dx}{L_p b (3E_a t_a t_b - E_b t_b^2)} \quad (3)$$

where  $C_p = \frac{d_{31}L_p b}{g_{31}t_a}$   $L_p$  : the PZT length  
 $C_p$  : the capacitance of the PZT  
 $g_{31}$  : the PZT voltage constant

### 2.1 Enhanced Pin-Force method 를 이용한 피에조 모델링



**Fig. 1 Enhanced pin-force model of PZT and structure (Wang K.,2001)**

구조물에 대한 모멘트 평형을 이용하여,

$$M - F \frac{t_b}{2} - M_b = (E_b I_b) \kappa \quad (4)$$

$$M_b = M_a = (E_a I_a) \kappa \quad (5)$$

피에조에 가해지는 힘은,

$$F = -\frac{E_a b t_a t_b}{2} \kappa \quad (6)$$

곡률과 변형률에 대해 정리하면,

$$\kappa = \frac{F}{-6E_a b t_a t_b^2 + E_a b t_a^3 + E_b b t_b^3} \quad (7)$$

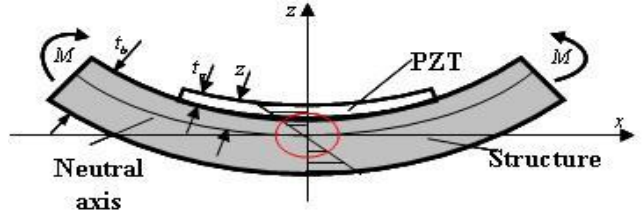
$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{F}{E_a b t_a} = \frac{6t_b M}{3E_a b t_a t_b^2 - E_a b t_a^3 - E_b b t_b^3} \quad (8)$$

따라서, enhanced pin-force method 를 이용할 경우의 응력과 발생하는 전압은 다음과 같이 나타난다.

$$\sigma_a = \frac{6E_a t_b M}{3E_a b t_a t_b^2 - E_a b t_a^3 - E_b b t_b^3} \quad (9)$$

$$V = \frac{q}{C_p} = \frac{\int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA}{C_p} = \frac{\int_x^{x+L_p} D_3(x, t) b dx}{C_p} = \frac{6g_{31}t_a t_b E_a \int_x^{x+L_p} M dx}{L_p b (3E_a t_a t_b^2 - E_b t_b^3 - E_a t_a^3)} \quad (10)$$

### 2.2 Euler-Bernoulli method 를 이용한 모델링



**Fig.2 Euler-Bernoulli model of PZT and structure (Wang K.,2001)**

Modulus weighted algorithm 을 사용하여 neutral axis 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$z_s = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \frac{E_i}{E_r} A_i}{\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{E_r} A_i} = \frac{\frac{t_a}{2} t_a \frac{E_a}{E_b} b + \left(t_a + \frac{t_b}{2}\right) t_a \times b}{t_a \frac{E_a}{E_b} b + t_a \times b} \quad (11)$$

계산을 보다 용이하게 하기 위해 피에조 변형률의 평균값을 이용할 경우 변형률은,

$$\varepsilon_a = -\frac{M}{(E_a I_a + E_b I_b)} \left(z_s - \frac{t_a}{2}\right) \quad (12)$$

where,  $I_a = \int_{z_s-t_a}^{z_s} b z^2 dz = \frac{1}{3} b [z_s^3 - (z_s - t_a)^3]$

$$I_b = \int_{z_s-t_a-t_b}^{z_s-t_a} b z^2 dz = \frac{1}{3} b [(t_a + t_b - z_s)^3 + (z_s - t_a)^3]$$

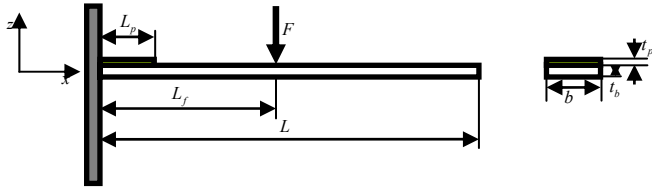
따라서, Euler-Bernoulli method 이용할 경우의 응력과 발생하는 전압은 다음과 같다.

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{6ME_b t_b (t_a + t_b)}{b[E_a^2 t_a^4 + E_b^2 t_b^4 + 2E_a t_a E_b t_b (2t_a^2 + 3t_a t_b + t_b^2)]} \quad (13)$$

$$V = \frac{6g_{31}t_a t_b E_a E_b (t_a + t_b) \int_x^{x+L} M dx}{L_p b (E_a^2 t_a^4 + E_b^2 t_b^4 + 2E_a t_a E_b t_b (2t_a^2 + 3t_a t_b + t_b^2))} \quad (14)$$

### 2.3 경계조건별 진동하는 보의 응답

본 연구에서는 네 가지 경계조건(Clamped-free, Clamped-pinned, Clamped-sliding, Clamped-clamped)에 대해 시뮬레이션을 수행하였으며, 모드형상에 관한 식은 Engineering Vibration 2<sup>nd</sup> Edition(Daniel J. Inman)을 참조하였다.

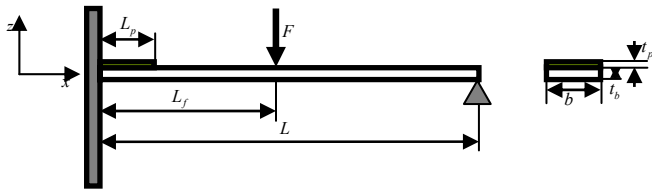


**Fig.3 Setup of clamped-free beam model**

Clamped-free 경계조건에서의 모드형상은 식(15)으로 나타낼 수 있다.

$$X_i(x) = \cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \frac{\sinh(\beta_i L_b) - \sin(\beta_i L_b)}{\cosh(\beta_i L_b) + \cos(\beta_i L_b)} (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x) \quad (15)$$

where,  $\beta_i^4 = \frac{\omega_{ni}^2}{c^2} \cosh(\beta_i L_b) \cos(\beta_i L_b) = -1$

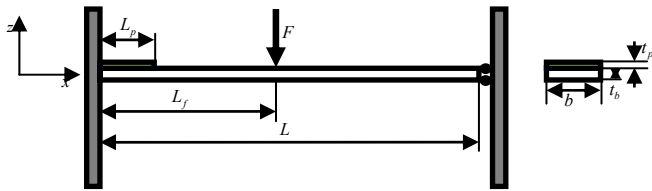


**Fig.4 Setup of clamped-pinned beam model**

Clamped-pinned 경계조건에서의 모드형상은 식(16)으로 표현 할 수 있다.

$$X_i(x) = \cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \frac{\cosh(\beta_i L_b) - \cos(\beta_i L_b)}{\sinh(\beta_i L_b) - \sin(\beta_i L_b)} (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x) \quad (16)$$

where,  $\beta_i^4 = \frac{\omega_{ni}^2}{c^2} \tanh(\beta_i L_b) = \tan(\beta_i L_b)$

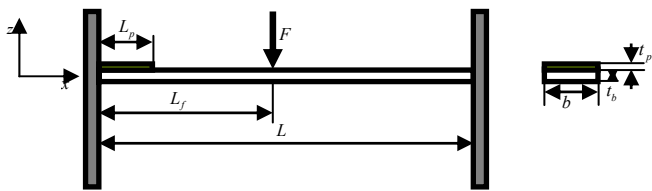


**Fig.5 Setup of clamped-sliding beam model**

Clamped-sliding 경계조건에서의 모드형상은 식(17)으로 표현 할 수 있다.

$$X_i(x) = \cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \frac{\sinh(\beta_i L_b) - \sin(\beta_i L_b)}{\cosh(\beta_i L_b) + \cos(\beta_i L_b)} (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x) \quad (17)$$

where,  $\beta_i^4 = \frac{\omega_{ni}^2}{c^2} \tanh(\beta_i L_b) + \tan(\beta_i L_b) = 0$



**Fig.6 Setup of clamped-clamped beam model**

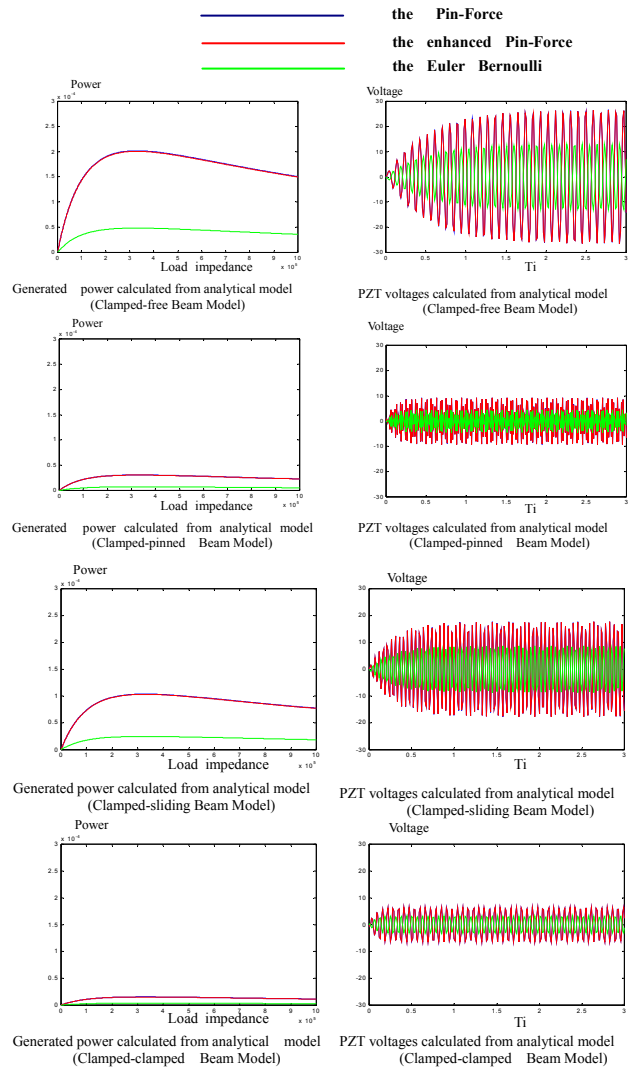
Clamped-clamped 경계조건에서의 모드형상은 식(18)으로 표현 할 수 있다.

$$X_i(x) = \cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \frac{\cosh(\beta_i L_b) - \cos(\beta_i L_b)}{\sinh(\beta_i L_b) - \sin(\beta_i L_b)} (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x) \quad (18)$$

where,  $\beta_i^4 = \frac{\omega_{ni}^2}{c^2} \cosh(\beta_i L_b) \cos(\beta_i L_b) = 1$

### 3. 시뮬레이션 및 결과

MATLAB 을 이용하여 경계조건과 세가지 method (Pin-force, Enhanced pin-force, Euler-Bernoulli)에 따른 전력과 전압을 예측하였다.



**Fig.7 Generated power & PZT voltages calculated from analytical models**

위의 결과를 통해 전력이 가장 크게 발생하는 경계조건은 clamped-free model 이며, 세 가지 방법 중 Euler-Bernoulli method 가 상대적으로 피에조 시스템을 모델링하는데 적합한 것을 알 수 있다.

### 4. 결론

본 연구에서는 경계조건을 갖는 보의 진동으로부터 발생하는 에너지를 세가지 method 로 예측하여, 피에조 시스템 모델링에 적합한 해석적 접근 방법과 전력이 가장 크게 발생하는 경계조건을 찾아냈다.

### 참고문헌

1. J.E. Oh, J.S. Hong, "Performance Improvement of Active Noise Control by Hybrid Control Method", JSME International Journal, Series C, Vol.44 pp.96-102, 2001
2. Hagood N.W., A von Flotow, "Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks", Journal of Sound and Vibration, Vol.146 pp.243-268, 1991
3. Edberg D.L., A.S. Bicos, J.S. Fecher, "On Piezoelectric Energy Conversion for Electric Passive Damping Enhancement", Proceeding of Damping '91, San Diego, Paper GBA-1
4. Holkamp J.J., Starchville, "A self-tuning piezoelectric vibration absorber", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol.5 pp. 559-566, 1994.