

# 강성 완화와 응력 회복을 고려한 레벨셋 기반 위상최적화 Level Set Based Topology Optimization Considering Stiffness Regularization and Stress Recovery

\*박강수<sup>1</sup>, #윤성기<sup>2</sup>

\*K. S. Park<sup>1</sup>, #S. K. Youn(skyoun@kaist.ac.kr)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 한국과학기술원 기계공학과 기계기술연구소, <sup>2</sup> 한국과학기술원 기계공학과

Key words : Topology Optimization, Level Set Method, Stiffness Regularization, Stress Recovery

## 1. 서론

기존의 균질화법과 밀도법에 근거한 위상최적화 방법에서 벗어나 설계 영역 내에 존재하는 재료의 경계를 다루거나 추출하는데 레벨셋 방법을 이용하는 위상최적화가 Sethian 과 Wiegmann[1]에 의해 제안되었다. 레벨셋 기반 위상최적화의 경우, 유한요소해석을 통하여 구조물의 반응해석과 민감도 해석을 수행하게 되고 이를 바탕으로 해밀턴-자코비 형태의 진화식을 계산하여 매 층차마다 구조물의 경계를 진화시키게 된다. 일반적인 선형 탄성문제에 대한 컴플라이언스 최소화 문제에 있어서는 목적함수 내에 응력과 변형률의 곱으로 표현되는 항이 존재한다. 그리고 레벨셋 위상최적화의 경우 최적화 과정 중에 계산량이 많아 구조물의 반응해석에는 선형 유한요소를 많이 사용하고 있다. 따라서 이러한 선형 요소에 있어서 응력(혹은 변형률)은 요소 내에서 일정한 상수값이 되며, 요소와 요소간에는 서로 불연속적인 값을 갖는다. 이러한 응력 혹은 변형률의 불연속성은 설계변수의 개선에 사용되는 해밀턴-자코비 방정식의 속도항에 영향을 미치게 되고 궁극적으로는 수렴 안정성에 영향을 준다.

앞서 언급한 불연속적인 응력과 변형률값을 연속적인 값으로 처리하는 가장 간단한 방법으로 절점에서 응력 및 변형률을 평균화하는 것이 있다. 이 경우 유한요소 내의 적분점에서 계산된 응력값을 요소 내 절점에서의 값으로 재구성하고 인접한 요소의 수를 고려하여 평균화한다. 또 다른 방법으로 응력 회복을 통한 연속화 방법이 있다. 관심있는 절점에서의 응력값을, 인접한 요소들로 구성되는 패치에서의 응력값을 사용하여 유한요소 형상함수를 통해 내삽하여 사용한다. 일반적으로 이러한 응력 회복 방법은 패치 내에서 정확한 응력값을 줄 수 있다고 알려져 있다.[2] 하지만 경계에 존재하는 요소에 대해서는 응력값이 일부 부정확해질 수 있는 단점이 있다. 본 연구에서는 응력 회복과 함께 경계에서도 연속적이며 정확한 응력값을 줄 수 있는 전역 응력 회복 방법을 적용하고자 한다.

정확한 응력 및 변형률의 계산을 위해서는 유한요소해석의 정확성이 보장되어야 한다. 일반적으로 유한요소해석을 수행할 경우 강성행렬 계산을 위해 요소 내에서 가우스 수치 적분을 이용한다. 최근에 이러한 강성행렬 적분에 있어서 기존의 가우스 적분법을 사용하지 않고 안정화된 절점적분을 이용한 유한요소법이 Liu et al.[3]에 의해 제안되었다. 이 방법에서는 요소 내에 일정한 상수값을 갖는 변형률장을 가정할 경우, 영역적분을 경계적분으로 변경할 수 있음에 착안하여 안정화된 절점 적분법을 이용한 유한요소해석법을 제시하였다. 이를 통하여 적은 수의 유한요소 수에 대해서도 기존의 가우스 적분을 이용하였을 때 보다 더 정확해에 가까운 수치해를 얻을 수 있음을 보였다. 또한 강성행렬의 적분 시 존재하는 요소 잠김 현상을 완화할 수 있음을 제시하였다.

본 연구에서는 안정화된 절점 적분법에 기반한 유한요소해석을 통하여 강성행렬을 완화시키고 구조물 변형해석에 있어서의 정확성을 확보하고자 한다. 최종적으로 제시한 방법을 통해 기존의 이차원 선형 탄성문제에 있어서의

컴플라이언스 최소화 문제에 적용하여 그 적절성과 타당성을 보이고자 한다.

## 2. 강성 완화 기법

일반적으로 유한요소 수치화에서는 형상함수를 사용하여 변위 및 변위의 일차 미분량에 해당하는 변형률을 근사화 한다. 이 때 공간에 대한 일차 미분량은 다음과 같은 미분 완화식을 적용할 수 있다.

$$\tilde{\nabla} (x) = \int_{\Omega} \nabla (x) \Phi(x-x) d\Omega \quad (1)$$

여기서  $\tilde{\nabla}$  는 완화된 일차 미분 근사량,  $\Phi$  는 완화 함수,  $\Omega$  는 완화 영역, 그리고  $x$  는 완화 영역 내의 임의의 점을 나타낸다.

식(1)은 다음의 경계 및 영역적분으로 나누어 표현된다.

$$\tilde{\nabla} (x) = \int_{\Gamma} \nabla (x) (x) \Phi(x-x) d\Gamma - \int_{\Omega} (x) \nabla \Phi(x-x) d\Omega \quad (2)$$

여기서 완화 함수  $\Phi$  를 완화 영역 내에서 일정한 상수함수 ( $\Phi(x-x) = 1/|\Omega|$  if  $x \in \Omega$ ,  $0$  if  $x \notin \Omega$ )로 정의할 경우, 식(2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{\nabla} (x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} (x) (x) d\Gamma \quad (3)$$

여기서  $|\Omega|$  은 완화 영역의 면적 (혹은 부피)를 나타낸다.

즉, 공간에 대한 변위의 미분량이 미분 완화식을 통해 영역적분이 경계적분으로 변경된다. 이러한 변위의 경계적분을 통해 일차 미분량에 해당하는 값을 얻을 수 있게 되고, 또한 완화 영역 내에서 변형률은 일정한 상수값 (면적 혹은 부피)을 갖게 된다.

## 3. 응력 회복 기법

본 연구에서는 사용되는 응력 회복기법은 설계영역 전체에서의 응력 완화 및 회복을 수행한다. 이를 위해 다음의 행렬식을 풀게 된다.[2]

$$\left( \sum \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega \right) \{ \sigma^* \}_G = \sum \int_{\Omega} [N]^T \sigma d\Omega \quad (4)$$

여기서  $N$  은 형상함수,  $\{ \sigma^* \}_G$  는 절점에서 정의되는 완화된 응력이며,  $\sigma$  는 각 요소 내에서 정의된 응력값이다.

좌측항은 일종의 질량행렬의 형태를 가지며 모든 국부 응력항의 완화에 대해 동일한 값을 갖는다. 일반적으로 이 방법은 전역  $L_2$  투영기법으로 알려져 있으며 조각응력 회복 기법과 함께 현재 널리 쓰이고 있다.

### 4. 레벨셋 기반 위상최적화 문제의 수식화

재료 제한조건을 고려한 컴플라이언스 최소화 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \text{objective} = \int_{\Omega_{\text{des}}} (\phi) \sigma^T \varepsilon \, d\Omega \\ \text{Subject to} \quad & \text{volume} = \int_{\Omega_{\text{des}}} (\phi) \, d\Omega \leq \xi_{\text{vol}} M_{\text{tot}} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $\phi$  는 레벨셋 함수,  $\xi_{\text{vol}}$  는 설계영역 전체 부피 ( $M_{\text{tot}}$ )에 대한 부피비이다.

위의 식(5)와 같이 제한조건이 있는 문제의 경우 라그랑지 승수  $\lambda$  를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{lag} = \int_{\Omega_{\text{des}}} \left[ (\phi) \varepsilon^T E \varepsilon + \lambda \left( (\phi) - \xi_{\text{vol}} \right) \right] d\Omega \quad (6)$$

그리고 설계변수인 레벨셋 함수값의 미소변화량에 대한 형상민감도는 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \text{lag}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \text{objective}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \text{objective}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \\ &+ \lambda \left\langle \frac{\partial \text{volume}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\left\langle \frac{\partial \text{lag}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial \text{lag}}{\partial \phi} \psi \, d\Omega$  는 Frechet 미분을 나타내고

는 형상변경에 따른 변위의 민감도 방향을 의미한다.

특별히 본 연구에서 이용되는 형상민감도에 관한 식은 Haug et al.[4]에 근거하여 기술한다. 식(7)의 첫번째 항은 다음의 수반방정식을 이용하여 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\left\langle \frac{\partial \text{objective}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\Omega_{\text{des}}} \delta(\phi) \left[ f^T + \kappa \left\{ \begin{matrix} T \\ \end{matrix} \right\} - \sigma^T \varepsilon \right] \psi \, d\Omega \quad (8)$$

식(7)의 두번째 항, 그리고 세번째 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left\langle \frac{\partial \text{objective}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\Omega_{\text{des}}} \delta(\phi) \sigma^T \varepsilon \, \psi \, d\Omega \quad (9)$$

$$\left\langle \frac{\partial \text{volume}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\Omega_{\text{des}}} \delta(\phi) \psi \, d\Omega \quad (10)$$

따라서 최종적인 라그랑지 범함수에 관한 형상민감도는 다음과 같다.

$$\left\langle \frac{\partial \text{lag}}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_{\Omega_{\text{des}}} \delta(\phi) \left[ M_{\phi} + \lambda \right] \psi \, d\Omega \quad (11)$$

여기서  $M_{\phi} = f^T + \kappa \left\{ \begin{matrix} T \\ \end{matrix} \right\}$ .

이 때 형상변형에 관한 해밀턴-자코비 방정식의 속도장에 해당하는  $\text{shape}$  을 다음과 같이 정의한다.

$$\text{shape} = \left[ M_{\phi} + \lambda \right] \psi \quad (12)$$

형상변형에 관한 속도장을 식(12)와 같이 정의하면 최적화 과정 중 라그랑지 범함수의 감소가 만족된다.

### 4. 적용예제

제안된 방법의 검증으로 위상최적화에서 많이 다루어졌던 외팔보의 컴플라이언스 최소화 문제를 고려하였다. 설계에 적용된 외팔보의 형상, 하중 및 경계조건을 Fig. 1 에 나타내었다. 외팔보의 설계조건은 Table 1 에 요약하였다.

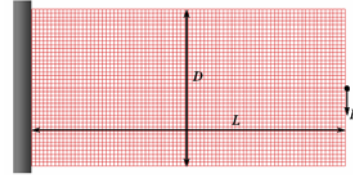


Fig. 1 Example of cantilever beam design  
Table 1 Design parameters: cantilever beam design

Design condition	pecified data
Geometry	L=2, D=1
Mesh	3200 Linear quadrilateral elements
Material	E=1, $\nu=0.3$
Applied load	P=1
Volume ratio	35%

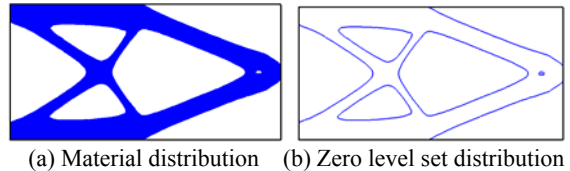


Fig. 2 Optimum topology

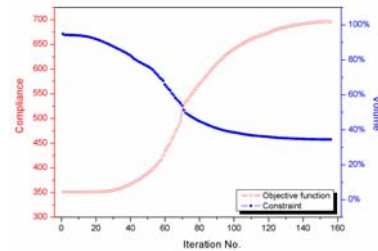


Fig. 3 History of objective function and constraint

Fig. 2 는 수렴된 최적의 위상을 나타낸다. Fig. 3 은 목적함수와 제한조건의 수렴양상을 나타내며, 추차과정에서 목적함수의 요동이 발생하지 않고 단조증가한 후 제한조건이 만족하는 부분에서 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

### · 결론

본 연구에서는 안정화된 절점 적분 및 응력 회복을 고려한 위상최적화를 수행하였다. 제안된 방법을 이차원 선형탄성 구조물의 컴플라이언스 최소화 문제에 적용하였을 때 레벨셋 함수 및 목적함수의 안정적인 수렴양상을 확인할 수 있었다. 향후 제안된 방법을 판이나 셸 구조물에 대한 위상최적설계에 적용하여 확장성 및 유용성을 보이고자 한다.

### 참고문헌

- Setiyan, J. A., and Wiegmann, A., "Structural boundary design via level set and immersed interface method," *Journal of Computational Physics*, **1 3**, 489-528, 2000.
- Cook, R. D., Malkus D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. *c s a d a i c a i s f f i m a a s i s d*, Wiley & Sons, 2001.
- Liu, G. R., Dai, K. Y. and Nguyen, T. T., "A smoothed finite element method for mechanics problems," *Computational Mechanics*, **3**, 859-877, 2007.
- Haug, E.H., Choi, K.K., and Komkov V., *sig s s i i a a s i s f s c a s s m s*, Academic press, 1986.