

경계요소법에 의한 직교이방성 다결정 재료의 응력해석에 관한 연구 Analysis of stress in Multi-grain Orthotropic Material

*김동은¹, 이상훈¹, 정일중¹, 한국남¹, 황영진², 이석순³

*D. E. Kim¹, S. H. Lee², I. J. Jeong¹, G. N. Han¹, Y. J. Hwang², S. S. Lee(leess@gnu.ac.kr)³

¹경상대학교 대학원 기계공학과, ²경남 테크노 파크, ³경상대학교 기계항공공학부

Key words : Multi-Grain boundary, Boundary element method, Orthotropic material

1. 서론

주로 실리콘 기판을 사용하여 제작되는 MEMS의 부품의 재료는 이방성 재료로 구성되는 경우가 많다. 이에 대한 문제 해석을 위해서 많은 연구가 활발하게 진행되고 있다. 하지만 이러한 연구들은 주로 유한 요소법에 국한되고 있는 실정이다. 이 연구에서는 임의의 형상을 가지는 다결정 직교 이방성 재료의 해석을 수행할 수 있는 경계요소 해석기를 개발하고 결과를 유한요소법과 비교하고자 한다.

2. 직교 이방성 재료의 응력-변형률 관계

2-D homogeneous 에서의 응력-변형률 관계에 의해서 직교 이방성 재료의 응력-변형률 관계는 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 16 \\ 12 & 22 & 26 \\ 16 & 26 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 σ_i 와 ϵ_i ($i,j=1,2$) 는 응력과 변형률을 각각 의미한다. 그리고 계수 i 는 재료의 탄성 컴플라이언스를 나타낸다. 이러한 컴플라이언스는 탄성계수와 프와송비 항으로 바꾸어 쓸 수 있고, 식 (2)에 그 항을 표기 하였다.

$$\begin{aligned} 11 &= \frac{1}{E_1}, & 12 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & 16 &= \frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ 26 &= \frac{\eta_{12,2}}{E_2} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}}, & 22 &= \frac{1}{E_2}, & 66 &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2)$$

E_k 는 x_k 방향의 탄성계수를 나타내고, G_{12} 는 x_1-x_2 평면에서의 전단계수이다. 그리고 ν_{ij} 는 프와송비이다. 직교 이방성의 경우는 $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$ 이 일반적이다. 일정한 각도를 지닌 직교 이방성 재료의 방향성을 고려한 응력-변형률 관계는 식 (3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 16 \\ 12 & 22 & 26 \\ 16 & 26 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3)$$

식 (3)의 강성 행렬 요소들은 식 (4)의 관련 식들로 표현된다.

$$\begin{aligned} 11 &= \nu_1 + \nu_2 \cos 2\gamma + \nu_3 \cos 4\gamma \\ 12 &= \nu_4 - \nu_3 \cos 4\gamma \\ 22 &= \nu_1 - \nu_2 \cos 2\gamma + \nu_3 \cos 4\gamma \\ 16 &= \nu_2 \sin 2\gamma + 2\nu_3 \sin 4\gamma \\ 26 &= \nu_2 \sin 2\gamma - 2\nu_3 \sin 4\gamma \\ 66 &= 2(\nu_1 - \nu_4) - 4\nu_3 \cos 4\gamma \end{aligned} \quad (4)$$

또한 위의 식 (4)에서 불변치 ($\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$) 는 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{8}(3\epsilon_{11} + 3\epsilon_{22} + 2\epsilon_{12} + \epsilon_{66}) \\ \nu_2 &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \\ \nu_3 &= \frac{1}{8}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} - 2\epsilon_{12} - \epsilon_{66}) \\ \nu_4 &= \frac{1}{8}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + 6\epsilon_{12} - \epsilon_{66}) \end{aligned} \quad (5)$$

3. 직교 이방성 재료의 경계 요소법

직교 이방성 재료의 경계 요소법은 다음 식 (6)으로 표현할 수 있다.

$$T_k(x, y) = \int_{\Gamma} T_k(x, y) ds(x, y) \quad (6)$$

$k=1, 2$

(x_1^0, x_2^0) 와 (x_1, x_2) 는 직교 이방성 재료의 기본해이다. 그리고 상수 μ_i 는 P 에서의 국부적인 경계에 의해서 결정되는 수이다. 변위와 traction 의 기초해는 각기 다음 식 (7)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \mu_k &= 2\text{Re}[\mu_{k1} \ln(x_1 - x_1^0) + \mu_{k2} \ln(x_2 - x_2^0)] \\ T_1 &= 2\text{Re}[\mu_1^2 \mu_{11} / \mu_1 + \mu_2^2 \mu_{22} / \mu_2] - 2\text{Re}[\mu_1 \mu_{11} / \mu_1 + \mu_2 \mu_{22} / \mu_2] \\ T_2 &= -2\text{Re}[\mu_1 \mu_{11} / \mu_1 + \mu_2 \mu_{22} / \mu_2] + 2\text{Re}[\mu_{11} / \mu_1 + \mu_{22} / \mu_2] \end{aligned} \quad (7)$$

상수 μ_i 는 다음 식 (8)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\mu_1 = \mu_{11} \mu^2 + \mu_{12} - \mu_{16} \mu; \quad \mu_2 = \mu_{12} \mu + \mu_{22} / \mu - \mu_{26} \quad (8)$$

ν_j 는 x_1-x_2 좌표와 관련되어 있는 Q 에서의 외향 단위 법선 성분이다. 그리고 A_{jk} 는 식 (9)로부터 구해지는 복소수이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & \mu_2 & -\mu_2 \\ 11 & -11 & 12 & -12 \\ 21 & -21 & 22 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 / 2\pi i \\ -\delta_1 / 2\pi i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

4. 다결정 재료 형상 정보 추출

Matlab 으로 프로그래밍된 기존의 다결정 격자를 임의로 생성할 수 있는 Compro-lattices 와 Compro-mesh 프로그램을 경계요소 형상 정보 추출을 위해서 FORTRAN 프로그램으로 새로이 구성하여 임의의 형상 정보를 추출하였다. Random Process 를 이용하여 결정되는 원자 핵을 중심으로 결정핵 주위에 같은 수의 정수 그룹을 두어 결정의 형상을 생성시킨다. 임의의 형상을 가지는 결정의 형상을 Fig. 1 에 나타내었다. 이렇게 생성된 결정의 형상정보를 가지는 행렬변수와, 전체 결정의 개수, 각 결정핵의 x,y 좌표 등을 입력하여 새로이 작성된 FORTRAN Mesh 프로그램으로 경계절점 좌표를 생성하였다. 위의 입력 변수를 가지고 결정과 결정이 만나는 지점과, 전체 도메인의 코너 등을 이루는 Vertex 를 생성한다. 이렇게 생성된 각각의 결정에서 Vertex 의 연결 순서를 고려하여 각 영역별 경계절점을 추출한다. 이 때 추출되는 경계절점은 기존에 정의된 Vertex 의 연결 순서를 고려하여 생성되는데 순서에 따라 생성은 되지만 접촉하고 있는 경계면의 좌표는 한번만 추출한다. 그렇기 때문에 다결정의 경계요소 해석에서는 사용할 수 없다. 이

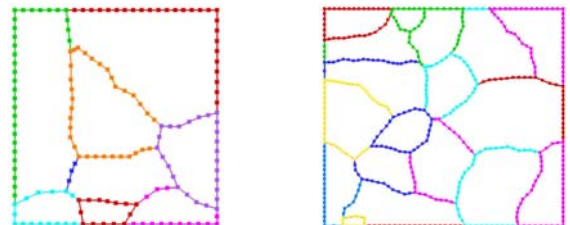


Fig. 1 fractured geometr region left and region 1 right

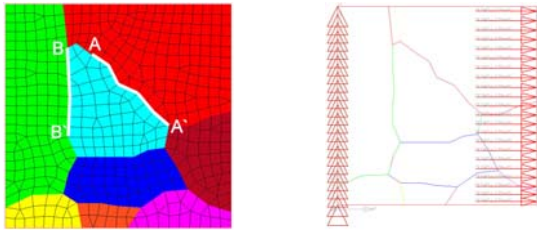


Fig. 2 mesh generation and boundary condition for analysis

절점 좌표를 이용하기 위해서 Vertex의 연결순서 및 경계절점의 연결 순서를 이용하여 각 영역별로 경계절점을 취할 수 있도록 프로그래밍 하였다.

· 유한 요소법에의 적용

경계요소해석을 위한 경계형상 정보는 Fig. 1에 나타난 8개의 영역을 가지는 형상을 이용하였다. 또한 해석 결과의 검증에 위한 유한요소 해석 모델은 Fig. 2와 같다. 해석을 위한 유한요소모델은 Altair HyperMesh를 이용하여 모델링 하였다. 또한 직교 이방성 다결정 형상은 모든 영역이 임의의 방향성을 지닌다. 이러한 방향성을 해석에 포함하기 위해서 경계요소 해석이 진행되는 과정 중에 각 영역의 재료 방향을 고려하여 E₁, E₂, nu, G 값을 계산하여 유한요소 해석 시에 각 영역별로 적용하였다. 계산된 영역별 재료 물성치는 Table.1에 나타내었다.

해석을 위한 경계조건은 Fig. 3에서 알 수 있듯이 좌측부위에 자유도 1과 2를 구속하였으며, 우측에는 x 방향으로 10N의 하중을 부여하였다. 이 경계조건은 해석의 결과를 비교하기 위해 유한요소 모델 및 경계요소 모델에 동일하게 적용하였다. 유한요소 해석을 위한 해석기는 ABAQUS V6.6/Standard를 사용하였다.

· 해석 결과 분석

각각의 구조해석을 통해서 얻을 수 있는 결과치의 의미는 유한요소 해석의 경우 응력이고, 경계요소 해석의 경우는 Traction이다. 그러므로 유한요소 해석 결과는 각 절점에서 가지는 Traction으로 환산하여 경계요소법과 비교해야 한다. Traction을 구하기 위해서 필요한 변수는 유한요소해석을 통해서 얻을 수 있는 s₁₁과 s₁₂, 그리고 절점의 좌표를 이용하여 얻을 수 있는 각 절점의 법선 벡터이다.

Table. 1 Material properties of each region

Region no.	1	2	nu	
1	198373.0	204073.0	0.2936	78449.69
2	197844.3	205489.8	0.2908	78200.41
3	209803.8	197017.6	0.3001	77247.72
4	199086.3	202683.5	0.2962	78641.28
	197477.1	206849.3	0.2880	77925.13
	209231.4	197077.1	0.3005	77385.28
	199994.7	201392.5	0.2984	78750.46
	210000.0	197000.0	0.3000	77200.00

Table. 2 comparison of traction of each analysis method

Left graph		Right graph	
U	M	U	M
5.9787	5.9695	9.1628	9.1522
5.7770	5.7694	9.7723	9.5798
5.5766	5.5820	10.0226	10.0001
7.5716	7.3345	10.0153	9.9780
9.089	9.0863	9.9868	9.9714
6.9696	6.6760	10.0834	9.9989
4.2575	4.2457	10.0231	10.0107
6.3100	6.0357	10.0951	10.0607
7.8254	7.8115	10.1245	10.1184
7.2258	7.1247		
6.409	6.4174		

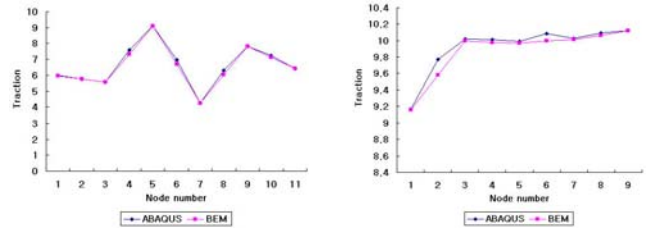


Fig. 3 comparison graph of each analysis result

이러한 변수들을 이용하여 유한요소 해석으로 인해서 얻어진 응력 분포 값을 Traction으로 환산하여 경계요소 해석결과와 비교하였다. 경계를 이루는 절점의 결과값을 그래프를 Fig.3에 나타내었으며, Table. 2에는 각 그래프를 비교한 결과를 나타내었다. Fig. 3에서 좌측의 그래프는 Fig. 2의 A-A' 구간의 절점을, 그리고 우측의 그래프는 B-B' 구간의 결과 비교 그림이다. 두 개의 그래프와 Traction 비교 결과표에서 알 수 있듯이 매우 비슷한 결과 값을 가진다. 그러므로 경계요소 해석기의 정확도가 매우 우수함을 확인하였다. 하지만 Table. 2에서 음영으로 표시한 절점에서는 결과값이 차이가 다른 절점보다 큰 것을 확인할 수 있다. 이러한 원인은 Traction의 법선 벡터가 완벽하게 정의할 수 없는 절점, 즉 Corner 혹은 Edge로 인식한 것이다. Traction 계산을 위한 절점 위치의 변화가 클수록 계산 결과의 차이는 좀더 커질 것이다. 이를 해결하기 위해서는 새로운 법선 벡터를 정의하여 그에 맞는 Traction을 새로이 계산해주어야 한다.

· 결론

경계 요소법에 의한 직교 이방성 다결정 재료의 응력해석에 관한 연구의 결론은 (1) 임의의 방향성을 가지는 직교 이방성 재료의 응력해석 수행 결과 유한요소 해석과 매우 유사한 결과를 확보하였으며, (2) 유한요소 해석에 비해 전처리와 해석시간의 단축을 가져왔으며, 결과의 품질 또한 우수함을 확인하였다. 또한 (3) 이러한 해석 과정은 실리콘 기판을 사용하여 제작되는 MEMS 부품의 신뢰성 평가에 사용할 수 있다. 그리고 (4) FORTRAN으로 프로그램된 결정 형상 정보 추출 프로그램을 이용하여 다양한 형태의 결정 형상이 가능하다.

후기

본 연구는 2 단계 지역대학 육성사업(BK21)과, 첨단기계사업단(NURI)의 지원에 의해서 연구되었다. 모든 지원들에 대해서 감사 드린다.

참고문헌

1. N. Tosaka and T. Nakayama., 2006, "A Basic of Boundary Element Method", pp.1-6,184-189
2. William. T. Vetterling, Saul A. Flannery, 1992 "Numerical Recipes Example Book (FORTRAN)" 2rd, pp.122-132
3. Ronald F. Gibson, 1994. "Principles of composite material mechanics", pp.46-58
4. Chon. M. S., Lee. H. I., 2002 "From Continuum Mechanics to Finite Element Method", pp.282-378
5. J. W. Choi., "Statistical Approach to the Elastic Property Extraction and Planar Elastic Response of Polycrystalline Thin-Films".2004, pp.42-69
6. 김동은, 황영진, 이석순, "직교이방성 재료 물성이 적용된 cantilever beam 형상의 FEM과 BEM에 의한 해석 결과값 비교 연구", 2007 대한기계학회 춘계학술대회 논문집.,730-735