

가상경계 유한차분 격자 볼츠만 법을 이용한 평판근처 원형 실린더 주위의 비압축성 유동에 관한 수치적 연구

양희주[†] · 정해권* · 김래성* · 하만영*

A numerical study of the incompressible flow over a circular cylinder near a plane wall using the Immersed Boundary - Finite Difference Lattice Boltzmann Method

Hui-Ju Yang[†], Hae-Kwon Jeong*, Lae-Sung Kim*, and Man-Yeong Ha*

Key Words : Circular cylinder(원형실린더), Finite Difference Lattice Boltzmann Method(유한차분격자볼츠만법), Immersed Boundary(가상경계)

Abstract

In this paper, incompressible flow over a cylinder near a plane wall using the Immersed Boundary – Finite Difference Lattice Boltzmann Method (IB-FDLBM) is implemented. In this present method, FDLBM is mixed with IBM by using the equilibrium velocity. We introduce IBM so that we can easy to simulate bluff-bodies. With this numerical procedure, the flow past a circular cylinder near a wall is simulated. We calculated the flow patterns about various Reynolds numbers and gap ratios between a circular cylinder and plane wall. So these are enabled to observe for vortex shedding. The numerical results are found to be in good agreement with those of previous studies.

기호설명

c : 입자의 최소속도
 c_s : 음속
 f : 입자 분포 함수
 f^{eq} : 평형 분포 함수
 p : 압력
 t : 시간
 u : 속도
 w : 가중(weighted) 함수
 F : Body force
 e : 에너지
 G : 실린더 vortex 벽면 사이의 거리
 D : 실린더 직경

그리스 문자

ρ : 밀도
 τ : 단일시간완화계수 (relaxation time)
 Ω : 충돌 연산자
 ν : 동점성 계수

1. 서론

실린더가 존재하는 경우의 유동은 그 공학적 타당성 때문에 지난 십 수년 동안 많은 연구가 진행되어왔다. Vortex shedding 은 대개 Reynolds 수 40이상에서 발생하는데 이때의 vortex shedding 은 매우 규칙적이고 선형적이다.

실린더가 벽면 근처에 위치해 있을 경우 vortex shedding 은 Reynolds 수, 그리고 실린더와 벽면 사이의 간극 비(G/D , G : 벽면과 실린더 사이의 거리, D : 실린더 직경) 그리고 벽면 경계층의 특성에 영

[†] 비회원, 부산대학교 대학원 기계공학부

E-mail : yangtera@pusan.ac.kr

TEL : (051)510-3090 FAX : (051)515-3191

* 부산대학교 기계공학부

향을 받는다. 다시 말해, 단일 실린더 외부 유동에서 같은 Reynolds 수에서 vortex shedding 이 규칙적이고 선형적으로 발생하더라도 실린더가 벽면 근처에 위치하면 벽면 근처의 전단영역에 의해 불규칙하고 비선형적으로 변할 수 있다⁽¹⁾. 따라서 본 연구는 이러한 특징을 전산해석하기 위하여 가상 경계 유한 차분 격자 볼츠만 기법(IBM-FDLBM: Immersed boundary-Finite Difference Lattice Boltzmann Method)을 사용 하여 본 연구를 수행하였다.

유한 차분 격자 볼츠만 기법(FDLBM: Finite Difference Lattice Boltzmann Method)은 격자 볼츠만 기법(LBM: Lattice Boltzmann Method)의 보완적인 기법이다. LBM은 LGCA(lattice-gas Cellular automata)⁽²⁻³⁾로부터 발전하였다. LBM은 유체의 운동방정식을 직접 이산화 하여 거시적으로 해석하는 방법과는 달리, 유체의 운동을 미시적이며 확률적인 거동으로 간주하고 충돌과 병진을 반복하는 이산적인 집합체로써 계산하는 방법이다. 이와 같은 LBM은 거시적 관점의 물리적 현상뿐만 아니라 기존의 전산기법으로 접근하기 어려운 유동소음, 다상 유동 및 미시적 관점의 현상과 회박기체에 대한 해를 구하는 것이 가능하다. 그러나 LBM은 입자의 속도와 격자(Lattice)에 대한 의존성이 크기 때문에 다양한 형상에 대한 해를 도출하는데 어려움을 가지고 있다. 입자의 속도와 격자의 크기(입자의 이동거리)의 제한이 없어지게 된다면, 보다 다양하고 복잡한 현상에 대한 결과를 도출할 수 있다. 이를 해결하기 위해 새롭게 제시된 기법이 FDLBM이다⁽⁴⁻⁵⁾.

복잡한 형상 주위의 유동장을 계산하는데 있어 가상 경계법(Immersed boundary method, IBM)이 연구되고 있다. 이 방법은 유동장 해석을 위한 Eulerian grid와 유동장 내의 물체를 나타내는 Lagrangian grid를 동시에 사용하며, 유동장 내에 존재하는 물체에 운동량을 부가(momentum forcing)함으로써 직교 좌표계에서 해석하는 방법이다. Peskin⁽⁶⁾은 유동장 내에 존재하는 물체를 표현하기 위해 운동량 방정식에 운동량 부가를 도입하는 방법을 제안하여 움직이는 심장판막의 경계조건에 적용시켰으며, Goldstein et al⁽⁷⁾은 고체 벽을 모사하기 위하여, Peskin⁽⁶⁾의 방법으로 도입한 운동량 부가를 feedback 방식으로 구하였다⁽⁸⁾. 또한 Saiki and Biringen⁽⁹⁾은 물체의 움직임을 나타내기 위해 feedback 방식을 이용하여, 정상 유동과 회전 유동 및 진동하는 실린더의 유동을 계산

하였다. 본 연구에서는 feedback 방식을 통해 격자 내에 물체를 모사하였다.

최근, Feng⁽¹⁰⁾은 fluid-particle interaction을 해결하기 위해 IB-LBM (Immersed boundary - Lattice Boltzmann method)을 제안하였다. 이들은 collision 계산과정에서 외력의 개념으로 IBM을 추가하는 방식을 선택하였다.

본 연구에서는 Shan⁽¹¹⁾이 제안한 평형속도(equilibrium velocity)를 적용한 새로운 IB-FDLBM (Immersed boundary - finite difference lattice Boltzmann method)을 이용하여 평판근처 원형 실린더 주위의 유동장을 해석하고자 한다.

2. 이론적 연구

2.1 수치 해석 방법

입자 분포 함수를 이용한 방법으로서 Lattice-Boltzmann 방법의 알고리즘은 정해진 속도벡터에 의해 입자들이 거동하고, 이런 입자들의 집합체인 입자 분포 함수는 분포 함수들간 서로 충돌을 일으키며, 이 충돌에 의해서 각각의 속도 벡터로 향하는 입자분포 함수는 새롭게 재구성된다. 이렇게 재구성된 입자 분포 함수는 다음 시간 스텝에서 다시 속도 벡터가 향하는 방향으로 진행하게 된다. 이와 같은 방법으로 수치 계산은 이루어지며 특정한 수렴 조건을 만족하게 되면 수치적인 변수를 구한 다음, 연산은 종료하게 된다. 본 연구에서는 정지 입자를 포함하여 9개의 미시적 속도성분을 지는 D2Q9 모델을 사용하였다.

2.1.1 지배방정식

FDLBM의 지배방정식은 기존의 LBM의 지배방정식과 동일하며 식 (1)과 같다.

$$f_i(x+c_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(x, t) + \Omega_i \quad (1)$$

모든 격자에서 입자들이 동시에 충돌이 일어나, 충돌 후 그 입자들이 주어진 속도 방향의 격자를 따라 움직이게 된다. 충돌에 걸리는 시간은 이동하는 시간에 비해 매우 짧고, 그 변화는 순간적으로 일어난다고 가정한다. 어느 한 방향으로 운동하는 입자는 미시적, 이산적이기 때문에 그 자체로는 유동장의 모습을 구현하기 힘들다. 따라서 FDLBM에서는 계산 영역 내 전체 입자의 분포를 조사하는 것을 바탕으로 유체의 운동에 대한 해를 구하게 된다. 본 연구에서 사용한 D2Q9의 모델은 Fig. 1과 같다.

식 (1)을 시간과 공간에 대해 Taylor 급수 전개를 사용하여 이산화하게 되면, 식 (2)와 같은 공식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_i \cdot \nabla f_i = \Omega_i, (i=0,1,\dots,8 \text{ for } 2D) \quad (15)$$

D2Q9 모델은 비열유체 모델이며, 충돌 전후로 전체 입자의 질량과 운동량이 보존되는 충돌에 관한 가정을 가지고 있는 충돌 연산 모델을 사용한다.

충돌 연산 모델은 Bhatnagar, Gross, Krook⁽¹²⁾이 제안한 단일 완화 시간 방법에 의해서 전개된다. 이를 통해 갈릴리안 불변량(Galilean invariance)의 부재와 압력에 종속되는 속도 분포와 같은 LGA의 인위적인 계산과정을 제거하고 현상을 규명함에 있어서 융통성을 부여하였다. 또한 간단한 단상의 비압축성 유동을 계산하는데 있어서 정확도와 안정도, 계산효율을 향상시켰다. 식 (2)의 Ω_i 는 충돌 연산자로서 식 (3)과 같이 나타낸다.

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (3)$$

여기서 τ 는 충돌 완화 시간을 나타내며, 평형 상태를 이루고 있는 계가 있을 때, 그 상태를 깨뜨리는 외부의 작용이 주어진 후에 다시 평형 상태로 되돌아가는데 필요한 시간을 의미한다. 또한 평형 분포 함수 f^{eq} 는 여러 가지 종류의 격자에 따라 고유의 평형 분포 함수가 존재하며, D2Q9 모델을 적용하는 경우에는 식 (4)의 평형 분포 함수가 사용된다.

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + \frac{3}{c^2} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2c^2} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \mathbf{u}^2 \right], \quad (4)$$

여기서 w_i 는 가중함수 (weighted factor)로서 식 (5)와 같이 주어진다.

$$w_i = \begin{cases} 4/9, & i=0 \\ 1/9 & i=1,2,3,4 \\ 1/36 & i=5,6,7,8 \end{cases} \quad (5)$$

거시적인 유동 변수는 입자 분포 함수를 이용하여 구할 수 있으며, 식(6), (7), (8)과 같은 관계를 가지고 있다. 이러한 관계는 거시적으로 정의되는 D2Q9 모델의 입자 분포 함수와 거시적인 유동 변수의 관계를 나타내며, 일종의 구속 조건 (constraints)이라고 할 수 있다.

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i = \sum_{i=0}^8 f_i^{eq}, \quad (6)$$

$$\rho \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=0}^8 \mathbf{c}_i f_i = \sum_{i=0}^8 \mathbf{c}_i f_i^{eq}, \quad (7)$$

$$p = \rho c_s^2, \quad (8)$$

여기서 c_s 는 음속을 나타내며 $c_s = c/\sqrt{3}$ 이다.

Fig. 1에 나타난 것과 같이 D2Q9 모델은 $i=0$ 일 때 정지해 있는 입자를 나타낸다. $i=1,2,3,4$ 인 경우 인접한 격자를 향한 수직/수평 방향의 입자 진행방향을 나타내며, $i=5,6,7,8$ 인 경우 대각선에 위치하고 있는 격자로 향하는 입자를 의미한다. 이 경우 각 입자의 속도 벡터는 식 (9)와 같다.

$$\mathbf{c}_i = \left(\cos\left(\frac{i-1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{i-1}{4}\pi\right) \right) c, \quad (9)$$

$$i=1,2,\dots,8, \quad \mathbf{c}_0=0$$

여기서, $c = \delta x / \delta t$ 이며, δx 와 δt 는 각각 격자의 크기와 시간 간격을 의미한다.

2.1.2 시간과 공간의 이산화

FDLBM은 시간과 공간에 대하여 각각 이산화를 한다. 시간에 대해서는 2차 Runge-Kutta법을, 공간에 대해서는 3차 Upwind법을 사용하였다. 시간과 공간을 각각 이산화하는 것을 통해, 전산 효율이 증가되며, 수치적 정확도가 증가하게 된다.

2.2 가상 경계 법(Immersed boundary method)

가상 경계 법에서는 immersed boundary 점과 lattice가 일치하지 않는다. 그래서 immersed boundary 점과 lattice의 물리량을 interpolation scheme을 사용하여 coupling 시키도록 한다. 다시 말해서, 물체의 위치 정보로부터 물체 표면에서의 속도 정보를 구하는 것이다. 이때, 실린더 표면에

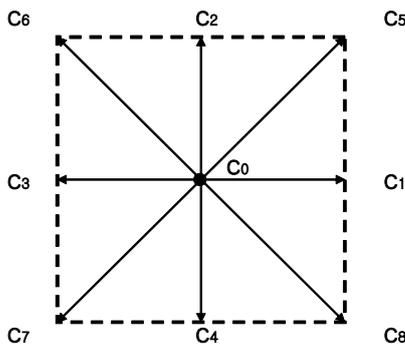


Fig.1 The D2Q9 lattice model

서의 속도를 정확하게 구하기 위해 bilinear interpolation scheme 을 사용하여 실린더 표면에서의 속도를 계산하였다.

Interpolation scheme 을 통해 물체 표면에서 구한 속도는 물체 표면의 no slip boundary condition 을 만족하기 위해 유동장에 작용하는 일종의 힘(body force)으로 치환하여 유동장과 feedback 관계를 가지도록 해야 한다. Goldstein et al⁽⁷⁾과 Saiki and Bringen⁽⁹⁾가 momentum forcing $F(x_s, t)$ 을 표현하였다

2.3 IB-FDLBM

본 절에서는 앞 절에서 설명한 FDLBM 과 가상 경계 법을 이용한 IB-FDLBM 에 관해 논의하고자 한다. 가상 경계 법을 통해 momentum forcing 이 첨가되는 경우 FDLBM 의 평형 분포 함수를 구하는 식(4)에서 속도 \mathbf{u} 는 \mathbf{u}_f 로 다시 계산된다. \mathbf{u}_f 는 Shan⁽¹¹⁾에 의해 제안되었으며 식 (14)와 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u} + \frac{\tau F(x_s, t)}{\rho} \quad (14)$$

\mathbf{u}_f 는 매 time step 마다 계산되며, 물체 표면에서 2 차 정확도를 가지는 점착 조건을 만족시킨다.

3. 문제 정의

3.1 경계 조건

문제의 형상은 Fig. 2 에 나타내었고, 그 도메인에 사용된 경계조건은 다음과 같다.

On the top: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

On the lower plane plate: $u = 0, v = 0$

At left end: $u = U_i, v = 0$

At right end: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

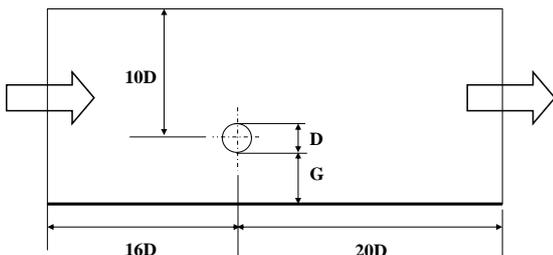


Fig.2 Layout of the flow domain with plane boundary

본 연구에서는 $G/D=0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ 와, $Re = 80, 100, 200, 600, 800, 1000$ 을 사용하였다. G/D 의 비가 증가함에 따라, 각각 $199 \times 158, 199 \times 165, 199 \times 178$ 의 격자를 배치하였다.

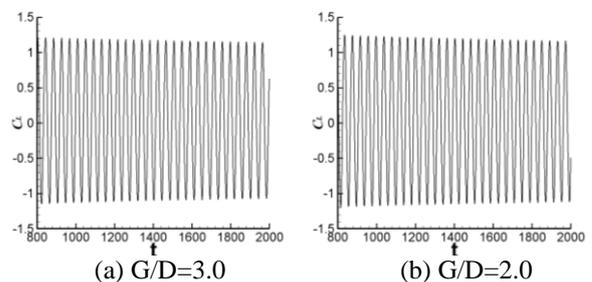
4. 결과 및 고찰

4.1 G/D 비율에 따른 vortex 의 생성과 억제

Fig. 3 은 G/D 비율에 따른 양력 계수의 변화를 시간에 따라 나타낸 것이다. 실린더가 벽과 멀어질 때 ($G/D \geq 1.0$) 양력 계수는 시간 800 이후부터 규칙적으로 진동하는 것을 볼 수 있다. $G/D \geq 1.0$ 인 경우의 3 가지 case 의 양력 계수는 별반 차이가 나지 않는다. 실린더가 벽면에 다가가 $G/D=0.5$ 가 되면 양력 계수의 진폭은 다소 줄어들지만 규칙적으로 진동하는 것을 볼 수 있다. 만약 실린더가 벽면에 더욱 근접한다면, 양력 계수의 진폭은 더욱 감소하고 규칙성이 깨진다. $G/D=0.3$ 에서 양력계수 진폭의 최대치가 줄어들고 불규칙해 지는 것을 볼 수 있고, $G/D=0.1$ 에서 양력계수의 규칙성은 완전히 사라진다.

이러한 진폭과 양력의 변화는 vortex shedding 과 관계한다. 실린더와 벽면 사이의 간격이 클 때 ($G/D \geq 1.0$), 큰 진폭과 함께 규칙적인 진동을 보여 준다. 양력의 변화가 규칙적인 사이클을 그리는 것은 vortex shedding 역시 규칙적인 주기성을 갖는다는 것을 의미한다. 실린더와 벽면 사이의 간격 비율 $G/D=0.3$ 에서 양력계수 진동의 불규칙성이 존재하고 진폭이 줄어드는 것은 유체가 실린더를 통과 후 발생하는 vortex shedding 이 다른 물리적 현상에 의해 교란되는 것을 의미한다. 벽면에 가까워 질수록 벽면의 영향은 커져 vortex shedding 을 방해하게 된다.

$G/D=0.1$ 에서 교란은 더욱 커져 주기가 일정치 못하고 양력계수 진동의 최대치는 시간이 지날수록 0 에 가까워 진다. 이는 vortex shedding 의 주기성도 없고 vortex 의 형성 자체가 시간이 지날수록 어려워진다는 것을 의미한다.



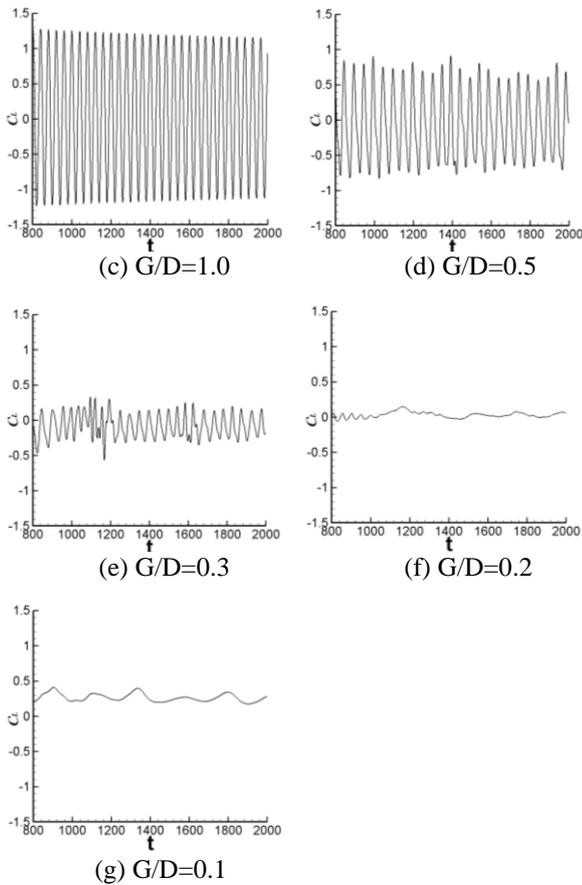


Fig. 3 Lift coefficient at different gap ratios ($Re=1000$)

Fig. 4는 시간에 따른 순간 vorticity 를 나타낸 것이다. 실선은 positive vorticity이고, 점선은 negative vorticity이다. 실린더 vortex 벽면에는 3개의 전단층이 존재하는데 2개는 실린더를 둘러싸면서 형성하고 또 하나는 벽면 위에 생성된다. Fig. 4에서 전단층을 확인할 수 있다. 실린더 면 위와 벽면에 생성된 전단층은 negative 전단층이고, 실린더 면 아래에 형성된 전단층은 positive 전단층이다.

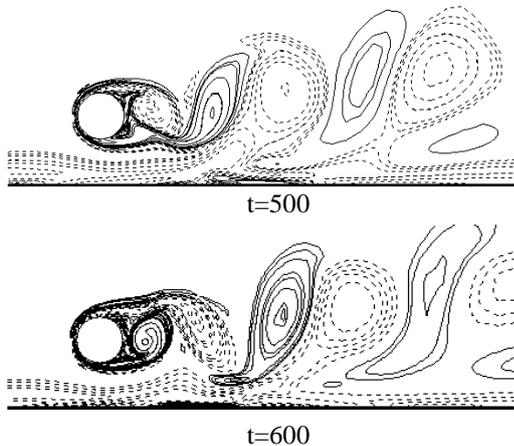


Fig. 4 Instantaneous vorticity around the cylinder ($Re=1000$ $G/D=1.0$)

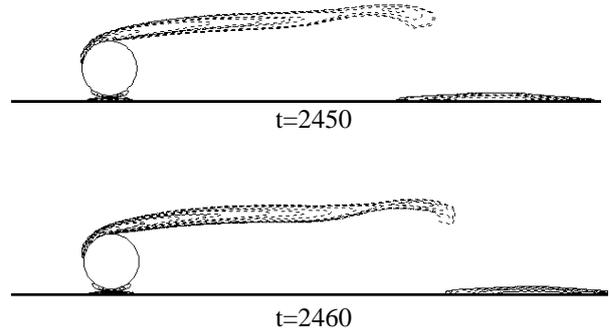


Fig. 5 Instantaneous vorticity around the cylinder ($Re=1000$ $G/D=0.1$)

vortex 의 생성과 억제현상은 위의 3 개의 전단층의 상호작용으로 나타나는 것이다. 실린더 면 아래쪽에 생성된 positive vortex 가 점차 커지다가 실린더 위쪽 면에서 생성된 negative vortex 에 의해 잘려나가 하류로 빠져나간다. $t=600$ 에서 positive vortex 가 실린더 아래 면에 생성된 전단층에 의해 계속해서 증가하다가 negative vortex 를 밀어낸다. 그 후 실린더 위쪽 면의 전단층에 의해 또 다른 negative vortex 가 생성되고 이는 점차 커지다가 positive vortex 를 밀어내게 된다. 이런 과정이 실린더와 벽면 사이에서 어느 정도 간격이 존재한다면 주기적으로 반복된다. 현 간격에서는 vortex 의 생성이 실린더 상에 존재하는 전단층에 의존될 뿐 벽면에서 생성된 전단층은 vortex 생성에 영향을 주지 않는다. 따라서 현 간격에서는 벽면의 영향을 받지 않았다고 볼 수 있다.

Fig. 5 는 $G/D=0.1$ 에서의 시간에 따른 순간 vorticity 를 나타낸 것이다. 현 간격 비율에서는 실린더 아래 면에서 생성된 전단층과 벽면에서 생성된 전단층이 상호작용에 의해 vortex 생성에 영향을 준다. 결과적으로, 실린더 아래 positive vortex 는 벽면의 negative 전단층에 의해 생성되지 못한다. 비록 실린더 아래쪽에 유동박리가 생기더라도 전단층의 생성은 미미해서 실린더 위쪽 면에서 생성된 전단층에 영향을 줄만큼 크지 않다. 따라서 실린더 근처에 vortex shedding 이 없고 안정적인 하류구조를 가진다. Fig.5 에서도 나타나 있듯이 시간이 지나더라도 유동은 별 차이가 없다.

4.2 Reynolds 수에 따른 vortex 의 생성과 억제

Fig. 6 은 $Re=80$, $G/D=0.8$ 에서 순간 vorticity 를 나타낸 것이다. vorticity 가 전반적으로 형성되지 못한 것을 볼 수 있다. 또한 높은 Reynolds 수에서 생성된 전단층에 비해 현 Reynolds 수에서 생성된

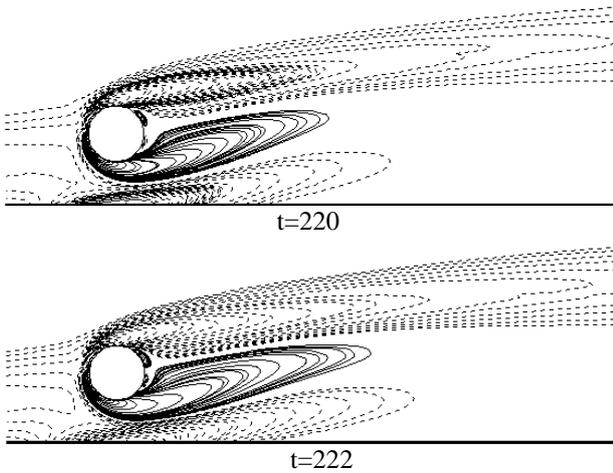


Fig. 6 Instantaneous vorticity around the cylinder (Re=80 G/D=0.8)

전단층은 두껍게 생성되었다. 벽면에서 형성된 두꺼운 전단층이 실린더 아래 면에서 형성된 전단층에 영향을 주어 실린더 아래쪽의 전단층은 약화되고 실린더 위쪽 면에 형성된 전단층에 지대한 영향을 주지 못한다. 따라서 실린더 위 아래 면에 생성된 전단층은 vorticity 를 생성하는 힘이 약하여 vortex 가 생성되지 못하고 하류로 빠져나가게 된다.

5. 결론

평판 근처 원형 실린더 주위의 유동을 IB-FDLBM 기법을 사용하여 전산 해석을 하였다. Reynolds 수는 80 에서 1000 까지 범위 내에서 다양하게 적용되었으며, G/D 비율은 0.1 에서 3.0 까지 사용하여 각각이 미치는 영향에 대해 조사하였다.

양력계수는 간격 비가 줄어들수록, Reynolds 수가 줄어들수록 규칙성이 없어지고 진폭 또한 감소한다. 실린더 vortex 벽면 사이에 간격이 줄어들면 실린더 아래 면에서 형성된 전단층과 벽면에서 발생한 전단층의 접촉에 의하여 실린더 아래 면에 positive vorticity 가 생성되지 못한다. 이는 실린더 위쪽 면의 전단층에도 영향을 주지 못하여 vortex shedding 이 억제된다. Reynolds 수가 감소하면 전단층의 두께가 두꺼워 지고 vorticity 가 약해진다.

후 기

본 연구는 2 단계 BK21 사업의 지원에 의해 수행되었다.

- (1) C. Lei, L. Cheng, S. W. Armfield and K. Kavanagh., 2000, "Vortex shedding suppression for flow over a circular cylinder near a plane boundary" *Ocean Engineering*, Vol. 27, Issue 10, October 2000, pp 1109-1127
- (2) Wolfram S., 1986, "Cellular Automaton Fluids 1; Basic Theory," *J. Stat. Phys.*, Vol. 45, pp. 475-526
- (3) I. Silverman, A.L. Yarin, S.N. Reznik, A. Arenshtam, D. Kijet, A. Nagler, 2006, "High heat-flux accelerator targets: Cooling with liquid metal jet impingement," *Int. J. Heat and mass Transfer*, Vol. 49, pp. 2782-2792
- (4) Frisch U., Hasslacher B., and Pomeau Y., 1987, "Lattice Gas Automata for the Navier-Stokes Equation," *Complex System*, Vol. 1, pp. 649-707
- (5) N.Z. Cao and T.S. Zhao, 2003, "Physical Symmetry and Lattice Symmetry in Lattice Boltzmann Method," *physical Review E55*, R21Asdfasdf
- (6) C. S. Peskin, 1982, "The fluid dynamics of heart valve : experimental, theoretical, and computational methods," *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, Vol 14, pp. 235-259
- (7) D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich, 1993, "Modeling a no-slip boundary with an external force field," *J. Comput. Phys.*, Vol. 105, pp. 354-366Asdf
- (8) J. Kim, D. Kim, H. Choi, 2001, "An immersed-Boundary Finite-Volume Methods for simulations of flow in complex geometries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 171, pp. 132-150
- (9) E.M. Saiki, and S. Biringen, 1996, "Numerical simulation of a cylinder in uniform flow; application of a virtual boundary method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 123, pp. 450-465
- (10) Z. G. Feng and Efstathios E. Michaelides, 2004, "The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems," *J. Comput. Phys.*, Vol. 195, pp. 602-628
- (11) X.W. Shan, H.D. Chen, 1993, "Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components," *Phys., Rev. E* 47 1815-1819.
- (12) P. Bhatnagar, E. Gross and M. Krook, 1954, "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One Component Systems," *Phys. Rev. E*, Vol. 94, pp.511-525