

사각 핀의 절연된 핀 끝과 비 절연 핀 끝의 비교

강형석* (강원대학교 기계·메카트로닉스공학부)

Comparison of Insulated Fin Tip and Non-insulated Fin Tip for a Rectangular Fin

Hyung Suk Kang

Key Words: Fin Tip (핀 끝), Insulation (절연), Heat loss (열손실), Temperature (온도)

Abstract

A rectangular fin with variable fin height, fin length and surrounding temperature is analyzed using a one-dimensional analytical method. Both the heat loss from a rectangular fin with non-insulated fin tip and that with insulated fin tip are presented as a function of the fin height, fin tip length and the convection characteristic number. The relative error in the heat loss of these two cases is also given as a function of the same variables. One of the results shows that the trend of heat loss for both cases with the variation of given variables is similar even though the relative error increases as the shape of the fin becomes shorter and fatter.

기호설명

Bi : 핀 주위 Biot 수 ($= h l_b / k$)
h : 핀 표면 주위의 열대류 계수 [$W/m^2 \cdot ^\circ C$]
k : 열전도율 [$W/m \cdot ^\circ C$]
 l_c : 특성 길이 [m]
 l_e : 핀 끝 길이 [m]
 L_c : 무차원 핀 끝 길이, l_e / l_c
 l_h : 핀 높이의 반 [m]
 L_h : 무차원 핀 높이의 반, l_h / l_c
 l_w : 핀 폭 [m]
M : 대류특성계수, ($= h l_c / k$)
q : 핀으로부터의 열손실 [W]
Q : 핀으로부터의 무차원 열손실, $q / (k T_b l_w)$
T : 온도 [$^\circ C$]
 T_b : 핀 바닥 온도 [$^\circ C$]
 T_∞ : 핀 주위 온도 [$^\circ C$]

x : 길이 방향 좌표 [m]
X : 무차원 길이 방향 좌표 ($= x / l_c$)
y : 높이 방향 좌표 [m]
 θ : 무차원 온도 ($= T / T_b$)
 θ_s : 바닥에 대한 주위 온도 비 ($= T_\infty / T_b$)

하첨자

b : 핀 바닥
c : 특성
e : 핀 끝
h : 핀 높이
IS : 절연
NI : 비절연
w : 핀 폭
 ∞ : 주위

1. 서론

열전달을 향상시키는 방법으로 확장표면 또는 핀이 있는데 우리들 주변에서 핀이 사용되는 곳은 무수히 많다. 가정용 주방기기, 컴퓨터로부터 공조 및 냉동기, 최첨단 항공기까지 거의 모든

* 강원대학교 기계·메카트로닉스 공학부
E-mail : hkang@kangwon.ac.kr
TEL : (033)250-6316 FAX : (033)242-6013

영역에서 사용되고 있다. 여러 가지 형상의 핀에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. 이러한 연구들에서 핀 끝의 경계조건으로 실제로 핀의 끝에서 열전달이 일어나는 것으로 가정하는 논문들도 있는 반면⁽¹⁻²⁾ 계산의 편의를 위하여 핀 끝을 절연된 경우로 가정하는 논문들도⁽³⁻⁴⁾ 있다.

대부분의 많은 열전달 교과서에서⁽⁵⁻⁷⁾ 사각 핀의 경우에 핀 끝에서 열전달이 일어나는 경우에 대한 해석을 보여주고 이에 비교하여 계산이 훨씬 간단해지는 핀 끝이 절연된 경우의 해석을 나타낸다. 이와 같이 핀 끝이 절연된 경우는 핀 길이가 매우 길어서 이미 핀 표면을 통하여 열전달이 다 일어나서 핀 끝의 온도가 핀 주위의 온도와 같아질 경우 절연되지 않은 경우의 결과와 같아지는 것으로 설명이 되어있다. 그러나 두 경우의 구체적인 결과 비교는 주어지지 않았다.

본 논문에서는 사각 핀의 높이, 길이, 핀 바닥 온도에 대한 핀 주위 온도의 비 그리고 대류특성 계수를 변화 시켜가며 각 변수들의 변화에 따른 두 경우의 열손실의 변화와 열손실의 상대오차를 구체적으로 제시한다.

2. 1차원 수치해석

Figure 1에서 보여 지는 사각 핀에 대한 무차원 형태의 지배 방정식은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} - \frac{M}{L_h}(\theta - \theta_s) = 0 \quad (1)$$

온도가 T_b 로 일정한 핀 바닥의 무차원 형태의 경계조건은 식 (2)로 주어진다.

$$\theta|_{X=0} = 1 \quad (2)$$

2. 1. 핀 끝이 절연되지 않은 경우

핀 끝이 절연되지 않은 실제 경우의 핀 끝의 경계조건은 식 (3)으로 주어진다.

$$\left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X=L_e} + M(\theta|_{X=L_e} - \theta_s) = 0 \quad (3)$$

지배방정식 (1)에 경계조건 (2)와 (3)을 적용하여

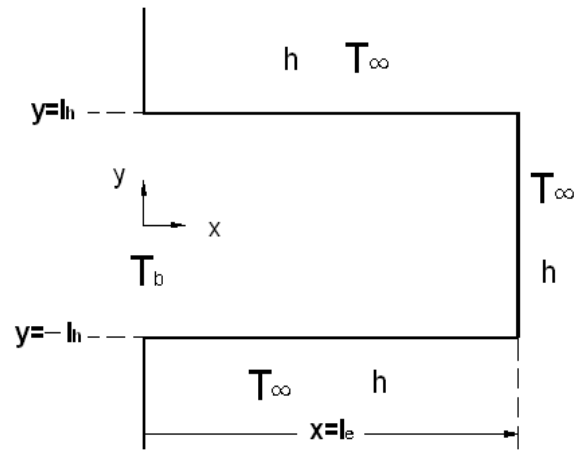


Fig. 1 Geometry of a Rectangular Fin

풀면 핀 내의 온도 분포를 나타내는 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$\theta(X) = (1 - \theta_s) \frac{f_1(X) + f_2(X)}{A + B} + \theta_s \quad (4)$$

여기서,

$$f_1(X) = \sqrt{\frac{M}{L_h}} \cdot \cosh\left\{ \sqrt{\frac{M}{L_h}} (L_e - X) \right\} \quad (5)$$

$$f_2(X) = M \cdot \sinh\left\{ \sqrt{\frac{M}{L_h}} (L_e - X) \right\} \quad (6)$$

$$A = \sqrt{\frac{M}{L_h}} \cdot \cosh\left(\sqrt{\frac{M}{L_h}} L_e \right) \quad (7)$$

$$B = M \cdot \sinh\left(\sqrt{\frac{M}{L_h}} L_e \right) \quad (8)$$

핀으로부터의 열손실은 핀 바닥을 통한 전도에 의한 열전달과 같으며 식 (9)에 의하여 계산되어진다.

$$q = -2kl_h l_w \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad (9)$$

계산되어진 무차원 형태의 열손실은 식 (10)에 의하여 주어진다.

$$Q = \frac{q}{k T_b l_w}$$

$$= 2L_h(1-\theta_s)\frac{C+D}{A+B} \quad (10)$$

여기서,

$$C = \frac{M}{L_h} \sinh\left(\sqrt{\frac{M}{L_h}} L_e\right) \quad (11)$$

$$D = \sqrt{\frac{M^3}{L_h}} \cosh\left(\sqrt{\frac{M}{L_h}} L_e\right) \quad (12)$$

2. 2. 핀 끝이 절연된 경우

핀 끝이 절연된 경우의 핀 끝의 경계조건은 식 (13)으로 주어진다.

$$\left.\frac{d\theta}{dX}\right|_{X=L_e} = 0 \quad (13)$$

지배방정식 (1)에 경계조건 (2)와 (13)을 적용하여 풀면 핀 내의 온도 분포를 나타내는 식 (14)를 얻을 수 있다.

$$\theta(X) = (1-\theta_s) \frac{\cosh\left\{\sqrt{\frac{M}{L_h}}(L_e-X)\right\}}{\cosh\left(\sqrt{\frac{M}{L_h}}L_e\right)} + \theta_s \quad (14)$$

핀 끝이 절연되지 않은 경우와 같은 방법으로 구한 무차원 형태의 열손실은 식 (15)로 주어진다.

$$Q = 2(1-\theta_s)\sqrt{ML_h} \tanh\left(\sqrt{\frac{M}{L_h}}L_e\right) \quad (15)$$

3. 결과 및 고찰

핀 바닥 높이의 반이 0.2로 고정되었을 때 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 각각의 경우에 대하여 핀 끝 길이의 변화에 따른 열손실의 변화가 Fig. 2에서 보여진다. 두 경우 모두 핀 끝 길이가 길어짐에 따라 열손실은 처음에는 급격히 증가하다 그 이후 증가율이 계속 감소함을 보여준다. 그러나 핀 끝의 길이가 짧을수록 두 경우의 오차는 상당히 크다가 핀 끝 길이가 길어질수록 두 경우의 오차는 작아짐을 보여준다. 이는 예상된 결과로 핀 끝이 절연되지 않은 경우에도 핀 끝 길이가 길어질수록 핀 표면을 통하여 이미 많은 열손실이 일어나서 핀 끝에서 일어나

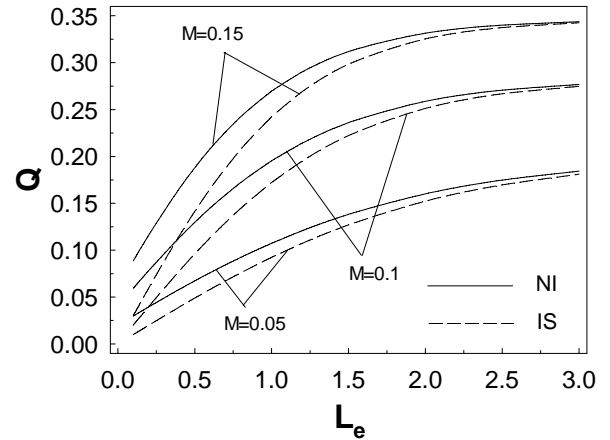


Fig. 2 Heat loss vs. fin tip length ($L_h=0.2$, $\theta_s=0$)

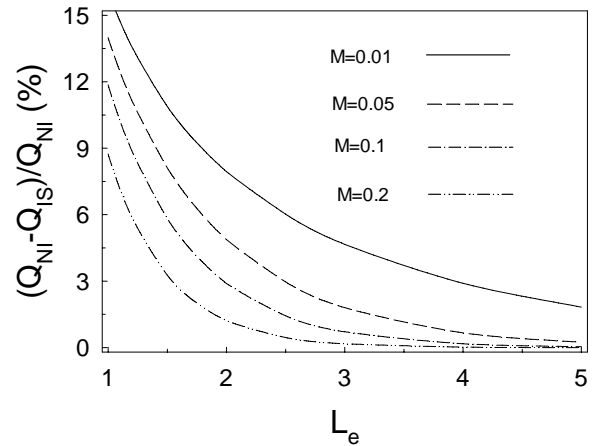


Fig. 3 Relative error in the heat loss versus fin tip length ($L_h=0.2$, $\theta_s=0$)

는 열손실이 작아지기 때문이다.

Figure 3은 핀 바닥 높이의 반이 0.2로 고정되었을 때 네 경우의 대류특성계수에 대하여 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우의 열손실의 상대 오차를 핀 끝 길이의 함수로 나타낸다. 핀 끝이 길어질수록, 대류특성계수가 커질수록 핀 주위 표면을 통하여 이미 많은 열손실이 일어나고 핀 끝에서의 열손실은 작아지기 때문에 상대오차는 작아진다. 대류 특성계수가 0.01인 경우에도 (i.e. $Bi=M \cdot L_h=0.01 \times 0.2=0.002$) 핀 끝 길이가 약 2.9이상이면 상대오차는 5% 내로 작아진다. 즉 Fig. 3은 Biot 수가 0.002로 작아도 핀 길이가 핀 높이의 약 7.3배 이상이면 핀 끝을 절

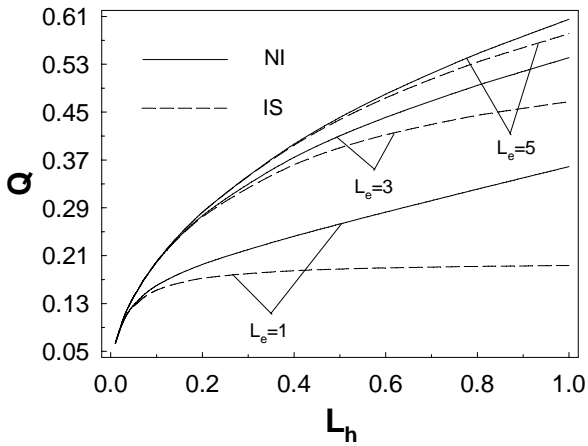


Fig. 4 Heat loss vs. fin height ($M=0.1$, $\theta_s=0$)

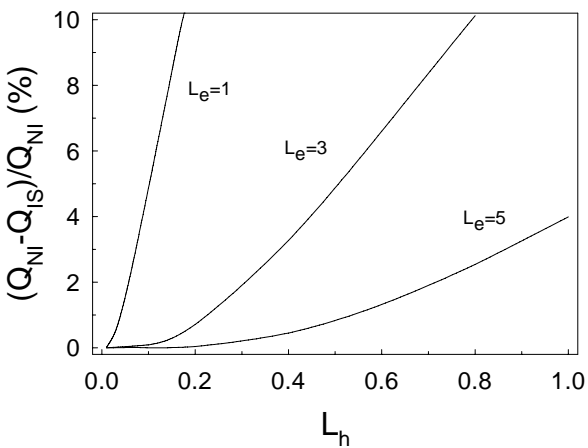


Fig. 5 Relative error in the heat loss versus fin height ($M=0.1$, $\theta_s=0$)

연으로 가정해도 오차가 5% 이내이며 Biot 수가 0.04인 경우에는 핀 길이가 핀 높이의 3.3배만 되어도 5% 이내의 오차임을 보여준다.

Figure 4는 대류특성계수가 0.1이고 핀 끝 길이가 각각 1, 3 그리고 5일 때 핀 바닥 높이의 변화에 따른 핀 끝이 절연된 경우와 절연 되지 않은 경우의 열손실의 변화를 보여준다. 핀 끝 길이가 고정되었을 때 핀 바닥 높이가 커지면 상대적으로 핀의 형상이 길이가 짧은 핀이 되므로 두 경우의 상대오차는 커지게 되며 핀 길이가 짧아질수록 상대오차 값은 현저해짐을 나타낸다.

대류특성계수 값이 0.1이고 세 경우의 고정된 핀 끝 길이에 대하여 핀 높이의 변화에 따른 핀

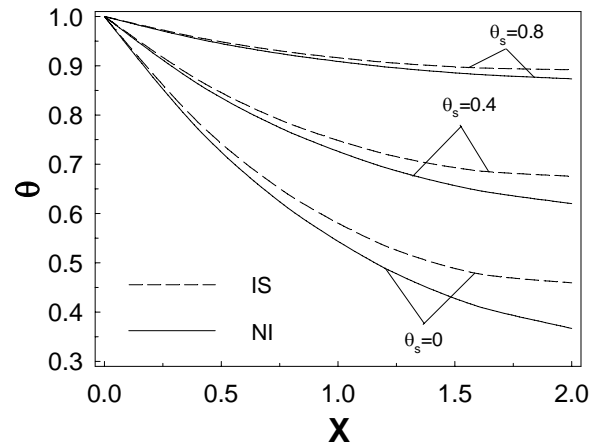


Fig. 6 The variation of temperature along the fin length ($M=0.2$, $L_h=0.4$, $Le=2$)

끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우의 열손실의 상대 오차의 변화가 Fig. 5에서 주어진다. 핀 끝 길이가 고정되었을 때 핀 높이가 커진다는 것은 상대적으로 핀 길이가 짧아지는 것을 의미하기 때문에 핀 높이가 커짐에 따라 상대오차는 커지게 된다. 핀 길이가 짧을수록 핀 높이가 커짐에 따라 상대오차가 급격히 증가함을 나타내는데, 상대오차가 약 5% 이내에 들기 위한 핀 높이에 대한 길이의 비는 Le 가 1일 때는 약 4.9, Le 가 3일 때는 약 3.0이며 Le 가 5일 때는 그 비가 2.5에서도 4%의 오차 밖에 나지 않음을 보여준다.

Figure 6은 핀 길이가 2이고 핀 바닥 온도에 대한 핀 주위 온도의 비가 각각 0, 0.4 그리고 0.8 일 때 핀 끝이 절연된 경우와 절연 되지 않은 경우에 핀 길이 좌표의 변화에 따른 온도 변화를 보여준다. 핀 바닥으로부터 핀 끝으로 감에 따라 두 경우의 온도 차는 커짐을 보여준다. 또한 핀 바닥 온도에 대한 핀 주위 온도의 비가 작아짐에 따라 핀 길이 좌표를 따른 온도 차의 변화가 커짐을 나타낸다.

Table 1은 Fig. 6에서 보여준 두 경우의 온도차의 변화에 대한 상대오차의 변화를 나열한다. 이미 Fig. 6에서 보여진 바와 같이 핀 길이 좌표가 증가함에 따라 그리고 핀 바닥 온도에 대한 핀 주위 온도의 비가 작아짐에 따라 상대오차는 커짐을 보여준다. 그러나 두 경우에 대한 열손실의 상대오차는 핀 바닥 온도에 대한 핀 주위

Table 1 The effect of surrounding temperature on the relative error ($M=0.2, L_h=0.4, L_e=2$)

X	$(\Theta_{IN}-\Theta_{NI})/\Theta_{NI}$ (%)		
	$\Theta_s=0$	$\Theta_s=0.4$	$\Theta_s=0.8$
0.4	1.77	0.95	0.29
1.2	9.29	3.93	1.01
2.0	25.13	8.92	2.11
	$(Q_{NI}-Q_{IS})/Q_{NI}$ (%)		
	$\Theta_s=0$	$\Theta_s=0.4$	$\Theta_s=0.8$
	5.09	5.09	5.09

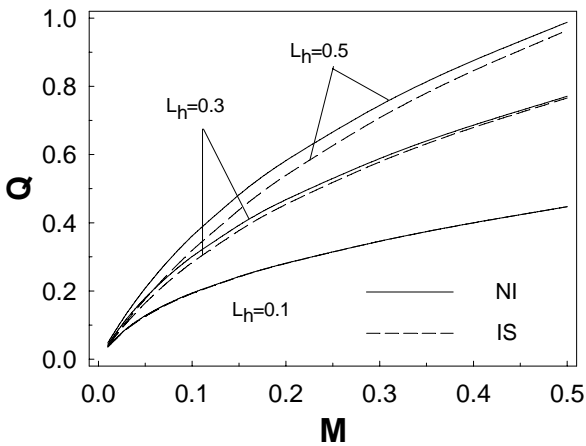


Fig. 7 Heat loss vs. the convection characteristic number ($L_e=2, \Theta_s=0$)

온도의 비에 관계가 없음을 보여준다. 이러한 현상은 열손실에 대한 식들 (15)와 (16)으로부터도 명확히 알 수가 있다.

핀 끝 길이가 2로 고정되었을 때 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 두 경우에 대하여 대류 특성계수의 변화에 따른 열손실의 변화가 Fig. 7에서 보여진다. 먼저 핀 바닥 높이의 반인 L_h 가 0.1인 경우에는 주어진 대류 특성계수의 범위에서 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우의 열손실의 차이가 거의 없음을 보여준다. 이는 물리적으로 핀 끝 길이가 핀 바닥 높이의 10배의 긴 핀에서는 핀 끝의 상태가 열손실의 변화에 거의 영향을 주지 않음을 의미한다. 핀 바닥 높이가 커질수록 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우의 열손실의 차이가 현저해짐을 보여주는데 특히 대류 특성계수가 증가함에 따라 두 경우의 열손실의 차이가 커지다가 다시 줄어드는

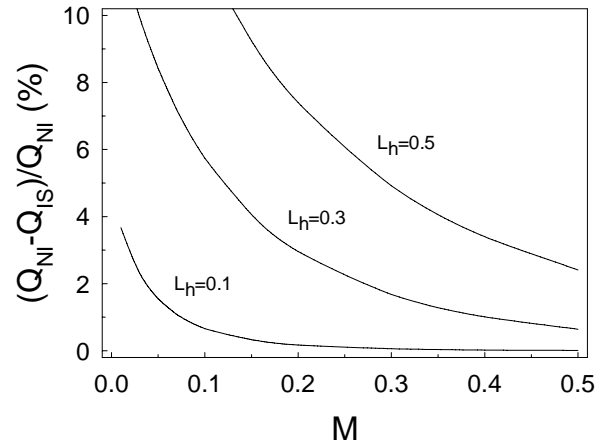


Fig. 8 Relative error in the heat loss vs. the convection characteristic number ($L_e=2, \Theta_s=0$)

경향을 보여준다.

Figure 8은 Fig. 7과 같은 조건에서 대류 특성계수의 변화에 따른 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우의 상대오차를 나타낸다. 핀 길이가 핀 높이의 10배가 되는 L_h 가 0.1일 때에는 주어진 M 의 전 범위에서 4%이내의 상대오차를 갖는다. 핀 바닥 높이의 반이 각각 0.3과 0.5일 때에는 대류 특성계수가 증가함에 따라 Fig. 7에서 나타난 바와 같이 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우의 열손실의 절대 값 차이는 그 차이가 커지다가 다시 작아지는 반면 상대오차 값은 지속적으로 감소함을 Fig. 8에서 보여준다. 핀 길이가 핀 바닥 높이의 단지 2배가 되는 $L_h=0.5$ 인 경우에도 M 이 약 0.3정도 (i.e. $Bi=M \cdot L_h=0.3 \times 0.5=0.15$) 이상에서는 5% 이내의 오차를 갖게 된다.

4. 결론

핀 끝이 절연되지 않은 실제 경우와 핀 끝이 절연되었다고 가정한 경우에 대한 사각 핀의 해석결과 다음과 같은 결론을 제시한다.

1. 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우 모두 주어진 변수들에 따른 열손실의 변화 경향은 비슷하나 핀의 형상이 짧아지고 높아질수록 상대오차는 커진다.

2. 핀 바닥 온도에 대한 핀 주위의 온도 비는 핀 끝이 절연된 경우와 절연되지 않은 경우의 열

손실의 상대오차에 영향을 주지 않는다.

3. 대류특성계수가 일정하고 핀 높이에 대한 길이의 비가 같은 경우에는 핀 길이가 길수록 상대오차는 작아진다.

4. 결과들로부터 핀 끝을 절연으로 가정해도 실제 경우에 비교하여 큰 오차 없이 사용할 수 있는 범위들을 구체적으로 제시하였다.

참고문헌

- (1) Su, R. J. and Hwang, J. J., 1998, "Analysis of Transient Heat Transfer in a Cylindrical Pin Fin", *J. Thermophysics*, Vol. 12, No. 2, pp. 281~283.
- (2) Kang, H. S. and Look, D. C. Jr., 2004, "Optimization of Thermally and Geometrically Asymmetric Trapezoidal Fins", *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 18, No. 1, pp. 52~57.
- (3) Ullmann, A. and Kalman, H., 1989, "Efficiency and Optimized Dimensions of Annular Fins of Different Cross-Section Shapes", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, NO. 6, pp. 1105~1110.
- (4) Razelos, P. and Georgiou, E., 1992, "Two-Dimensional Effects and Design Criteria for Convective Extended Surfaces", *Heat Transfer Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 38~48
- (5) Incropera, F. P. and DeWitt, D. P., 1996, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, New York, pp. 110~120.
- (6) Chapman, A. J., 1984, *Heat Transfer*, Macmillan Publishing company, New York, pp. 56~61.
- (7) Holman, J. P., 1997, *Heat Transfer*, McGraw-Hill Inc., International Edition, pp. 44~47.