

# 칼라 등색선무늬용 광탄성실험 하이브리트법 개발에 관한연구

권오성\*·황재석<sup>†</sup>·남정환\*·한송령\*\*·권건\*\*·류의\*\*

## A Study on the Development of Photoelastic Experimental Hybrid Method for Color Isochromatics.

O-Sung Kwon, Jai-Sug Hawong, Jeong-Hwan Nam, Song-Ling Han, Gun Kwon and Yi Liu

**Key Words:** Photoelastic Experimental Hybrid Method for White and Black Isochromatics(흑백등색선 무늬용 광탄성실험 하이브리트법), Photoelastic Experimental Hybrid Method for Color Isochromatics(칼라등색선 무늬용 광탄성실험 하이브리트법), White and Black Isochromatics(흑백등색선무늬), Color Isochromatics(칼라등색선무늬), Monochromatic Light(단색광), White Light(백색광), Stress Concentration Factor(응력집중계수)

### Abstract

Isochromatics obtained from photoelastic experiment shows the stress distributions of full field of a structure under a load. Therefore stress distributions of the structure can be read at a glance through isochromatics. Many experimental data are obtained from isochromatics. And then, the various photoelastic experimental hybrid methods have been developed. Until now, monochromatic light has been used for photoelastic experimental hybrid method. Therefore the photoelastic experimental hybrid method used until now is called the photoelastic experimental hybrid method for black and white isochromatics. When stresses are analyzed by photoelastic experimental hybrid method, many experimental data are needed. Therefore some fringe orders of isochromatics are needed for the photoelastic experimental hybrid method for white and black isochromatics. Therefore in this paper, the photoelastic experimental hybrid method for color isochromatics is developed. In this case, two fringe orders are enough for the experimental data of photoelastic experimental hybrid method for color isochromatics. Applying the method to stress concentration problems, its validity is confirmed. In the precision, the photoelastic experimental hybrid method for color isochromatics is better than the photoelastic experimental hybrid method for white and black isochromatics when fringe orders of isochromatics are few. When fringe orders are few, the photoelastic experimental hybrid method for color isochromatics can be used to analyze stress through few fringe orders of isochromatics.

### 1. 서론

어떤 힘을 받고 있는 구조물의 응력상태를 해석할 수 있는 방법에는 이론적인 방법과 실험적인 방법 등이 있다.

이론적인 방법에는 순수이론적인방법과 수치해석법등이 있고 실험적인 방법에는 스트레인게이지법, 모아레법, 광탄성실험법, 피로실험법, SPATE, J-integral등이 있다. 이 실험적인 방법중의 광탄성실험법은 전영역의 실험법으로서 다양하게 사용되어 왔다.

---

<sup>†</sup> 영남대학교 기계공학부  
E-mail : jshawong@yu.ac.kr  
TEL : (053)815-2445 FAX : (053)810-4627

\* 영남대학교 기계공학부

\*\* 영남대학교 기계공학부

---

광탄성실험법에는 2차원용 광탄성 실험법과 3차원용 광탄성실험법 등이 있다. 2차원용 광탄성 실험법은 다양하게 연구되어 왔다. 그러나 3차원 광탄성 실험법은 연구되었지만 다양하게 연구되지는 않았다. 그리고 동적 광탄성실험법도 다양하게 연구되어 왔다.

2차원 평면문제에 적용되는 광탄성 실험법에는 투과형과 반사형 광탄성 실험법이 있다. 그러나 동적하중을 받는 2차원 평면문제용 반사형 동적 광탄성 실험법은 개발된 적이 없다. 앞으로 이 분야가 연구될 분야이다. 위의 설명한 광탄성 실험법에는 두 주응력차(=  $\sigma_1 - \sigma_2$ )가 단지 무늬차수로 나타내어진다. 그러므로 두 개의 주응력  $\sigma_1$  과  $\sigma_2$ 을 분리하는것이 중요하다. 그래서 두 개의 주응력을 구분하는 방법에는 전단응력 차등법<sup>(1)</sup>(Shear-Difference Method)과 간섭계법<sup>(2)</sup>(Interometer Method)등이 있다.

두가지 방법에는 일량이 많고 정도에 문제성이 많다. 그래서 내부응력을 구할 수 있는 다양한 광탄성실험 하이브리트법<sup>(3,4,5,6,7,8,9,10,11)</sup>이 개발되었다. 광탄성실험 하이브리트법을 이용하는 경우에는 무늬차수가 어느정도 되어야 한다. 즉, 4차이상이면 좋은 실험 결과를 얻을 수 있는 무늬차수이다. 그러므로 무늬차수가 4차 미만인 경우의 응력상태를 연구할 수 있는 광탄성실험 하이브리트법을 개발하는것이 현 광탄성실험법의 연구에서는 중요한 과제이다. 그리고 반사형 광탄성 실험법에는 4차이상의 무늬차수가 나타나는 경우가 거의 없다. 그러므로 본 연구의 주 목적은 무늬차수가 4차 미만인 경우의 칼라등색선 무늬용 광탄성 실험 하이브리트법을 개발하는 것이다.

## 2. 기초이론

### 2.1 광탄성 실험 하이브리트법

Airy 응력함수를 사용하여 구한 직각 좌표계의 응력성분들은 식(1)와 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= Re[2\phi'(z) - \bar{z}\phi''(z) - \psi'(z)] \\ \sigma_y &= Re[2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \\ \tau_{xy} &= Im[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]\end{aligned}\quad (1)$$

식(1)에서 보듯이 응력함수  $\phi(z)$ 와  $\psi(z)$ 를 알면 식(1)를 이용하여 응력성분( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ )를 구할 수 있다. 그러므로 응력해석에 있어서는 응력함수  $\phi(z)$ 와  $\psi(z)$ 를 구하는 것이 문제이다. 본 연구에서는  $\phi(z)$ 와  $\psi(z)$ 를 광탄성 실험 하이브리트법으로서 구하고자 한다.

등각사상(Conformal Mapping)된 복소평면( $\zeta$ -평면)과 실제의 복소평면(Z-Plane), 즉, 실평면과의 관계를 나타내는 등각사상함수를 식(2)처럼 나타낼 수 있다.

$$z = \omega(\zeta) \quad (2)$$

식(2)을 식(1)의  $\sigma_y$ 와  $\tau_{xy}$ 에 대입하고 자유-표면력조건( $\sigma_y + i\tau_{xy} = 0$ )을 이용하면 두 개의 응력함수 관계식은 식(3)처럼 나타낼 수 있다.

$$\psi(\zeta) = -\frac{\bar{w}(\zeta)}{w'(\zeta)}\phi'(\zeta) - \bar{\phi}(\zeta) \quad (3)$$

이것은 사상함수  $z = \omega(\zeta)$ 를 통하여 전통적인 해석방법에서 두 개의 응력함수  $\phi(z)$ 와  $\psi(z)$ 를 찾는 대신에 경계조건을 만족하는 하나의 응력함수  $\phi(\zeta)$ 를 구하고 식(3)의 관계식을 이용하면 응력함수  $\phi(\zeta)$ 와  $\psi(\zeta)$ 를 각각 구할 수 있다. 이렇게 구한 응력함수 들을 식(1)에 대입하면 각 조건에 대응되는 응력성분들을 구할 수 있다.  $\phi(\zeta)$ 는 해석적인 함수이므로 멱급수로 표현할 수 있으며 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(\zeta) = \sum_{n=0}^N C_n (\zeta - \zeta_0)^n = \sum_{n=0}^N (a_n + ib_n) (\zeta - \zeta_0)^n \quad (4)$$

여기서 복소계수  $c_n (= a_n + ib_n)$ 은 실험 데이터로서 결정할 수 있다. 그러므로 식(4)가 결정되면 식(1)와 식(3)로서 응력성분  $\sigma_x, \sigma_y$  그리고  $\tau_{xy}$  등을 구할 수 있다.

식(4)를 식(3)에 대입하고 등각사상함수를 이용하면 응력성분은 식(5)처럼 나타낼 수 있다.

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^N Re\{C_n [2f(n, \zeta) - g(n, \zeta)] + \bar{C}_n f(n, \zeta)\}$$

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^N \text{Re}\{C_n[2f(n,\zeta) + g(n,\zeta)] + \overline{C_n}f(n,\zeta)\} \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^N \text{Im}\{C_n g(n,\zeta) + \overline{C_n}f(n,\zeta)\}$$

식(5)  $f(n,\zeta)$ 와  $g(n,\zeta)$ 은 식(6)과 같다.

$$f(n,\zeta) \equiv \frac{n(\zeta - \zeta_0)^{n-1}}{w'(\zeta)} \quad (6.a)$$

$$\begin{aligned} g(n,\zeta) & \equiv \left[ \frac{\overline{w(\zeta)} - \overline{w(\zeta_0)}}{w'(\zeta)^2} \right] n(n-1)(\zeta - \zeta_0)^{n-2} \\ & - \left[ \frac{\overline{w(\zeta)} - \overline{w(\zeta_0)}}{w'(\zeta)^3} w''(\zeta) + \frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)^2} \right] n(\zeta - \zeta_0)^{n-1} \end{aligned} \quad (6.b)$$

식(5)을 광응력 법칙인 식(7)에 대입하면 식(8)를 얻을 수 있다.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 = \left( \frac{f \cdot N_f}{t} \right)^2 \quad (7)$$

$$\left( \frac{f \cdot N_f}{t} \right)^2 = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n \text{Re}[2f(n,\zeta) - 2g(n,\zeta)] \\ & + \sum_{n=1}^N b_n \text{Im}[2f(n,\zeta) + 2g(n,\zeta)] \end{aligned} \right\}^2 + \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n \text{Im}[2g(n,\zeta) - 2f(n,\zeta)] \\ & + \sum_{n=1}^N b_n \text{Re}[2f(n,\zeta) + 2g(n,\zeta)] \end{aligned} \right\}^2 \quad (8)$$

$f(n,\zeta)$ 와  $g(n,\zeta)$ 은 실좌표(Physical Coordinate)  $z = x + iy$ 가 알려진 경우의 역 사상(Inverse Mapping)함수  $\zeta = w^{-1}(z)$ 를 사용하여 결정되어지는 위치좌표(Position Coordinate)함수이다. 그러므로 식(8)은  $a_n$ 과  $b_n$ 만의 함수이므로, 이를 비선형 최소자승법을 사용하여 그 계수를 결정함으로써 식(2), 식(3) 그리고 식(4)를 통하여 각 응력성분을 분리할 수 있다. 이러한 방법을 광탄성 실험 하이브리드법이라 칭한다.

## 2.2 원공용 광탄성실험 하이브리드법

원공부근 영역에 있어서 등각사상함수는 식(9)과 같다.

$$z = w(\zeta) = i\rho e^{-i\zeta} + z_1 = x + iy = r e^{i\theta} + z_1 \quad (9.a)$$

$$\frac{r}{\rho} e^{i\theta} = i e^{-i\zeta} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \zeta)} \quad (9.b)$$

식(9)을 이용하여 구한  $w'(\zeta)$ ,  $\overline{w(\zeta)}$ ,  $\zeta - \zeta_0$ ,  $\overline{w(\zeta)}$  등을 식(6.a)와 식(6.b)에 대입하면 원공에 대한  $f(n,r,\theta)$ 와  $g(n,r,\theta)$ 은 각각 식(10.a)와 식(10.b)로 나타 낼 수 있다.

$$f(n,r,\theta) = \frac{1}{r} e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} n \left\{ \theta_0 - \theta + i \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) \right\}^{n-1} \quad (10.a)$$

$$\begin{aligned} g(n,r,\theta) & = \frac{1}{r} \left( \frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) e^{-i3\theta} n(n-1) \left\{ \theta_0 - \theta + i \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) \right\}^{n-2} \\ & + \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) e^{i(\frac{\pi}{2} - 3\theta)} n \left\{ \theta_0 - \theta + i \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) \right\}^{n-1} \end{aligned} \quad (10.b)$$

식(6)의  $f(n,\zeta)$ 와  $g(n,\zeta)$ 대신에 식(10)을 각각 대입하므로 응력성분들은 식(11)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x(r,\theta) & = \sum_{n=1}^N \text{Re}\{C_n[2f(n,r,\theta) - g(n,r,\theta)] + \overline{C_n}f(n,r,\theta)\} \\ \sigma_y(r,\theta) & = \sum_{n=1}^N \text{Re}\{C_n[2f(n,r,\theta) + g(n,r,\theta)] - \overline{C_n}f(n,r,\theta)\} \\ \tau_{xy}(r,\theta) & = \sum_{n=1}^N \text{Im}\{C_n g(n,r,\theta) - \overline{C_n}f(n,r,\theta)\} \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)의 응력성분들을 식(7)에 대입하여 정리하면 식(12)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n \text{Re}[2f(n,r,\theta) - 2g(n,r,\theta)] \\ & + \sum_{n=1}^N b_n \text{Im}[2f(n,r,\theta) + 2g(n,r,\theta)] \end{aligned} \right\}^2 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n \text{Im}[2g(n,r,\theta) - 2f(n,r,\theta)] \\ & + \sum_{n=1}^N b_n \text{Re}[2f(n,r,\theta) + 2g(n,r,\theta)] \end{aligned} \right\}^2 \\ & - \left( \frac{f \cdot N_f}{t} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)은 반경이  $\rho$ 인 원호를 가진  $z$ 평면의 위치 좌표변수가 대입된 광응력 법칙이다. 등색선 무늬차수, 무늬차수에 대응되는 위치 좌표를 대입한 식(12)에 수치해석법을 적용하여 응력함수 계수  $a_n$ 과  $b_n$ 을 구할 수 있다. 이렇게 구한  $a_n$ 과  $b_n$ 을 응력함수  $\phi(\zeta)$ 에 대입하고 식(3)의 관계식

과 식(2)의 관계식을 이용하면 응력함수  $\phi(z)$ 와  $\psi(z)$ 를 구할 수 있다. 이렇게 구한 응력함수  $\phi(z)$ 와  $\psi(z)$ 를 식(1)에 대입하면 임의의 하중을 받는 원공주위의 응력성분을 구할 수 있다. 이러한 과정을 원공용 광탄성 실험 하이브리트법이라 칭한다.

### 3. 실험 및 실험방법

광탄성실험법에는 투과형 광탄성실험법과 반사형 광탄성 실험법이 있다.

일반적으로 투과형 광탄성실험법에는 무늬차수가 많이 발생하지만 반사형 광탄성 실험법에는 무늬차수가 적게 발생한다.

본 연구에서는 칼라 등색선 무늬차수용 광탄성 실험 하이브리트법을 개발하기 위하여 투과형 광탄성 실험법을 이용하고 백색광을 광원으로 사용하였다.

칼라무늬가 연속적으로 반복되기 때문에 동시에 감색되는 영향이 증가한다. 그러므로 등색선의 색상은 희미하게 되므로 구분할 수 없게 된다. 그러므로 무늬차수가 4차 혹은 5차 이상이면 칼라무늬 등색선은 희미하게 된다. 그러므로 Table 1에서 보듯이 무늬차수가 4차이상이면 무늬차수를 세분할 수 없다.

본 연구에서는 본 연구에서 고안한 칼라 등색선 무늬용 광탄성 하이브리트법의 유효성을 확인하기 위하여 원공을 가진 유한판과 크랙을 가진 유한판이 단순인장을 받은 경우에 투과형 광탄성 실험법을 적용하였다. 이때 사용된 시편의 크기는 아래와 같다.

원공을 가진 유한판의 높이  $h=200\text{mm}$ , 직경  $d=12\text{mm}$ , 유한판의 폭  $w=30\text{mm}$ 이고 시편의 두께는  $t=5\text{mm}$ 이다.

본 연구에서 연구된 원공의 광탄성 실험 하이브리트법과 크랙의 광탄성 실험 하이브리트법에 사용된 수치해석법은 Hook and Jeeve's 수치해석법이며 그 하이브리트법의 플로우 차트는 Fig.1과 같다.

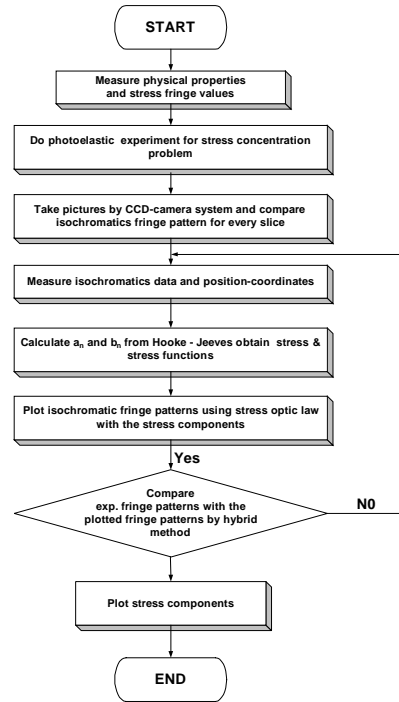
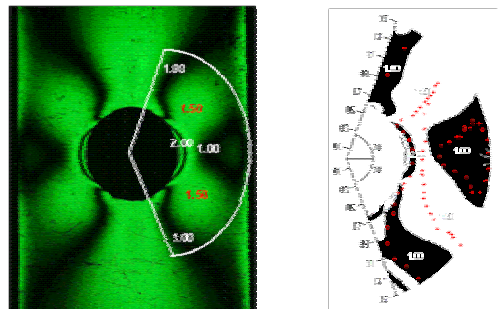


Fig.1 Flow chart of photoelastic experimental hybrid method

### 4. 실험결과 및 고찰

Fig.2와 Fig.3은 각각 원공을 가진 유한판이 단순인장을 받을 때 단색광과 백색등을 사용하여 촬영한 등색선무늬를 나타낸다.

이때 최대 무늬차수 약 2차이다.



(a) Actual isochromatics (b) Graphic isochromatics

Fig.2 White and black isochromatics

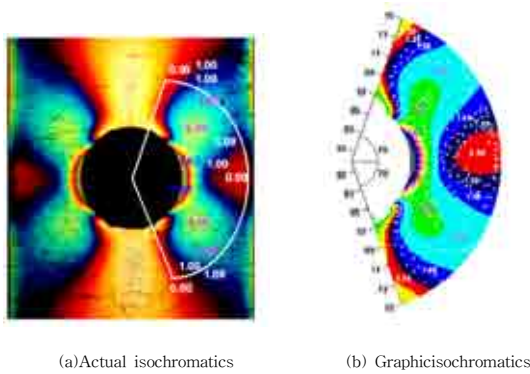


Fig.3 Color isochromatics

Fig.2의 (a)와 (b)은 원공을 가진 유한판이 단순 인장을 받을때 단색광을 사용하여 얻은 실제 등색선무늬와 기존의 광탄성실험의 하이브릿법을 이용하여 구한 응력성분을 광응력법칙에 대입하여 구한 그래픽한 등색선무늬를 나타낸다.

그리고 Fig.3의 (a)와 (b) 각각 원공을 가진 유한판이 단순인장을 받을때 백색등을 광원으로 사용하여 얻은 실제 등색선무늬와 본 연구에서 고안한 칼라 등색선무늬용 광탄성실험 하이브릿법을 이용하여 구한 응력성분들을 이용하여 구한 응력성분들을 광응력법칙에 대입하여 구한 그래픽 칼라 등색선무늬를 나타낸다.

Fig.2와 Fig.3의 등색선무늬상의 숫자는 등색선 무늬의 차수를 나타낸다.

Fig.2와 Fig.3의 등색선무늬상의 “+”는 측정된 데이터의 위치를 나타낸다. 흑백 등색선무늬상의 “+”은 흑백 등색선무늬의 중심선상에서 측정되었고, 칼라 등색선무늬상의 “+”도 동일한 색상 칼라무늬상의 중심선상에서 측정되었다. 흑백등색선무늬상의 “+”는 등색선 무늬 중심선상에 존재하지 않고 칼라등색선 무늬상의 “+”는 거의 칼라 무늬 중심선상에 존재한다. 이것은 무늬차수가 적은 경우에는 칼라등색선 무늬용 광탄성실험법이 흑백용 광탄성실험 하이브릿법보다 유효하다는 것을 의미한다.

Fig.4은 Fig.3에 적용된 칼라등색선무늬용 광탄성실험 하이브릿법을 이용하여 구한 응력성분들을  $\sigma_0 (= p/wt)$ 로 무차원화하여 나타낸 것이다.

이것은 본 연구에서 고안된 칼라 등색선무늬용 광탄성실험 하이브릿법을 이용하면 무늬차수가 2 미만인 경우에서도 원공주위의 응력성분을 분리하는데 유효하게 이용될 수 있다는 것을 의미한다.

다.

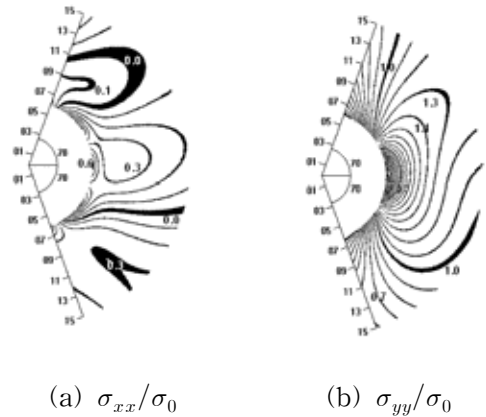


Fig.4 Stress contours of stress components normalized by  $\sigma_0 (\sigma_0 = p/wt)$

Table 2 Stress concentration factor

	Experimental Value	Theoretical Value
White and black isochromatics	4.853	3.732
Color Isochromatics	3.575	

Table 2은 기존의 흑백 등색선무늬용 광탄성실험 하이브릿법과 칼라 등색선무늬용 광탄성실험 하이브릿법을 이용하여 구한 응력집중계수를 나타낸다.

Table 2에서 보듯이 무늬차수가 적은 경우에는 칼라 등색선무늬용 광탄성실험 하이브릿법이 응력집중계수를 구하는 데도 유효하다는 것을 의미한다.

## 5. 결론

위와 같은 연구결과와 고찰을 통하여 아래와 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 칼라 등색선 무늬용 광탄성 실험법이 개발되었고 그 유효성이 확인되었다.
2. 본 연구에서 개발된 칼라 등색선 무늬용 광탄성 실험 하이브리트법은 무늬차수가 2차 미만인 경우에도 응용될 수 있다. 그러므로 투과형 광탄성 실험법 보다도 반사형 광탄성 실험법에 더 효과하게 이용될 수 있다.
3. 본 연구에서 개발된 칼라 등색선 무늬용 광탄성 실험 하이브리트법은 응력집중 계수나 응력확대계수 즉 응력집중 문제나 파괴역학 문제에 응용될 수 있다.

#### 참고문헌

1. Frocht, M. M.: 1941, "Photoelasticity", *John Wiley & Sons, Inc., New York*, vol.1, Chap.8.
2. Post, D.: 1954, "A New Photoelastic Interferometer Suitable for Static and Dynamic Measurements", *Proc.SESA*, vol. **XII**, no.1, pp.191-202.
3. Chandrashekhara, K. K. and K. Jacob, 1977, "Experimental Numerical Hybrid Technique for Stress Analysis of Orthotropic Composites", *Edited by Holester, Applied Science Publication*, pp. 67-68.
4. C. W. Smith, D. Post, G. Hiatt and G. Nicoletto, 1983, "Displacement Measurements Around Cracks in Three dimensional Problems by a Hybrid Experimental Technique", *Exp. Mech.*, pp. 15-20.
5. Hawong, J. S., Lin, C. H., Lin, S. T., J. Rhee and R. E. Rowlands, 1995, "A Hybrid Method to Determine Individual Stresses in Orthotropic Composites Using Only Measured Isochromatic Data", *Journal of Composite Material*, Vol. 29, No. 18, pp. 2366-2387.
6. Hawong, J. S., Shin, D. C. and Lee, H. J., 2001, "Photoelastic Experimental Hybrid Method for Fracture Mechanics of Anisotropic Materials", *Experimental Mechanics*, Vol. 41, No. 1, pp. 92-99.
7. Shin, D. C., Hawong, J. S., Lee, H. J. Nam, J. H. and Kwon, O. S. 1998, "Application of Transparent Photoelastic Experimental Hybrid Method for the Fracture Mechanics of Orthotropic Material", *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers(A)*, Vol.22, No.6, pp. 1036-1044.
8. Shin, D. C., Hawong, J. S., Lee, H. J. Nam, J. H. and Kwon, O. S. 1998, "Application of Transparent Photoelastic Experimental Hybrid Method to the Fracture Mechanics of Isotropic Material", *Transactions of the Korean society of Mechanical Engineers(A)*, Vol.22, No.5, pp. 834-842.
9. Shin, D. C. and Hawong, J. S., 2000, "A Study on the Development of the Dynamic Photoelastic Experimental Hybrid Method for Isotropic Material", *Transaction of the Korean Society of Mechanical Engineers (A)*, Vol. 24, No. 9, pp.2220-2227.
10. Shin, D. C. and Hawong, J. S., 2001, "A Study on the Development of the Dynamic Photoelastic Experimental Hybrid Method for Dissimilar Isotropic Material", *Bulletin of the Korean Society of Mechanical Engineers (A)*, Vol. 25, No. 3, pp.434-442.
11. Shin, D. C., Hawong, J. S. and Sung J. H., 2003, "Development of the Dynamic Photoelastic Experimental Hybrid Method for Propagating Cracks in Orthotropic Material", *Bulletin of the Korean Society of Mechanical Engineers (A)*, Vol. 27, No. 8, pp.1273-1280.