최대 엔트로피 법칙을 이용한 신뢰도 기반 최적 설계

Application of Maximum Entropy Principle for RBDO

*강희엽 [1], #곽병만 [2]

*H. Y. Kang[1], #B. M. Kwak(bmkwak@khp.kaist.ac.kr)[2]

[1] 한국과학기술원 기계공학과, [2] 한국과학기술원 기계공학과

Key words : Maximum Entropy Principle, Sensitivity Analysis, Reliability Based Design Optimization, Moment Method

1. 서론

공학 시스템의 최적화를 위한 설계 개념 중 시스템이 갖게 되는 불확실성을 확률로 정량화하여 예측하고 최적화하는 신뢰도 기반 최적설계에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다. 이러한 신뢰도 기반 최적설계 기법 중 시스템 성능함수의 적률(Moment)로부터 성능함수의 손상확률을 계산하는 신뢰도 기반 최적 설계(RBDO: Reliability Based Design Optimization)는 계산의 정확도 측면에서 다른 근사적 기법에 비해 우수하다고 알려져 있다. 적률 기반 신뢰도 해석은 크게 시스템 성능함수의 적률 정보를 얻는 과정과 그 후 얻어진 적률 정보로부터 시스템 성능함수의 확률밀도함수(PDF: Probability Density Function)를 추정하는 과정으로 이루어 진다. 본 연구에서는 기존의 확률모델 추정 기법인 피어슨 시스템이 갖고 있는 단점을 보완할 수 있는 최대 엔트로피 법칙(MEP: Maximum Entropy Principle)을 사용하여 손상확률의 설계변수에 대한 민감도를 계산하고 이를 RBDO 에 적용해 봄으로써 MEP 의 RBDO 에의 적용 가능성을 타진해 보았다.

2. 최대 엔트로피 법칙

시스템 성능함수의 응답으로부터 얻어지는 유한 개의 적률로 결정할 수 있는 PDF 의 개수는 무수히 많으며 유일하게 결정할 수 없다[1]. 동일한 유한 개의 적률을 갖는 PDF 중 엔트로피를 최대로 하는 PDF 를 결정하는 방법이 MEP 이며 그 제한조건으로 적률 제한 조건이 주어진 경우 아래와 같은 수식화를 통하여 PDF 를 결정할 수 있다[2].

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \int_a^b \;(x)\log\;(x)dx \\ &\text{subejct to} && \;(x)\geq 0 \\ &&& \int_a^b \;(x)dx = 1 \\ &&& \int_a^b x^i\;(x)dx = \mu_i',\ \text{for } 1\leq i\leq m \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 μ' 는 확률변수 x 의 원적률(Raw Moment)이며 m 은 주어진 원적률의 개수를 나타낸다. 위 문제의 해는 변분법을 이용하여 아래와 같이 결정된다.

$$\;(x) = \exp\left[\sum_{i=0}^m \lambda_i x^i\right],\ x\in[a,b] \tag{2}$$

여기서 λ_i 는 라그랑주 승수(Lagrange Multiplier)이며 주어진 (m+1)개의 제한조건으로부터 (m+1)개의 라그랑주 승수를 결정할 수 있다.

제한 조건으로부터 라그랑주 승수를 결정하는 과정은 비선형 연립 방정식의 해를 구하는 과정이며 르장드르 변환(Legendre Transformation)을 통하여 아래와 같은 함수를 정의하여 간접적으로 계산한다[1].

$$\begin{aligned} &\Gamma(\boldsymbol{\lambda}) = \ln\; + \sum_{i=1}^m \mu_i'\lambda_i \\ &\text{where}\;\; \equiv \int_a^b \exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i\right)dx \end{aligned} \tag{3}$$

위에서 정의된 함수의 정류점(Stationary Point)은 제한 조건을 만족하는 라그랑주 승수가 되며 위의 함수는 항상 볼록(Convex)이며 그 헤시안 행렬은 양정치성(Positive Definite)을 갖게 된다.

위의 함수는 아래와 같이 기저로 λ_0 를 포함하여 재정의할 수도 있다.

$$\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = \int_a^b \exp\left(-\sum_{i=0}^m \lambda_i x^i - 1\right)dx + \sum_{i=0}^m \lambda_i\mu_i \tag{4}$$

위의 함수 또한 볼록하며 그 헤시안 행렬 역시 양정치성을 갖게 된다.

정의된 함수의 양정치성에 근거한 축차적 기법을 적용하여 함수 $\boldsymbol{\Gamma}$ 또는 $\boldsymbol{\Delta}$의 정류점을 찾는 과정은 아래와 같다.

함수 $\boldsymbol{\Gamma}$ 인 경우:

$$\begin{aligned} &\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \sum_{\;=1}^m (\;\;^{-1})_i^k\left[\mu\; - \langle x\;\rangle^k\right] \\ &\text{where}\;\;_i^k = \langle x^{i+}\;\rangle^k - \langle x^i\rangle^k\langle x\;\rangle^k \quad i,\; = 1,2,\ldots,m \end{aligned} \tag{5}$$

함수 $\boldsymbol{\Delta}$ 인 경우:

$$\begin{aligned} &\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \sum_{\;=0}^m (\;\;^{-1})_i^k\left[\mu\; - \langle x\;\rangle^k\right] \\ &\text{where}\;\;_i^k = \langle x^{i+}\;\rangle^k \quad i,\; = 0,1,2,\ldots,m \end{aligned} \tag{6}$$

3. 민감도 해석

시스템의 손상확률은 주어진 성능함수의 적률에 의하여 결정된 PDF 로부터 얻어질 수 있으며 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Pr(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{d})) &= \int_{g(x)<0} \;(x)dx \\ &= \int_a^0 \exp\left(-\sum_{i=0}^m \lambda_i x^i\right)dx = \int_0^\alpha \exp\left(-\sum_{i=0}^m \lambda_i\;^i\right)d \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 α는 구간 [a, b] 에 존재하는 성능함수가 0 인 점을 [0, 1]로 정규화하였을 때의 값으로 $\alpha = a/(a-b)$의 관계를 갖는다. 각각의 설계변수에 대하여 위의 손상확률을 편미분하면 아래와 같은 민감도 수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Pr}{\partial d_i} = \sum_{k=0}^m \frac{\partial \Pr}{\partial \lambda_k}\sum_{\;=0}^m \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial d_i} \\ &\text{where}\ \Pr = \int_0^\alpha \;(x)dx = \int_0^\alpha \exp\left(\sum_{i=0}^m -\lambda_i x^i\right)dx \\ &\frac{\partial \Pr}{\partial \lambda_k} = -\int_0^\alpha x^k \exp\left(\sum_{i=0}^m -\lambda_i x^i\right)dx \\ &\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mu} = -\;_k\;,\quad \frac{\partial \mu}{\partial d_i} = \frac{\Delta\mu}{\Delta d_i} \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $\;_{jk}$ 는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_m \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{2m} \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \tag{9}$$

각 적률의 설계변수에 대한 민감도는 유한차분법(FDM: Finite Difference Method)을 사용하였다.

4. 수치 예제

$$\text{minimize} \quad f(d) = d_1 + d_2$$
$$\text{subject to} \quad [g_i(\mathbf{x}) \le 0] \le {}_{f_0}, \quad i = 1,2,3$$
$$0 \le \mathbf{d} \le 10$$

where

$$g_1 = \frac{x_1^2 x_2}{20} - 1 \quad , \quad g_2 = \frac{(10x_2^3 - x_1^2 x_2 - 2x_1)}{10} - 1 \tag{10}$$
$$g_3 = \frac{80}{(x_1^2 + 8x_2 + 5)} - 1 \quad , \quad {}_{f_0} = 0.02275$$

위의 MEP 를 이용하여 추정된 PDF 로부터 얻어지는 손상확률의 민감도 정보를 RBDO 에 적용하였다. 위의 수치 예제는 기존의 연구[3]에서 많이 인용되는 수치 예제로서 정규 분포를 따르는 2 개의 설계변수로 이루어져 있으며 각 설계변수의 분산은 0.5 와 0.4 이며 설계 변수의 상한과 하한 값은 각각 1 과 10 이다. 사용된 최적화 알고리즘은 SQP 기법이며 5 수준 전조합 실험을 수행하여 적률을 계산하였다.

그 결과를 기존의 방법과 비교하면 아래 표 1 과 표 2 와 같다.

Table 1 Comparison of RBDO result with other method

	x_1	x_2	Remarks
Initial Point	5.000	5.000	Infeasible Resion
FORM	3.974	2.470	Opt. Obj. = 6.444
FAMM + Pearson	4.023	2.476	Opt. Obj. = 6.530
FFMM + MEP	3.968	2.540	Opt. Obj. = 6.508

Table 2 Verification of constraint at optimal point by using MCS

Num. Exp = 1,000k	g_1	g_2	g_3
FORM	0.026340	0.023320	0.0
FAMM + Pearson	0.021640	0.023660	0.0
FFMM + MEP	0.021500	0.015200	0.0

그림 1 에서 보는 바와 같이 최적화 과정 중 총 39 회의 축차와 415 회의 함수 호출이 있었으며 FAMM+Pearson 방법과 비교하여 효율성 측면에서 단점을 보였다[4].

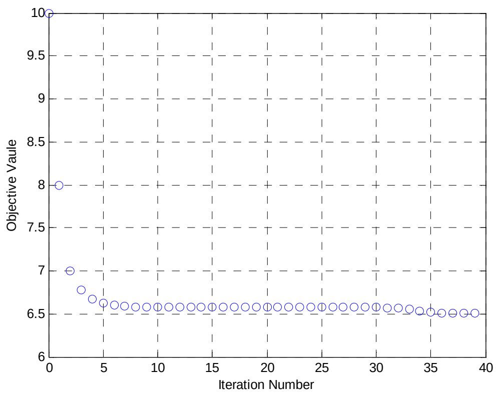

Fig. 1 History of objective function for 4 moments case

5 수준 실험을 한 경우 4 차 보다 큰 고차의 적률 정보를 정확도 손실과 추가의 계산 과정 없이 얻을 수 있다. 따라서 피어슨 시스템을 사용하는 경우 버려지게 되는 고차의 적률 정보를 추가적으로 사용하여 위의 예제를 앞의 예제와 같은 조건 하에서 최적화를 수행하여 보았다.

Table 3 RBDO with first 5 moments by FFMM+MEP

	x_1	x_2	Remarks
Initial Point	4.000	4.000	Infeasible Resion
FFMM + MEP	3.990	2.500	Opt. Obj. = 6.485

Table 4 Verification of constraint at optimal point by using MCS

Num. Exp = 1,000k	g_1	g_2	g_3
FFMM + MEP	0.023000	0.020565	0.0

표 3 과 4 그리고 그림 2 에서 보는 바와 같이 최적화 결과 총 14 회의 축차와 90 회의 함수 호출을 하여 4 차 적률까지 사용한 앞의 경우 비하여 전체적인 계산량이 감소하였다. 해의 정확도 측면에서 목적 함수의 값에서 향상이 있었으며 최적점에서 MCS 통한 제한 조건의 만족도 평가에서도 우수한 결과를 보였다.

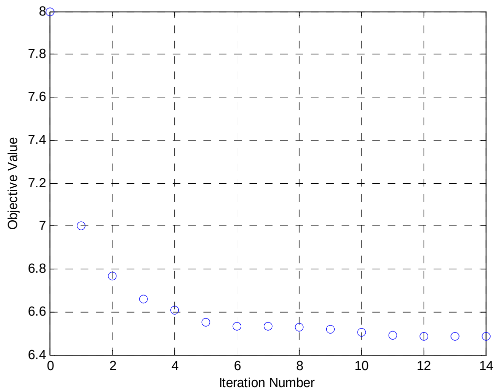

Fig. 2 History of objective function for 5 moments case

5. 결론

본 연구를 통하여 MEP 를 통한 손상확률의 민감도 수식을 유도하고 이를 이용하여 RBDO 에 적용하여 보았다. 5 차 이상의 고차의 적률 정보를 이용함으로써 손상확률을 보다 정확하게 근사하고 이를 통하여 최적화 과정의 계산 효율성을 향상시켰다.

후기

본 연구는 삼성 석좌 기금과 BK21 의 지원 받았음을 밝힙니다.

참고문헌

1. Mead, L. R., Papanicolaou, N., "Maximum Entropy in the Problem of Moments," Math. Phys., **25**(8), 2404-2417, 1984.
2. Jaynes, E. T., “Information Theory and Statistical Mechanics,” Physical Review, **106**(4), 620-630, 1957
3. Tu, J., Choi, K. K., Park, Y. H., “Design Potential Method for Robust System Parameter Design,” AIAA, **39**(4), 667-677, 2001
4. 허재성, “신뢰도 해석을 위한 함수 근사 모멘트 방법의 개발과 강건 최적설계에의 적용,” 한국과학기술원 박사 학위 논문, 2006